Pubblicazione bimensile. N. 1.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXX.° — Fascicolo 1°

Seduta del 2 gennaio 1921.

1° Semestre.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCAD. NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Renpiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

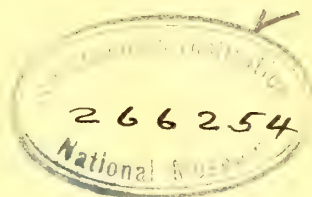
1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 gennaio 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sull'influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante.* Nota V del Socio G. CIAMICIAN e di C. RAVENNA.

Riassumiamo brevemente i risultati da noi conseguiti nello scorso anno che si riferiscono a problemi rimasti insoluti dalle ricerche descritte nella nostra ultima Nota (1).

L'anno scorso avevamo osservato che l'isoamilamina determinava un albinismo, che aveva qualche somiglianza con quello prodotto dalla nicotina. Ci parve utile ritornare su queste esperienze per vedere se tale corrispondenza, pur non essendovi alcun nesso fra la costituzione delle due basi, avesse qualche fondamento per l'essere l'isoamilamina presente nel tabacco. Il problema si è risolto nel modo più semplice, perchè ripetendo le esperienze colle altre amine abbiamo osservato che un fatto analogo, sebbene meno pronunciato, lo produce anche la butilamina normale. Si vede dunque che l'albinismo è un fenomeno tossico che può essere prodotto da diverse sostanze, mantenendo però nei singoli casi le sue speciali caratteristiche.

Dalle nostre esperienze sulla piridina e la picolina, la piperidina e la metilpiperidina era risultato che le prime sono meno velenose delle seconde;

(1) Questi Rendiconti, vol. 29, I, pag. 7 (1920).

poteva però darsi che l'idrogenazione avesse pure un'influenza sull'effetto dei composti e però abbiamo sperimentato in quest'anno la chinolina e la tetraidrochinolina; l'acido ftalico e il tetraidroftalico; il cimolo e il limonene. È risultato realmente che in primo luogo la tetraidrochinolina, $C_9H_{10}NH$, è più velenosa della chinolina, C_9H_7N, e che inoltre questa relazione viene confermata dalla comparazione dell'acido ftalico, $C_6H_4(COOH)_2$, col tetraidroftalico, $C_6H_8(COOH)_2$, e del cimolo, $C_{10}H_{14}$, col limonene, $C_{10}H_{16}$. Questi ultimi, per le catene laterali che contengono, avrebbero dovuto essere forse più dannosi, ma potrebbe darsi che la loro poca solubilità abbia impedito il manifestarsi dell'effetto completo. Non saranno inutili ulteriori esperienze in proposito.

Essendosi dimostrati molto velenosi gli indoli; la chinolina e l'isochinolina più velenose della piridina, era da esaminarsi se le basi a nucleo condensato fossero più velenose di quelle a nucleo semplice e però abbiamo sperimentato l'effetto dell'anilina, $C_6H_5NH_2$, con quello dell'α-naftilamina, $C_{10}H_7NH_2$. Quest'ultima si dimostrò infatti più venefica dell'anilina. L'azione dei nuclei condensati merita di essere ulteriormente esaminata per accertare, come nel caso dei derivati idrogenati, la ragione che la determina, non stando questi fatti in relazione colla presenza di catene laterali.

L'anno scorso avevamo osservato colla serie delle amine e poi comparando l'acido ossalico coll'acido succinico, che la lunghezza delle catene esercitava un'influenza sull'azione delle sostanze. A tale proposito questo anno abbiamo sperimentato alcuni termini della serie degli acidi grassi e precisamente gli acidi formico, acetico, propionico, butirrico, valerianico, isovalerianico, caprilico, laurinico e palmitico. Con essi l'influenza della lunghezza delle catene non potè essere confermata, perchè le piante che ricevettero i diversi trattamenti, pur avendo tutte uno sviluppo più limitato rispetto ai testimonî, non dimostrarono fra di loro differenze apprezzabili, forse perchè in questo caso non si tratta di sostanze alcaloidiche, che sono quelle che precipuamente esercitano un'azione venefica sulle piante.

L'anno scorso abbiamo osservato che la betaina o trimetilglicocolla, $COOH \cdot CH_2N(CH_3)_3OH$, è soltanto lievemente dannosa per le piante di fagiuoli, mentre per la sua analogia di struttura coi sali di tetrametilammonio, $(CH_3)_4N \cdot R$, che sono tossici, avrebbe dovuto manifestare un contegno analogo ad essi. Per spiegare la ragione di questa differente azione, abbiamo da principio supposto che la betaina fosse contenuta normalmente nelle piante di fagiuoli ed a ciò si dovesse attribuire la sua innocuità; ma le prove fatte sull'estratto di una notevole quantità di piante ci convinsero del contrario [1]. Non potendo invocare una simile spiegazione, abbiamo immaginato che l'influenza dei metili, da noi tante volte riscontrata, dipendesse

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. 29, I, pag. 416 (1920).

dall'indole della sostanza fondamentale in questione, e che se questa fosse completamente innocua e normalmente presente nelle piante, l'introduzione di metili o di radicali acidi potrebbe non determinare un'azione venefica: che in altri termini non fossero i radicali per se stessi dannosi, ma che servissero assai più ad esaltare l'effetto di sostanze più o meno nocive o estranee alle piante. Così, essendo la glicocolla, $COOH . CH_2NH_2$, innocua, similmente agli altri acidi amidati alanina e leucina, si capirebbe che lo sia pure la betaina. Le ulteriori esperienze fatte in questo senso confermarono la supposizione. Comparando i tre acidi cresilici o metilsalicilici, $C_6H_3(CH_3)(OH)COOH$, coll'acido salicilico, $C_6H_4(OH)(COOH)$, abbiamo trovato che essi sono lievemente tossici perchè quest'ultimo non è del tutto innocuo ed è estraneo alle piante di fagiuoli; invece l'acido dimetilpirroldicarbonico asimmetrico, $C_4(CH_3)_2(COOH)_2NH$, è innocuo come il pirrolcarbonico, $C_4H_3 . COOH . NH$; perchè il nucleo pirrolico, come è ben noto, non è estraneo alle piante, ma costituisce la parte essenziale della clorofilla. Peraltro la prova più stringente in favore di questa tesi l'abbiamo avuta comparando l'azione del glucosio, $C_6H_{12}O_6$, con quella del metilglucoside, $C_6H_{11}O_5 . OCH_3$, e del solfato potassico col metilsolfato potassico, $K(CH_3)SO_4$, che sono tutti e quattro innocui. L'azione dei derivati serve dunque a svelare quella dei composti fondamentali e se i primi non producono effetti dannosi, ciò significa che la sostanza fondamentale è del tutto innocua. Inversamente peraltro non si può dir sempre che sostanze le quali non manifestano effetti nocivi si mantengano innocue anche nei loro derivati metilati; così la xantina è innocua malgrado la velenosità della teobromina e della caffeina. La spiegazione di questo fatto apparentemente contraddittorio è compresa in quella più generale che noi crediamo possa servire a risolvere il problema fondamentale dell'influenza dei radicali sull'azione delle sostanze sulle piante. Si potrebbe ammettere che, come si fa nei laboratorî, le piante si servano di radicali alcoolici od acidi per rendere più resistenti all'ossidazione quei composti che contengono il gruppo ossidrilico, l'aminico e l'iminico in quelle sostanze di cui abbisognano e ne viene che, permanendo esse così nell'organismo, esercitino quell'azione che altrimenti verrebbe a mancare. Per averne la prova sperimentale abbiamo comparato la resistenza all'ossidazione impiegando la poltiglia di spinaci in presenza di ossigeno, di alcune coppie di sostanze già note per la loro diversa azione sulle piantine di fagiuoli e precisamente della pirocatechina in comparazione col guaiacolo; della morfina colla codeina; della teobromina colla caffeina e dell'atropina colla cocaina. I risultati corrisposero pienamente all'aspettativa, come dimostrano i numeri riportati nel seguente specchietto:

Sostanze	Introdotte	Ritrovate
Pirocatechina $C_6H_4(OH)_2$.	gr. 2	gr. 0,01
Guaiacolo $C_6H_4(OCH_3)(OH)$	» 2	» 1,2
Morfina $C_{17}H_{17}ON(OH)_2$	» 2	distrutta
Codeina $C_{17}H_{17}ON(OCH_3)(OH)$	» 2	gr. 1,32-1,40
Teobromina $C_5H_2(CH_3)_2O_2N_4$	» 2	» 0,44
Caffeina $C_5H(CH_3)_3O_2N_4$	» 2	» 1,92
Atropina $C_7H_{11}NCH_3(OC_9H_6O_2)$	» 2	» 0,52
Cocaina $C_7H_{10}NCH_3(OC_7H_5O)(COOCH_3)$. . .	» 2	» 1,07

Le prove tentate per inoculazione nel mais dettero risultati incerti, ma non sconcordanti coi precedenti per la troppo rapida ossidazione che ha luogo nelle piante vive e per certe difficoltà sperimentali che richiederanno prove ulteriori. Risulta dunque che realmente nei casi sperimentati le sostanze più dannose sono quelle che meglio resistono all'ossidazione enzimatica delle piante, ciò che può dirsi in modo abbastanza generale perchè le prove sono state fatte in condizioni diverse e cioè nei fagiuoli, nel mais e colle foglie di spinaci ridotte in poltiglia. Il problema della funzione degli alcaloidi nelle piante verrebbe così risolto e risolto per via chimica. Le piante avendo bisogno quali stimoli di certi alcaloidi, utilizzerebbero prodotti del loro ricambio, come ad esempio la xantina; ma affinchè possano resistere all'ossidazione o ad altri agenti eliminatori li trasformano opportunamente in composti più stabili introducendovi radicali alcoolici od acidi. Con ciò peraltro non deve credersi che la questione delle catene laterali sia completamente risolta; esse potranno avere anche qualche altro scopo, perchè vi sono sostanze contenenti nella molecola catene laterali, che vengono ossidate in ugual misura delle corrispondenti a catena normale, come abbiamo osservato confrontando il contegno dell'acido butirrico con quello dell'acido isobutirrico, sia colla boltiglia di spinaci, sia colle piante viventi di mais.

Per seguire un consiglio del nostro collega prof. Morini abbiamo voluto vedere se sostanze generalmente venefiche fossero innocue per specie affini a quelle che le contengono normalmente. Così l'eserina essendo contenuta nel *Physostigma venenosum*, che è una pianta affine al fagiuolo comune, poteva essere innocua per quest'ultima pianta. Abbiamo perciò comparato il contegno dell'eserina sui pomodori e sui fagiuoli; ma è risultato che essa è velenosissima per entrambe le specie. Questo fatto dimostrerebbe come soltanto piante che contengono un dato veleno sarebbero per esso immuni, come abbiamo dimostrato a suo tempo per la nicotina nel tabacco. Cogliamo questa occasione per mettere in rilievo che, a differenza di altre sostanze

più o meno dannose e tossiche, soltanto gli alcaloidi determinano fenomeni caratteristici che, come abbiamo esposto nelle nostre precedenti Note, consistono nell'apparire sulle foglie di bollosità, di macchie, di verruche e specialmente dell'albinismo, in modo che alle volte le pagine fogliari presentano un aspetto ornamentale.

Per ultimo pubblichiamo alcune osservazioni fatte a parecchie riprese sull'influenza del tannino in comparazione col pirogallolo. Il tannino, a differenza del pirogallolo, non determina un'azione venefica sulle diverse specie di piante da noi sperimentate, ciò che sta in buona armonia con analoghi fatti da noi riscontrati coi glucosidi ed in contrasto con la supposizione del dott. Bernardini (1). La sua azione, più che tossica, sembra limitarsi a produrre uno sviluppo deficiente in modo che le piante che hanno subìto il trattamento riescono più piccole, ma proporzionate in tutte le loro parti. Questa osservazione potrà forse avere un peso per giudicare della funzione che esercita il tannino nelle piante, ma per ora sarebbe prematuro esprimere delle congetture in proposito.

Anche questa volta esprimiamo assai volentieri alla signorina dott. Paolina Cicognari i nostri più vivi ringraziamenti per aver voluto con grande zelo prestarci il suo aiuto intelligente ed accurato.

Fisiologia. — *L'Anofele può propagare la malaria anche direttamente?* Nota del Socio B. Grassi.

Alcuni casi di malaria primitiva sviluppatisi quest'anno a Fiumicino, mi hanno fatto sorgere nell'animo *un grave sospetto del quale occorre al più presto accertare sperimentalmente la fondatezza o meno.*

La prova è stata già da me tentata a Fiumicino tre settimane fa sopra me stesso, ma casualmente gli anofeli non pungevano e così l'esperimento non ha potuto aver luogo. Era mia intenzione ritentarlo, ma riflettendo che se mi si sviluppassero le febbri, dovrei far uso di chinino aggravando forse le attuali condizioni, tutt'altro che buone, dei miei occhi, ho pensato di ricorrere a terze persone. Diventa perciò necessario ch'io renda di pubblica ragione il mio dubbio, ciò che faccio appunto colla presente Nota.

A Fiumicino avevamo la scorsa estate una quantità relativamente molto piccola di anofeli: l'intestino di oltre a duecento anofeli, quivi raccolti in varî giorni, si era dimostrato costantemente indenne da parassiti malarici. Oltre a ciò i casi di recidive malariche erano molto rari. Per tutte queste ragioni io mi ritenevo sicuro che nuove infezioni non si sarebbero sviluppate. Invece se ne ebbero alcune di cui tre mi hanno particolarmente impressionato.

(1) Rendiconti della Società chimica italiana, vol. V, pag. 278 (1913).

In una capanna di una zona di Fiumicino in cui non c'era alcun caso di recidiva, si sviluppò l'infezione primitiva (estivo-autunnale) in un bambino di pochi mesi.

Circa otto giorni prima era venuto a stare nella stessa capanna da Maccarese un giovanotto infetto della stessa forma. Evidentemente l'infezione attraverso gli anofeli non avrebbe potuto svilupparsi così rapidamente.

In una casetta abitava una donna infetta di terzana da circa dieci giorni, che si curava regolarmente. Due amici di famiglia venuti da Roma, che erano restati soltanto le prime ore della sera nella abitazione di questa donna, avevano passato il resto della notte sulla spiaggia del mare e alla sera del giorno seguente se ne erano tornati a Roma, dopo il solito periodo d'incubazione risultarono infetti essi pure di terzana.

Questi ed altri fatti dello stesso genere mi hanno portato a riflettere sopra la possibilità che la malaria si trasmetta oltre che per la via indiretta, ben nota, anche per via diretta quando un anofele, che ha cominciato a succhiare il sangue di un malarico, scacciato via vada a pungere un altro individuo sano. Non potrebbe darsi che questa seconda puntura fosse inizialmente accompagnata da un rigurgito del sangue malarico dell'ingluvie dell'anofele e che così avvenisse la trasmissione di germi malarici all'individuo sano?

Se ciò fosse possibile anche lo sviluppo delle estivo-autunnali primitive in assenza delle semilune si comprenderebbe senza dover ricorrere a quel polimorfismo, al quale io mi sono attaccato per non poter altrimenti spiegare tale fenomeno.

Per dimostrare se questo mio dubbio sia fondato o meno, l'esperimento è necessario ma è molto facile, come ognuno comprende, quando si ha un individuo non malarico disposto a sottoporvisi: bisognerà però forse operare in un ambiente caldo e servirsi di un individuo con molti parassiti nel sangue, facendolo pungere, s'intende, da anofeli non infetti, quali ognuno può facilmente procurarsi.

Nutro fiducia di potere già nella prossima seduta dar notizia di esperimenti di questo genere, che spero di poter iniziare domani stesso.

Non è d'uopo che io insista sull'importanza grandissima della questione. Sarò perciò lieto se anche altri vorrà occuparsene.

Pubblicato il giorno 3 gennaio 1921.

Fisiologia. — *Ricerche sulla ghiandola salivare posteriore dei Cefalopodi.* IV: *Attività secretiva della ghiandola in varie condizioni sperimentali* (1). Nota del Socio Filippo Bottazzi.

1. *Attività secretiva della ghiandola in situ.* — Legato l'animale, si taglia longitudinalmente il sacco, in cui la ghiandola normalmente è contenuta, e si tengono sollevati i lembi della membrana, in guisa che l'acqua respiratoria non possa entrarvi. Si recide il condotto escretore della ghiandola in prossimità del capo, e vi si fissa dentro la cannula di platino, che viene poi, mediante una pinza, assicurata a un sostegno e tenuta orizzontalmente, a livello del corpo dell'animale. Con un paio di eccitatori di platino, fissati a un altro sostegno, si stimola a intervalli convenienti il condotto escretore, e si raccoglie il secreto in un bicchierino tenuto sotto l'apertura della cannula.

Le stimolazioni provocano vivaci contrazioni del condotto escretore e dei corpi ghiandolari, ed emissione di secreto limpido, sebbene la ghiandola non sia immersa nè in sangue, nè in acqua di mare, finchè la circolazione per l'organo si compie normalmente. Ma se con due pinze si stringe, da ambo i lati, il tessuto per cui passano le arterie ghiandolari, la secrezione dopo poco cessa, sebbene a ogni stimolazione continuino a contrarsi il condotto escretore e i corpi ghiandolari.

La stimolazione elettrica dei brevi legamenti, ai quali i corpi ghiandolari sono sospesi, non provoca nè contrazione nè emissione di secreto.

La stimolazione diretta dei corpi ghiandolari provoca debole contrazione di essi, ma non secrezione.

Durante questi esperimenti, si possono raccogliere fino a 2 e più cm^3 di secreto.

Questi esperimenti dimostrano, che *normalmente il sangue, onde la ghiandola attinge il liquido per la secrezione, è quello arterioso che le giunge per le due arterie ghiandolari,* e che *le fibre nervose motrici e secretrici le giungono esclusivamente per i nervi decorrenti lungo il condotto escretore.*

In questi esperimenti sulla ghiandola *in situ*, se si ha cura che la respirazione artificiale riesca sufficiente per assicurare una buona ossigenazione del sangue e che le stimolazioni si seguano a intervalli convenienti, il

(1) Ricerche eseguite nel Laboratorio di Fisiologia della Stazione zoologica di Napoli.

secreto continua a sgorgare limpido dall'organo per un tempo notevolmente lungo.

2. *Ricerche sull'attività secretiva della ghiandola separata dal corpo dell'animale e immersa in sangue, o in acqua di mare, o in soluzione isosmotica di cloruro sodico.* — Come ho già accennato nelle mie precedenti pubblicazioni, la « ghiandola salivare posteriore » dell' *Octopus macropus* può funzionare benissimo anche fuori dal corpo dell'animale, purchè sia tenuta immersa in sangue, o in acqua di mare, o meglio in sangue diluito in proporzioni variabili con acqua di mare. In queste condizioni, la ghiandola rimane eccitabilissima per più ore di seguito. Poichè il secreto, che essa fornisce, ha una pressione osmotica eguale o di poco superiore a quella del sangue o dell'acqua di mare, bisogna ammettere che le sue cellule, durante l'eccitamento, siano permeabili non solo per l'acqua, ma anche per i sali normalmente contenuti nel liquido esterno.

Emocianina non si trova mai nel secreto. Infatti, questo, non solo non è mai colorato in azzurro, ma non coagula nemmeno quando è riscaldato fino all'ebollizione. Il segreto, bollito, diventa più o meno opalescente, ma non coagula, cioè non vi appariscono granuli o fiocchi visibili a occhio nudo. Siccome l'emocianina coagula facilmente, quando il liquido che la contiene è riscaldato, anche a temperatura notevolmente inferiore a quella della ebollizione, se essa fosse presente nel secreto, la si potrebbe facilmente scoprire con questo mezzo. Le sostanze proteiche del secreto, precipitabili con 3-4 volumi di alcool a 76 %, derivano probabilmente dal citoplasma delle cellule ghiandolari, forse anche dalle cellule di rivestimento dei tuboli escretori, ma non dal sangue. Infatti, il secreto le contiene approssimativamente nella stessa quantità, anche quando è emesso da ghiandole immerse in acqua di mare.

In soluzione di solo cloruro sodico 3,5 %, la ghiandola rimane pure eccitabile per parecchio tempo: si contrae, quando è stimolata, e secerne. Parecchi esperimenti mi hanno dimostrato, però, che, per conservare l'eccitabilità dell'organo, conviene non lavarlo molte volte con soluzione di cloruro sodico, cioè lasciare in esso quella piccola quantità di sangue che normalmente contiene negli spazi intertubolari, o aggiungere un po' d'acqua di mare alla soluzione di cloruro sodico.

Questo fatto è di notevole importanza, perchè per varî esperimenti è utile che la ghiandola sia immersa, non in sangue, nè in acqua di mare, ma in un liquido, non solo privo di emocianina, ma anche della maggior parte dei sali di calcio, di magnesio ecc., onde è ricca l'acqua di mare.

3. *Decorso delle arterie ghiandolari. Impermeabilità della ghiandola per i colori di anilina.* — Per scoprire il decorso delle arterie ghiandolari e delle loro ramificazioni nella ghiandola, ho fatto iniezioni di soluzioni di azzurro di metilene, di rosso neutro e di altre sostanze coloranti per l'aorta dorsale, nella direzione verso il capo, dopo aver introdotto una cannulina di

vetro a T nel detto vaso, mentre tenevo stretto con una pinza il moncone distale di esso, e allacciate con una solida cordicina in un fascio le braccia dell'animale alla loro radice cefalica. Il più delle volte, le arterie ghiandolari rimasero bene iniettate, e potetti constatare che esse decorrono prima sulla parete interna del corpo, e poi passano per i legamenti ai quali i corpi ghiandolari sono sospesi. La ghiandola stessa si colora in azzurro o in rosso, a chiazze, e talora anche diffusamente, alla superficie.

Fatti esperimenti di stimolazione del condotto in ghiandole così iniettate *in situ*, ho osservato che *le sostanze coloranti non passano mai nel secreto, nemmeno quando si adoperano colori intravitali.* Ho potuto poi confermare *la assoluta impermeabilità della parete dei tuboli ghiandolari per l'azzurro di metilene, la tionina, il rosso neutro, il rosso Congo e la safranina,* con esperimenti nei quali tenevo la ghiandola estirpata immersa in sangue dello stesso animale, in acqua di mare o in soluzione 3,5 % di Na Cl, cui aggiungevo questa o quella sostanza colorante.

Come, dunque, la membrana tubolare è impermeabile per l'emocianina, così pure impermeabile è per i colori d'anilina sperimentati, che dànno tutti, come si sa, soluzioni colloidali. Queste sostanze coloranti sono facilmente precipitate dalle soluzioni elettrolitiche, specie alla concentrazione in cui gli elettroliti si trovano nel sangue dei Cefalopodi e nell'acqua di mare. Questa mi sembra almeno una delle cause per cui le dette sostanze coloranti non penetrano nelle cellule ghiandolari e non passano nel secreto.

4. *Influenza della quantità di liquido, in cui la ghiandola è immersa, sull'attività secretiva di essa.* — Sulla ghiandola salivare dell'*Octopus macropus* possono essere, in certo modo, riprodotte le condizioni di aumentato e diminuito afflusso del sangue, che nella ghiandola sottomascellare dei mammiferi producono la stimolazione della corda del timpano e rispettivamente quella del simpatico cervicale, facendo variare il volume di sangue o di acqua di mare in cui si tiene immerso l'organo durante l'esperimento.

Se la ghiandola è lasciata completamente all'asciutto o è tenuta immersa in pochissimo sangue, per quanto eccitabile essa siasi prima dimostrata, durante le stimolazioni, *si contrae energicamente, ma non dà nemmeno una goccia di secreto.* Basta rimettere nella celletta il sangue o l'acqua di mare, perchè essa torni ad emettere secreto durante ogni stimolazione. E se si aumenta gradatamente la quantità di liquido, in cui è immersa, si osserva che la quantità di secreto, che essa dà a ogni stimolazione, è approssimativamente proporzionale all'estensione della sua superficie bagnata dal liquido. La massima quantità di secreto essa dà solo quando è tutta immersa, cioè quando ogni parte della sua superficie è bagnata dal liquido. La ghiandola secrega con la sua parte immersa. Essa funziona, in certo modo, come una pompa munita di un sistema valvolare: assorbe liquido da un lato, e lo riversa come secreto nel lume dei tuboli ghiandolari. E mentre

il liquido passa attraverso le cellule, trascina seco le sostanze specifiche da esse elaborate.

Se la ghiandola è immersa in sangue, durante l'esperimento, siccome l'emocianina non passa nel secreto, col tempo la pressione osmotica del sangue aumenta, per effetto dell'aumento di concentrazione dell'emocianina; e allora l'attività secretiva dell'organo s'illanguidisce, perchè esso deve fare un lavoro osmotico sempre maggiore per sottrarre liquido al sangue in cui è immerso. Ciò spiega *l'azione restauratrice che sulla funzione della ghiandola esercita il cambiamento del sangue, o la diluzione di esso con acqua di mare.*

5. *Se sia necessaria la presenza di componenti specifici del sangue, nel liquido in cui la ghiandola è immersa, perchè essa continui a funzionare.* — Da ricerche di Demoor [1] risulterebbe, che condizione della funzione secretiva della ghiandola sottomascellare del cane irrorata con soluzione salina fisiologica sia la presenza in questa di una certa quantità di siero del sangue, cioè di qualche componente di esso mancante alla soluzione salina artificiale.

Negli esperimenti sulla ghiandola dell'*Octopus*, il liquido in cui essa è immersa tiene il posto del liquido d'irrorazione delle ghiandole dei Mammiferi.

Fortunatamente, l'acqua di mare è una « soluzione salina fisiologica » per la detta ghiandola. Si può quindi lavare l'organo estirpato con acqua di mare un numero grandissimo di volte, senza danneggiarlo. Ma lavarlo semplicemente alla superficie non basta. Occorre eliminare il sangue che si trova negli spazî intertubolari, e per ottenere ciò, bisogna stimolare l'organo più volte, a intervalli, e cambiare l'acqua di mare dopo ciascuna stimolazione, perchè soltanto durante la contrazione dei tuboli gli spazî intertubolari si dilatano, e acqua viene succhiata in essi, per esserne poi di nuovo espulsa durante il successivo rilassamento. Se le stimolazioni sono brevi, d'intensità liminare (magari subliminare, per quanto concerne l'eccitabilità secretiva, perchè per raggiungere il detto scopo basta provocare la contrazione dell'organo, non l'emissione di secreto), e fatte a intervalli convenienti per non affaticare la ghiandola, si può giungere a eliminare, se non tutto, assolutamente, di certo la massima parte del sangue contenuto negli spazî capillari intertubolari.

Molte ricerche di questo genere mi hanno dimostrato, che *la ghiandola può continuare a contrarsi e a secernere per molto tempo, anche quando nell'acqua di mare, in cui è immersa, non c'è più quasi traccia di sangue.* Sulla ghiandola salivare posteriore dell'*Octopus*, quindi, non ho potuto confermare i risultati ottenuti da Demoor sulle ghiandole salivari del cane.

[1] J. Demoor, *Rôle du sérum sanguin au point de vue de la sécrétion salivaire* Arch. intern. de Physiol., X, pag. 377, 1911; Idem, *A propos du mécanisme de la sécrétion salivaire* (3me Note): *Action de la pilocarpine.* Arch. intern. de Physiol, XII, pag. 52, an. 1912; Idem, *Le mécanisme intime de la sécrétion salivaire.* Arch. intern. de Physiol. XIII, pag. 187, an. 1913.

Meccanica. — *Sulle equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili.* Nota di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Il signor W. Stekloff, in una sua lunga Memoria [1], ha stabilito, mediante calcoli lunghi e notevolmente complicati, le equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente una cavità riempita da liquido viscoso ma *incompressibile.* Equazioni analoghe erano state già trovate, per altra via, dal prof. V. Volterra [2] nel caso di un sistema costituito da un solido e da un liquido omogeneo che può supporsi riempire una cavità del solido.

In questa Nota, partendo dall'equazione intrinseca del moto attorno ad un punto fisso di un sistema qualunque semirigido [3], riesco a dedurre con estrema semplicità le equazioni relative al *caso più generale* di un solido avente un numero qualunque di cavità, di forma qualunque, riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili.

1. *Equazioni del moto di un sistema semirigido qualunque.* — Un sistema materiale (S), costituito da una parte rigida e da una parte non rigida comunque distribuita, possa ruotare attorno ad un punto fisso O. Rispetto ad O sia α l'omografia d'inerzia della parte rigida, $\mathbf{M}$ il momento dell'impulso dovuto al moto della parte non rigida, $\mathbf{M}_e$ il momento delle forze esterne o che si possano considerare come tali, Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione di tutto il sistema. Per il 2° teorema dell'impulso, l'equazione intrinseca del moto di (S) può scriversi, indicando con apici le derivate rispetto al tempo t,

$$(1) \qquad (\alpha\Omega + \mathbf{M})' = \mathbf{M}_e \,.$$

[1] W. Stekloff, *Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes.* (Annal. de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, tome I, 1909).

[2] V. Volterra, *Sur la théorie des variations des latitudes.* (Acta Mathem., t. XXII, 1899).

[3] O. Lazzarino: (a) *Rappresentazione cinematica della rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionari.* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, pag. 109, 1917); b) *Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione nel quale sussistono dei moti interni variabili.* (Ibid., pag. 233).

Se $\mathbf{M}'_s$, $\mathbf{M}'_r$ sono rispettivamente i vettori della velocità di trascinamento e relativa di $\mathbf{M}$, si ha $\mathbf{M}' = \mathbf{M}'_s + \mathbf{M}'_r = \Omega \wedge \mathbf{M} + \mathbf{M}'_r$ e quindi la (1) può scriversi ancora, ricordando che $(\alpha\Omega)' = \alpha\Omega' + \Omega \wedge \alpha\Omega$, sotto la forma

$$\alpha\Omega' + \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}) + \mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_e . \tag{2}$$

L'equazione del moto sotto la forma (1) o (2) comprende evidentemente tutti i casi particolari nei quali si facciano particolari ipotesi sulla distribuzione e sulla natura della parte non rigida. Se questa ha moti stazionarî la (2) si semplifica essendo in tal caso $\mathbf{M}'_r = 0$ [v. l. c. (a)].

2. *Caso dei liquidi viscosi.* — Il sistema (S) sia costituito da un corpo rigido e da masse fluide viscose, di densità diversa, che riempiano un certo numero h di cavità del solido. Le forze esterne applicate alla parte solida siano tali che le forze agenti nei punti P delle masse fluide risultino derivanti da un potenziale U, funzione dei punti, che ammetta il gradiente. Allora il momento $\mathbf{M}_e$ può considerarsi come risultante dei due momenti $\mathbf{M}_1$ ed $\mathbf{M}_2$, di cui $\mathbf{M}_1$ si riferisce alle forze applicate alla parte rigida, ed $\mathbf{M}_2$ alle forze agenti nei punti P delle masse fluide. Indicando con $\tau_1 \ldots \tau_h$ gli spazi delle h cavità e con $U_1, \ldots U_h$ i potenziali delle forze agenti nei punti delle rispettive masse fluide, si può scrivere, per le ipotesi fatte,

$$\mathbf{M}_2 = -\sum_1^h \int_\tau \operatorname{grad} U \wedge (P - O) \, . \, d\tau . \tag{3}$$

Allora, se $\mathbf{M}$ è il momento dell'impulso rispetto ad O dovuto al moto di tutte le masse fluide, la (2) permette di scrivere immediatamente l'equazione del moto del sistema e si ha

$$\alpha\Omega' + \Omega \wedge (\alpha\Omega + \mathbf{M}) + \mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_1 - \sum_1^h \int_\tau \operatorname{grad} U \wedge (P - O) \, . \, d\tau . \tag{4}$$

Le equazioni (163) dello Stekloff [v. l. c. (1), pag. 82], trovate con procedimento affatto diverso e quanto mai lungo e scabroso, sono un *caso particolare* della (4) da cui si deducono per $h = 1$ e considerando un solo fluido viscoso ed *incompressibile*.

Indicando con $\mathbf{T}$ l'energia cinetica della parte rigida ed osservando che è $\operatorname{grad}_\Omega \mathbf{T} = \alpha\Omega$, la (4) assume la forma

$$(\operatorname{grad}_\Omega \mathrm{T})' + \Omega \wedge \mathbf{M} + \mathbf{M}'_r = \mathbf{M}_1 - \sum_1^h \int_\tau \operatorname{grad} U \wedge (P - O) \, . \, d\tau . \tag{5}$$

La (5) è del tipo Lagrange-Liouville e, per il caso di una cavità riempita da liquido omogeneo ed incompressibile, equivale alle equazioni trovate, per altra via, dal prof. Volterra [l. c. (2), pp. 309 e 310].

Ma per la soluzione del problema la (4) o (5) non è sufficiente, occorre ancora stabilire le condizioni ai limiti e nell'interno delle masse fluide.

3. *Condizioni ai limiti.* — Trattandosi di liquidi viscosi, esistono sulle pareti interne delle cavità delle forze di attrito le quali, come dimostra la esperienza, dipendono dalla viscosità del liquido e dalla natura delle pareti e sono dirette nei singoli punti di contatto secondo la velocità relativa di uno dei corpi rispetto all'altro. Indicando perciò con P un punto di contatto, con P'_r la sua velocità relativa, con $\mathbf{a}$ il vettore della forza di attrito in P e prescindendo da particolari ipotesi sulla *grandezza* di questa forza, sulla quale grandezza sono fra loro discordi le varie teorie, si può scrivere, se m è il rapporto fra i moduli di $\mathbf{a}$ e di P'_r,

$$\mathbf{a} = -mP'_r. \tag{6}$$

Ciò premesso, per la determinazione delle condizioni ai limiti basta esprimere che nei punti di contatto le forze di attrito fanno equilibrio alla pressione del fluido.

Se, quindi, $\mathbf{F}_n$ è il vettore di questa pressione in un punto P della superficie interna σ di una delle cavità, $\mathbf{F}_t$ la componente di questa pressione secondo il piano tangente in P a σ, $\mathbf{n}$ un vettore unitario normale in P a σ e diretto verso l'esterno della cavità, si ha

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{F}_n - \mathbf{F}_n \times \mathbf{n} \, . \, \mathbf{n} \, . \tag{7}$$

Allora, la *prima condizione ai limiti* può scriversi

$$\mathbf{F}_t = mP'_r, \tag{8}$$

mentre la *seconda* è evidentemente data dalla relazione

$$P'_r \times \mathbf{n} = 0 \tag{9}$$

la quale esprime che « *la velocità relativa delle masse fluide nei punti di contatto è tutta tangenziale* ».

4. *Condizioni nei punti interni delle masse fluide.* — Deve anzitutto sussistere l'equazione di continuità che notoriamente può scriversi [1]

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} P' = 0 \tag{10}$$

dove P' è la velocità assoluta della particella fluida che al tempo t occupa la posizione P e la densità ϱ del fluido si suppone funzione del tempo.

Inoltre è noto che, se in un punto P interno ad un fluido viscoso in moto $\mathbf{F}$ è il vettore della forza riferità all'unità di massa e p l'intensità della pressione specifica unitaria relativa allo stato di equilibrio, il vettore P'

[1] Cfr. C. Burali Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* [ediz. 1912, parte II, pag. 62 (3)]. Questo testo sarà indicato in seguito con la sigla AVG.

deve soddisfare alla condizione [AVG, II, pag. 62 (2)]

$$\frac{dP'}{dt} = F - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\,\mathrm{grad\,div}\,P' + \nu\Delta' P' = \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{dP'}{dP}\,P' \tag{11}$$

dove, essendo μ il coefficiente di viscosità, si ha $\nu = \mu/\varrho$, $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$.

Nel caso del *fluido incompressibile* l'equazione di continuità è $\mathrm{div}\,P' = 0$ e la (11) si scrive

$$\frac{dP'}{dt} = F - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta' P' = \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{dP'}{dP}\,P'. \tag{12}$$

Se le forze derivano da un potenziale U, osservando ancora che è (AVG, I, pag. 95)

$$(dP'/dP)\,P' = (1/2)\,\mathrm{grad}\,P'^2 + (\mathrm{rot}\,P') \wedge P',$$

la (11) può anche scriversi

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,P'^2 + (\mathrm{rot}\,P') \wedge P' = -\,\mathrm{grad}\left[U + \int\frac{dp}{\varrho}\right] + \nu\Delta' P' + \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\,\mathrm{grad\,div}\,P'. \tag{13}$$

Applicando ad ambo i numeri della (13) l'operatore *rot* si ha per i liquidi viscosi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{rot}\,P'}{\varrho}\right) = \frac{dP'}{dP}\left(\frac{\mathrm{rot}\,P'}{\varrho}\right) + \nu\Delta'(\mathrm{rot}\,P') \tag{14}$$

che è l'equazione analoga a quella di Helmholtz per i liquidi perfetti (AVG, II, pp. 59 e 62).

Riepilogo. — Se le cavità del solido sono riempite da liquidi viscosi le cui densità variano solo col tempo, le equazioni del problema son date dalla (4) o (5), che caratterizza il moto di tutto il sistema, dalle condizioni (8) e (9) ai limiti, e dalle (10) e (11) che definiscono i moti delle masse fluide nelle rispettive cavità. Se inoltre le densità dei fluidi dipendono dalla pressione, allora son necessarie delle ipotesi complementari che diano la legge di variazione della densità col variare della pressione.

Nel caso più generale di un sistema costituito da un nucleo solido ricoperto da liquido viscoso incompressibile e contenente nel suo interno delle cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse ecc., alle equazioni precedenti occorre aggiungere la condizione $p = \mathrm{cost.}$ che deve essere soddisfatta alla superficie libera del fluido viscoso che ricopre il nucleo solido.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali:*

$$\int_a^l \vartheta(x)\, x^n\, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nota di Carlo Severini, presentata dal Corrisp. O. Tedone.

L'inesistenza di una soluzione effettiva [1] delle equazioni integrali:

$$(1) \qquad \int_a^b \theta(x)\, x^n\, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

oggetto, com'è noto, di numerose ricerche [2], è qui stabilita in modo diretto, semplicissimo. Ciò ha particolare importanza per lo sviluppo della teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali: sussiste infatti il seguente teorema, del quale è nota parimenti una dimostrazione diretta, elementare.

Affinchè il sistema delle funzioni ortogonali rispetto alla funzione caratteristica $p(x)$:

$$V_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

sia chiuso, è necessario e sufficiente che l'equazione di chiusura, ad esso relativa:

$$\int_a^b p(x)\,[f(x)]^2\, dx = \sum_0^\infty {}_k A_k^2 \quad , \quad A_k = \int_a^b p(x)\, f(x)\, V_k(x)\, dx,$$

[1] Una soluzione delle (1), sommabile insieme col suo quadrato, si dice *effettiva*, se è diversa da zero in punti di (a, b), costituenti un insieme di misura non nulla, o, brevemente, se non è *quasi dappertutto* uguale a zero.

[2] Cfr. Lerch: *a*) *O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících* [Rozpravy české Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění v Praze, II, Kl., Bd. I (1892). n. 33, S. 1-7]: *b*) *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel* [Acta Mathematica, Bd. XXVII (1903), S. 346-347]; Phragmén, *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions* [Acta Math., Bd. XXVIII (1904), S. 361-363]; Stieltjes, *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes* [Bd. II (Paris, 1905), pp. 337-339]; Landau, *Ueber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion* [Rendiconti del Circolo matem. di Palermo, tomo XXV (1908), pp. 343-345]; Moore, *On certain Constants analogous to Fourier's Constants* [Bulletin of the american mathematical Society (New York, May, 1908)]; Stekloff, *Sur la théorie de fermature des sistèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables* [Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de St. Pétersbourg, classe physico-mathématique, vol. XXX, n. 4 (1911), pag. 25]; Severini, *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali* [Rendic. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVI (1913), pp. 16-17]; Cipolla, *Sui sistemi di funzioni ortogonali che ammettono un sistema complementare finito* [Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli (1915), pag. 13].

sia soddisfatta da tutte le funzioni di un sistema di funzioni:

$$\varphi_i(x) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

sommabili insieme coi loro quadrati, e tali che non esistano soluzioni effettive per le equazioni integrali:

$$\int_a^b \theta(x)\, \varphi_i(x)\, dx = 0 \ (1) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

1. Escludiamo dapprima l'esistenza di una soluzione continua, non nulla, delle equazioni (1).

Ammesso che una tale soluzione possa esistere, s'indichi con $\theta_1(x)$. Sia (x_1, x_2) un intervallo, interno all'intervallo (a, b), nel quale la $\theta_1(x)$ si mantenga di uno stesso segno ed in valore assoluto maggiore di una quantità $m > 0$. Se si pone:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(b - a)^2},$$

risulta:

$$\begin{aligned} &\varphi(x) > 1 && (x_1 < x < x_2), \\ &0 < \varphi(x) < 1 && (a \leqq x < x_1 \ ; \ x_2 < x \leqq b). \\ &\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 1. \end{aligned}$$

Se ne deduce:

$$\lim_{n=\infty} \left| \int_{x'_1}^{x'_2} \theta_1(x)\, [\varphi(x)]^n\, dx \right| = +\infty, \qquad (x_1 < x'_1 < x'_2 < x_5),$$

e quindi a maggior ragione:

$$\lim_{n=\infty} \left| \int_{x_1}^{x_2} \theta_1(x)\, [\varphi(x)]^n\, dx \right| = +\infty,$$

mentre per ogni n si ha:

$$\left| \int_a^{x_1} \theta_1(x)\, [\varphi(x)]^n\, dx \right| + \left| \int_{x_2}^b \theta_1(x)\, [\varphi(x)]^n\, dx \right| \leqq M(b - a - x_2 + x_1),$$

M essendo il massimo valore assoluto della $\theta_1(x)$ nell'intervallo (a, b). Non può dunque essere:

$$\int_a^b \theta_1(x)\, [\varphi(x)]^n\, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

(1) Cfr. Severini, loc. cit. (2), pp. 18-19. Cfr. anche Lauricella, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXI, serie 5a (1° sem. 1912), pp. 682-683].

come dovrebbe invece verificarsi, se $\theta_1(x)$ fosse una soluzione effettiva delle (1).

2. Dopo quanto precede è facile dimostrare, che non può nemmeno esistere per le (1) una soluzione sommabile insieme col suo quadrato, la quale non sia quasi dappertutto uguale a zero. Nell'ipotesi contraria, indicando con $\theta_2(x)$ questa soluzione, pongasi:

$$\Phi(x) = \int_a^x \theta_2(x)\, dx \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Si ha:

$$\int_a^b \theta_2(x)\, x^n\, dx = [x^n \Phi(x)]_a^b - n \int_a^b \Phi(x)\, x^{n-1}\, dx \qquad (n = 1, 2, ...),$$

e poichè:

$$\Phi(a) = \Phi(b) = 0,$$

risulta:

$$\int_a^b \Phi(x)\, x^{n-1}\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, ...).$$

La $\Phi(x)$ è dunque una soluzione continua delle (1), e deve aversi (§ 1) identicamente:

$$\Phi(x) = 0;$$

quindi:

$$\Phi'(x) = 0.$$

Poichè quasi dappertutto risulta [1]:

$$\Phi'(x) = \theta_2(x),$$

il teorema è senz'altro dimostrato.

Matematica. — *Su due proposizioni di J. W. Lindeberg e E. E. Levi, nel Calcolo delle variazioni.* Nota I di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

J. W. Lindeberg [2] ha dimostrato, per gli integrali in forma parametrica

(1) $$I_C = \int_C F(x, y, x', y')\, dt$$

del Calcolo delle variazioni, la seguente notevole proposizione:

[1] Cfr. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, pag. 125 [Paris, Gauthier-Villars (1904)].

[2] *Ueber einige Fragen der Variationsrechnung* [Mathemat. Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 340-354].

« Se C_0 è una curva, aperta e priva di punti multipli, dotata ovunque di tangente e curvatura, sempre variabili in modo continuo, sulla quale siano soddisfatte, in senso stretto, le note condizioni di Legendre e Weierstrass, scelti comunque due numeri positivi ε e ε', si può determinarne un altro ϱ in modo che sia sempre $I_C > I_{C_0}$, per ogni curva ordinaria [1] C avente gli stessi estremi della C_0, appartenente tutta all'intorno (ϱ) di questa curva e soddisfacente, inoltre, alla condizione [condiz. a)] che risulti maggiore di ε la lunghezza complessiva dei suoi archi in ogni punto dei quali la tangente alla curva forma un angolo maggiore di ε' con la tangente alla C_0 nel piede della normale condotta, per il punto stesso, alla C_0 ».

Necessitandomi, per certe mie ricerche, una estensione di tale teorema, sono stato condotto a confrontarlo con un'altra proposizione, da me stabilita altrove [2] e che qui riproduco:

« Se C_0 è una curva continua e rettificabile, aperta e priva di punti multipli, e I_C è un integrale (1) *regolare*, scelto comunque un numero positivo δ, è possibile di determinarne un altro ϱ in modo che sia sempre $I_C - I_{C_0} > \varrho$, per ogni altra curva C, continua e rettificabile, appartenente propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 [3] e soddisfacente, inoltre, alla condizione [condizione α)] $L - L_0 \geq \delta$, dove L e L_0 indicano le lunghezze delle curve C e C_0, rispettivamente ».

E poichè ho potuto constatare che le due condizioni a) e α) risultano equivalenti, quando siano ambedue portate sulle curve C_0 e C del teorema del Lindeberg, sono stato indotto a cercare di superare la difficoltà che, nell'estensione di tale teorema a curve C_0 non aventi ovunque tangente e curvatura variabili in modo continuo, presenta la formulazione stessa della condiz. a), col sostituire a questa condizione quella α). Sono così pervenuto alla seguente proposizione generale [4]:

« Se C_0 è una curva continua e rettificabile, aperta e priva di punti multipli, e in ogni suo punto (x_0, y_0) in cui esista la tangente alla curva stessa è

$$E(x_0, y_0 \; ; \; \cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0 \; ; \; \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) > 0,$$

per tutti i θ tali che $\theta - \theta_0$ sia distinto da zero e da un multiplo intero

[1] Composto cioè di un numero finito di archi, aventi ovunque tangente variabile in modo continuo.

[2] *Sul caso regolare nel Calcolo delle variazioni* [Rend. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXV (1° sem. 1913)].

[3] Intendo con ciò che la C appartenga tutta all'intorno (ϱ) della C_0 ed abbia i suoi estremi distanti meno di ϱ dagli estremi corrispondenti di questa curva.

[4] Per la dimostrazione di questa e delle altre proposizioni contenute nella presente Nota, rimando al 1° volume dei miei *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*, dei quali si sta ora iniziando la stampa presso la Casa Editrice Zanichelli.

di 2π. — E essendo la nota funzione di Weierstrass del Calcolo delle variazioni, e θ_0 l'angolo che la direzione positiva della tangente alla curva C_0 forma con quella positiva dell'asse x — mentre per ogni altro punto (x_0, y_0) della C_0, in cui manchi la tangente, si può determinare un angolo $\tilde{\theta}_0$ (non necessariamente sempre lo stesso) tale che sia

$$E(x_0, y_0 \; ; \cos\tilde{\theta}, \operatorname{sen}\tilde{\theta}_0 \; ; \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) > 0,$$

per tutti i θ per i quali $\theta - \tilde{\theta}_0$ è distinto da zero e da un multiplo intero di 2π;

scelto ad arbitrio un numero positivo δ, è sempre possibile di determinarne altri due ε e ϱ in modo che, per ogni curva continua e rettificabile C, appartenente propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 e soddisfacente alla disuguaglianza $L - L_0 \geq \delta$ — L e L_0 essendo le lunghezze delle C e C_0 — si abbia $I_C - I_{C_0} > \varepsilon$ ».

È degno di rilievo il fatto che in questo teorema, a differenza da quello del Lindeberg, *non* si ammette l'ipotesi che, sulla C_0, sia verificata la condizione di Legendre in senso stretto; inoltre, il teorema è dato per *tutte* le curve C che appartengono propriamente all'intorno (ϱ) della C_0, *abbiano esse o no* gli stessi estremi di tale curva.

Osserverò ancora che se, invece delle curve C appartenenti *propriamente* all'intorno (ϱ) della C_0, si considerano soltanto quelle curve C che appartengono *ordinatamente* all'intorno detto [1], allora nell'ultimo enunciato può senz'altro sopprimersi la condizione che la C_0 sia aperta e priva di punti multipli.

Alla proposizione data più sopra può aggiungersene un'altra.

« Se

$$J_C = \int_C G(x\, y\, x'y')\, dt$$

è un altro integrale del tipo (1) e si indicano con F_1 e G_1 i noti invarianti di Weierstrass relativi alle funzioni F e G [2], ed esiste un numero positivo m tale che, in tutti i punti di un intorno di una data curva C_0, continua e rettificabile, aperta e priva di punti multipli, si abbia sempre $F_1(x, y, x', y') \geq m\, G_1(x\, y\, x'y')$, per qualsiasi coppia $(x'y')$, senza però che in nessun punto $(x\, y)$ l'uguaglianza fra i due membri valga per tutte le coppie $(x'y')$, scelto ad arbitrio un numero positivo δ, è sempre possibile

[1] Vale a dire, quelle curve che possono porsi in corrispondenza biunivoca ordinata e continua con la C_0, in modo che la distanza fra due punti corrispondenti risulti sempre minore di ϱ.

[2] È $\quad F_1 \equiv \frac{1}{y'^2} F_{x'x'} \equiv -\frac{1}{x'y'} F_{x'y'} \equiv \frac{1}{x'^2} F_{y'y'} \quad ; \quad G_1 \equiv \ldots,$

di determinarne altri due, ϱ ed ε, così che, per ogni curva C appartenente propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 e soddisfacente alla disuguaglianza $J_C - J_{C_0} \geq \delta$, si abbia $I_C - I_{C_0} > \varepsilon$ ».

Anche per questa proposizione la condizione che la C_0 sia aperta e priva di punti multipli si può sopprimere completamente se ci si limita à considerare soltanto le curve C che appartengono ordinatamente all'intorno (ϱ) della C_0.

Vulcanologia. — *L'unità del sistema Vulsinio.* Nota di VENTURINO SABATINI, presentata dal Socio CARLO VIOLA.

Il sistema Vulsinio è costituito principalmente di due crateri contigui, quello di Latera di grandi dimensioni, e quello di Bolsena di dimensioni eccezionali e che non trovano riscontro in nessun altro cratere d'Europa. Molte altre bocche di minore importanza, alcune tuttora riconoscibili altre presunte, alcune centrali altre periferiche completano il sistema.

È noto che tra gli argomenti che servirono a sostenere la non cratericità della Conca di Bolsena fu messa la variabilità dei materiali che la circondano, mentre avrebbe dovuto bastare il loro esame ad occhio nudo e la determinazione della loro successione per fare almeno sospettare, se non per dedurre con sicurezza, che le loro variazioni quando superano limiti molto ristretti sono avvenute *nel tempo* e non già *nello spazio*. E sarebbe stato agevole estendere tale conclusione a tutto il sistema deducendone la sua *unità*, sia pure come semplice ipotesi che solo uno studio petrografico approfondito avrebbe potuto verificare.

Va rilevato che nei Cimini con un simile studio non fu possibile dedurre l'unità del sistema perchè le variazioni della composizione mineralogica sono avvenute anche nello spazio. Ma, sapendosi che esse dipendono dalle condizioni della cristallizzazione e quindi possono al pari di queste essere molto estese e mascherare la ristrettezza delle variazioni dei magmi elementari, con la determinazione di questi ultimi si potevano eliminare le influenze estranee ai focolari. Disgraziatamente le incertezze che ancora regnano nelle teorie magmatiche hanno lasciato dei dubbii serii sui risultati ottenuti (1). Invece nel sistema Vulsinio, malgrado le forme esterne più complesse e molto più estese, si può arrivare a conclusioni più sicure e forse più semplici, poichè le variazioni petrografiche dei materiali contemporanei sono piccole ed è possibile potersi basare su di esse essendo piccole *a fortiori* le variazioni magmatiche, i calcoli delle quali, se non saranno di osta-

(1) V. Sabatini, *Vulcani Cimini*. Mem. Carta Geol. d'It., XV, 258 e ultimo capitolo.

colo le loro incertezze, potranno confermare, forse semplificare ancora più, queste conclusioni, ma non contradirle.

In tutta la regione Vulsinia, dalla Paglia al Traponzo e alla Vezza, dalla Fiora al Tevere, ove si eccettuino taluni punti periferici, si trovano costantemente le leucotefriti basiche coi loro passaggi accidentali alle leucotefriti acide e alle leucititi. Queste rocce mostrano le stesse forme in numerose « equivalenze » di termini delle serie locali. I tufi sono in esse incoerenti e litoidi, con scorie nere e senza, e con un livello molto basso, quasi costante, a struttura più o meno pipernoide (nenfri, massi violacei ecc.). Le lave nella maggior parte mostrano leuciti fitte, ora piccolissime o addirittura invisibili, ora tra 2 mm. e 5 mm., ora variabili fino a massimi frequenti intorno ad 1 cm.; mentre nella parte rimanente mostrano leuciti non fitte ma numerose, con grande ineguaglianza di distribuzione e di grandezza, il loro diametro raggiungendo 2 cm. o 2,5 cm. e talvolta 3 cm. Queste ultime rocce sembra abbiano prodotto una grande colata o colate contemporanee che si seguono dalla pianura di Castel Giorgio ai dintorni di Pitigliano, costituendo un *termine generale*, che se non è tra' più recenti dell'intera serie generale vulsinia, è però uno dei più recenti di quella parte di essa che è anteriore allo scavamento delle valli (quaternario antico). E va notato che in alcune tra le serie locali che servono a stabilire la serie generale entrano anche quelle tra le bocche centrali secondarie che una relativa giovinezza ed altre cause hanno conservato interamente come Monte Bisenzio e Montalfina, o in frammenti come le isole Martana e Bisentina. Ma le *leucotefriti centrali* hanno un'*aureola andobasaltica* che appare in taluni punti della loro periferia. Tali punti sono: l'acrocoro di Carbonara che dal nord di S. Lorenzo si estende fino al torrente Subissone, potendo considerarsi come il più settentrionale dei tre coni principali della regione (Carbonara, Bolsena, Latera), e che è costituito da un'accumulazione di trachioligoclasite venuta fuori con l'eruzione più antica, alla quale deve aggiungersi l'emissione laterale dovuta all'eruzione successiva che produsse l'oligotrachite di Bagnolo; il cono di Torre Alfina sulla Valle della Paglia che ha dato un basalte in tempo più recente, ma non oltre il quaternario antico; il cono di Monte Calvo nella valle della Fiora che ha emesso un'oligoclasite ancora più recente, e che si ritrova più a sud fino a Ponte Sodo; le vicinanze di Rocca Respampani nella valle della Marta, dove alla base della serie vulcanica trovasi un tufo molto acido (nenfro) più antico delle due rocce precedenti, ma più recente delle lave di Carbonara poichè contiene abondante sanidina con leuciti ed inclusi leucitici e, se non è una vera roccia trachitica, è un termine di passaggio tra questa e le rocce leucofonolitiche. Queste rocce periferiche dunque, meno quelle di Carbonara che appartengono ad una fase anteriore e ad un edifizio a parte, rappresentano livelli che si alternano con quelli delle leucotefriti centrali, analogamente a quanto av-

viene nel vulcano di Vico, la cui unità non può mettersi in dubbio. Finalmente ricorderò un gruppo di colate leucofonolitiche che localizzate a nord-est della Conca di Bolsena salgono fino a Lauscello a breve distanza dal cono di Carbonara. Sono anch'esse intercalate nelle leucotefriti centrali, e la loro natura è intermedia tra queste ultime e le rocce periferiche come il nenfro precedente. La serie generale vulsinia evolve solo in ultimo verso termini nettamente basici con la colata del Lamone e con le emissioni di Monte Starnina, Monte Jugo, Montefiascone e forse Monterado. Il cono di Montefiascone si costruì quando già i grandi edifizî vulcanici erano decrepiti e forse la Conca di Bolsena era estinta mentre quella di Latera veniva demolita ad occidente dalla colata basaltica del Lamone; e tra gli ultimi incendii della regione vi si riproducevano in rapida sintesi le caratteristiche fondamentali del Vulcano Laziale: emissioni leucititiche, talvolta anche melilitiche, abondanza di sperone, abondanza di peperino simile a quello di Albano.

Se ora ricordiamo l'evoluzione del sistema Cimino, le differenze e le analogie col sistema Vulsinio appariranno evidenti. In entrambi con una prima fase felspatica s'inizia l'attività da un vulcano settentrionale. In una seconda fase questo vulcano continua le sue emissioni felspatiche nel primo sistema, mentre è estinto o sta per estinguersi nel secondo; ma in entrambi i sistemi si ha più a sud una lunga serie di eruzioni felspatiche e felspatoidiche intramezzate con eruzioni soltanto felspatiche. Come differenza sostanziale nei Cimini l'attività meridionale si manifesta da un solo vulcano, mentre nei Vulsinii si ha diffusione in più vulcani con un'intensità molto più grande, quasi a compenso dell'esaurimento del vulcano settentrionale. Finalmente una terza fase più basica è appena accennata con oligolabradoriti nel primo sistema, ed è bene sviluppata con leuciti e basalti nel secondo. Perfino i blocchi fonotefritici che accompagnano le proiezioni del cratere di Vico hanno un riscontro in quelli di Latera.

Non v'è ragione per includere tra le bocche periferiche dei Vulsinii quelle situate a grandi distanze a Radicofani, S. Venanzo, Pian di Celle, Coppaeli: basaltica la prima, melilitiche le altre.

Si può concludere che l'ipotesi d'un focolare unico o di focolari comunicanti ha nei Vulsinii maggior probabilità che nei Cimini, e le leucofonoliti di Bolsena anche meglio delle trachioligoclasiti di Vico, essendo non solo intramezzate tra le leucotefriti ma anche localizzate presso il vulcano settentrionale, avvalorano tale ipotesi. Essa suppone che *per ogni momento dell'attività del sistema e per tutti i siti delle sue manifestazioni ci sia comunanza, cioè* unicità *di quella parte dei magmi elementari ehe si elabora nei focolari* (scoria) *e che perciò può evolvere solo col tempo.* Ed è a questa *unicità* che si riduce ciò che ho chiamato *unità del sistema Vulsinio.* In esso la vicinanza delle pareti del focolare potrebbe concorrere a spiegare l'esilio dei felspatoidi dell'aureola, fatta eccezione da Montefiascone ove tali pareti sono prossime a quelle del focolare Cimino.

Biologia. — *Sulla morfologia causale dello sviluppo oculare del Bufo vulgaris* [1]. Nota del dott. Giulio Cotronei, presentata dal Socio B. Grassi.

Riassumo un mio lavoro che è in corso di stampa [2]. Tale lavoro che tratta della morfologia causale dello sviluppo oculare ha preso le mosse dall'ultimo studio di Carlo Rabl [3], da me conosciuto con relativo ritardo a causa della guerra. Le ricerche del Rabl hanno avuto per iscopo di illustrare la bilateralità dell'occhio. L'illustre scienziato ha dimostrato che la vescicola ottica e ancor più il calice ottico presentano una chiara simmetria bilaterale con una distinzione in una parte nasale e in una parte temporale, distinti a loro volta in una dorsale e una ventrale. Sono specialmente dimostrative le figure 10 e 11 della tavola 10 del Rabl.

La fig. 10 mostra una fase di sviluppo oculare del Coniglio nella quale la retina si solleva sul *tapetum nigrum* formando una piega sulla linea mediana dell'occhio e venendo così a delineare la bilateralità dell'occhio: quest'immagine retinica nel prosieguo dello sviluppo scompare.

Nell'esame del mio materiale di *Bufo vulgaris* ottenuto facendo agire il cloruro di litio sulle uova in sviluppo, m'è avvenuto di incontrarmi in un caso di malformazioue oculare che io considero come la verifica sperimentale delle ricerche del Rabl.

Il mio caso può considerarsi come un mostro monoftalmo asimmetrico: si è sviluppato solo l'occhio sinistro, il quale all'esame microscopico seriale si presenta nelle seguenti condizioni.

Gli strati della retina sono tutti differenziati, e il fatto che ci colpisce è che la retina propriamente detta presenta un sollevamento, per dir così, della linea mediana: il *tapetum nigrum* non presenta invece piega di sorta. Lo strato dei coni e dei bastoncini partecipa debolmente alla piega. Lo stato granulare esterno e lo strato reticolare esterno mostrano con evidenza il sollevamento mediano. Con il grande sviluppo dello strato granulare interno si occupa una gran parte della regione mediana ed è il forte accrescimento mediano di questo strato che contribuisce a spingere lateralmente e da una sola parte il residuale e quasi virtuale spazio del corpo vitreo.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto d'Anatomia comparata della R. Università di Roma.

[2] In: *Ricerche di Morfologia*. 1921.

[3] Rabl C., *Ueber die bilaterale oder nasotemporale Symmetrie des Wirbeltierauges*. Archiv. f. Mikros. Anat. Bd. 90. 1917.

A questo processo vengono a partecipare anche lo strato reticolare interno e quello delle cellule ganglionari. Si nota pure lo strato delle fibre del nervo ottico.

A completare questi brevi cenni va osservato che per lo sviluppo mediano, di cui si è fatto cenno, si è quasi del tutto occlusa la originaria apertura pupillare e la cavità del calice ottico.

Questi risultati vanno così interpretati sulla scorta di quelli del Rabl: se pensiamo che durante la fase designata dal Rabl e dianzi ricordata l'occhio continui nel suo sviluppo col differenziamento dei varî strati retinici pur rimanendo fissata la condizione fondamentale di tale fase ossia del sollevamento mediano del foglietto retinico, noi possiamo giungere a una chiara spiegazione del reperto ottenuto: bisogna però osservare che *si tratta di una condizione prodotta dal differenziamento degli strati retinici coesistente ad una fase di arresto di sviluppo oculare.*

In questo processo le cariocinesi delle cellule retiniche si sono susseguite, e la moltiplicazione cellulare ha condotto al differenziamento degli strati retinici; ma il fatto fondamentale è che questi strati non hanno potuto occupare uno spazio nuovo, ma hanno dovuto adattarsi ad occupare quello che dovrebbe rappresentare l'originaria cavità del calice ottico.

In altre parole coesistente alla moltiplicazione e al differenziamento cellulare c'è stato il manifestarsi di una condizione inibitoria su quelle funzioni cellulari che indipendentemente dalla moltiplicazione cellulare conducono a uno sviluppo spaziale. Una di queste funzioni, risulta dalle deduzioni obbiettive, è certamente il movimento cellulare, e un'altra la possiamo riconoscere nella secrezione cellulare. Il reperto c'indica con un caso concreto la peculiare azione paralizzante esercitata dal sale di litio, mostrando sperimentalmente una dissociazione tra i varî processi morfogenetici elementari. Si ha pertanto una maniera di verificare sperimentalmente la grande importanza che le funzioni cellulari così come sono state genialmente studiate da Angelo Ruffini hanno nello sviluppo della forma. Una medesima occupazione spaziale per le medesime cause inibitorie si ha nel cervello precordale dove le divisioni cellulari dissociate dagli altri processi morfogenetici elementari hanno condotto verso la parte più anteriore all'occupazione di una parte dello spazio ventricolare: così si giunge all'inibizione dei ventricoli laterali, su cui ho richiamato l'attenzione in precedenti ricerche. Il mio reperto così interpretato serve a spiegare altresì alcuni casi di mostruosità descritti recentemente da Fessler (1920) e a interpretare razionalmente le così dette doppie formazioni oculari descritte da Ekman e da Schultze.

Ricordo infine a complemento della presente Nota che nel caso da me studiato, dove l'occhio per inadeguato sviluppo spaziale non ha potuto toccare l'epidermide, il cristallino non si è sviluppato: ciò pure ricorda quanto ho descritto altrove.

Biologia. — *Variazioni di peso specifico durante lo sviluppo delle uova di Teleostei di superficie e di profondità.* Nota del dott. Ettore Remotti, presentata dal Socio B. Grassi.

Sulle uova galleggianti dei Teleostei si fermò più volte l'attenzione degli studiosi per il fatto che, se vengono poste in un bicchiere di comune acqua marina, si mantengono ordinariamente alla superficie nei primi giorni di sviluppo, per poi scendere e toccare il fondo del bicchiere verso la fine del periodo embrionale e rimanervi fino alla schiusa della larva; e il prof. Sanzo, occupandosi delle cause determinanti quest'immersione, riscontrò che, in uno stesso tipo di Murenoidi, il punto di congelamento del liquido pervitellino verso la fine dello sviluppo è più basso che al primo giorno dello sviluppo medesimo: abbassamento dovuto, in massima parte, ad aumento di NaCl (1). Nell'Istituto centrale di Biologia marina da lui diretto, ho intrapreso un gruppo di esperienze, che saranno oggetto di una Memoria a parte, coll'intento di esaminare, in varie uova di Teleostei, l'andamento della variazione di peso specifico, se ed entro quali limiti esso si mantenga costante per una stessa specie, quale grado di differenza riveli da specie a specie e se non lasci sorprendere caratteristiche differenziali tra le forme di profondità e quelle di superficie.

Le uova galleggianti di Teleostei, in generale pressochè sferiche, presentano un diametro da $^1/_2$ a 2 mm., salvo quelle dei Murenoidi dove si raggiunge il massimo valore di 5 mm. o poco più. Tali dimensioni rendono poco agevole ogni misura, senza trascurare che il metodo da seguirsi nella determinazione del peso specifico delle uova, oltre rispondere alle esigenze fisiche, deve rispettare, trattandosi di esseri viventi, la vitalità dell'uovo stesso ed il regolare sviluppo dell'embrione.

Il metodo più rispondente a tali scopi consiste nel preparare una serie di recipienti a chiusura ermetica, contenenti tutti una stessa quantità di acqua marina, e dai quali si ottengono, per aggiunta di acqua distillata o di soluzione più densa di Na Cl, rispettivamente una serie di mezzi 0-1-2-3... con densità progressivamente decrescenti e una di mezzi 0, 1, 2, 3 ... con densità progressivamente crescenti. L'incremento di densità fra due termini consecutivi di una serie (incremento che si può render piccolo quanto si voglia), sarà allora dato dalla differenza di densità tra il recipiente 0 e il termine

(1) Sanzo L., *Sulle cause determinanti l'approfondimento delle uova di Teleostei in sviluppo.* Monitore Zool. Ital., anno XXVI, nn. 5-6.

estremo della serie stessa, divisa per il numero dei recipienti intermedî. La densità dell'uovo sarà quella del recipiente entro il quale esso rimane sospeso a qualsiasi livello scelto; e, per accertarsene, basta riportare l'uovo nella bottiglia che precede e in quella che segue per vederlo spostare lungo la verticale con moti rispettivamente contrarî.

L'esame dei valori ottenuti e rappresentati graficamente rivela:

a) che non tutte le curve di sviluppo si comportano allo stesso modo;

b) che le uova non presentano un peso specifico proprio e costante per ogni specie, ma solamente una *successione caratteristica di pesi specifici*

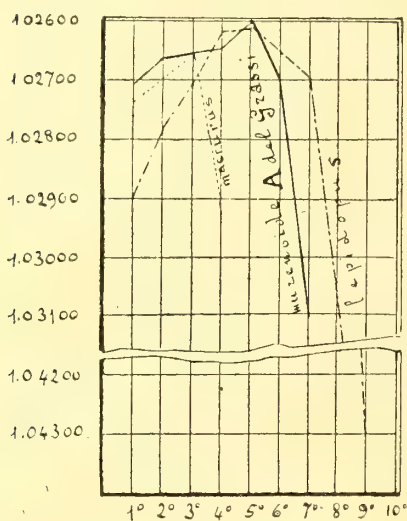



Fig. 1.

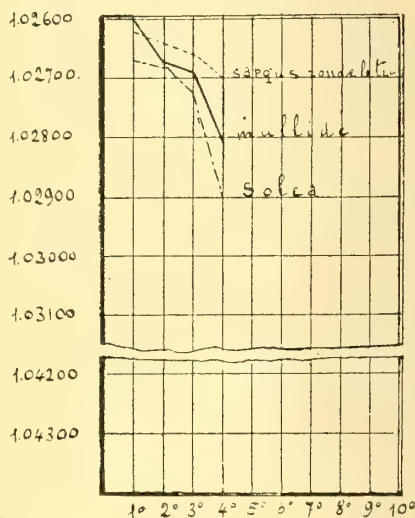



Fig. 2.

da richiamare l'andamento di una legge, i cui coefficienti sarebbero proprî d'ogni singolo individuo e varierebbero col variare di esso;

c) che le differenze tra le curve specifiche lasciano aggruppare le uova esaminate in due gruppi distinti, nell'uno dei quali si trovano uova di specie che sono tutte di profondità, e nell'altro uova di specie tutte superficiali. Delle numerose grafiche riporto qui tre esempî per ciascuno dei due gruppi (fig. 1ª e 2ª).

Nelle specie di profondità (fig. 1ª) il peso specifico diminuisce nei primi giorni di sviluppo per crescere poi rapidamente verso l'uscita della larva dalla capsula. Questa diminuzione di densità, che all'analisi delle curve non presentano, invece, le specie di superficie (fig. 2ª), sarebbe dunque propria delle specie *non superficiali*, e potrebbe interpretarsi come la continuazione del fenomeno iniziale di ascesa, per cui l'uovo, emesso in profondità, raggiunge gli strati superiori.

Interessante è notare che le uova, le quali diminuiscono di peso specifico durante i primi giorni di sviluppo e poi s'immergono verso la fine

dello sviluppo stesso, sono anche le più facili a degenerare. Ciò si accorda colle osservazioni del prof. Raffaele [1] il quale, per primo, notò la facile degenerazione che nei bicchieri subiscono le uova solite a raggiungere grandi profondità, ammettendo che la forte pressione degli strati profondi fosse « necessaria al loro benessere e, nella mancanza di tali condizioni, stesse la causa della grande mortalità che si verifica, quando esse vengono tenute nei recipienti di sviluppo ».

Mentre le specie di profondità assumono l'andamento esposto, quelle di superficie — come risulta dall'esame delle curve — continuano ad aumentare di densità fino a superare il peso specifico dell'acqua in cui esse sono immerse e ad iniziare la discesa. Questa osservazione avrebbe particolare importanza per il fatto che il semplice esame fisico delle uova potrebbe essere indice diagnostico sull'habitat dei Teleostei ai quali l'uovo appartiene. Potremmo ancora dire che i *Teleostei di profondità ed i Teleostei di superficie sono identificabili, fin dal periodo embrionale, per il diverso comportamento di peso specifico durante lo sviluppo delle loro uova.*

La maggior parte dei Murenoidi si comporterebbero come specie di profondità e segnatamente la specie *A* del Grassi [2]. La curva di variazione dei Trachinidi — più evidentemente in *Uranoscopus Scaber* — assume l'andamento dei gruppi superficiali, richiamando però, in certo qual modo e leggermente, anche le curve di profondità.

Ma ciò che più interessa e che maggiormente ci colpisce si è che le specie decisamente superficiali e le specie nettamente di profondità sarebbero anche nettamente rappresentate dal comportamento antagonistico delle loro curve di sviluppo embrionale.

Fra questi due estremi è logico ammettere l'esistenza di punti intermedî.

Non possiamo poi parlare, come abbiamo già espresso, di peso specifico fisso, costante e caratteristico per ogni singola specie, ma:

a) in certi gruppi, di una densità inferiore a quella dell'ambiente e regressiva nei primi giorni di sviluppo, maggiore e rapidamente crescente verso la schiusa dell'embrione (fig. 1);

b) in altri gruppi, di un succedersi via via crescente di densità dai primi stadî di sviluppo fino all'uscita dell'embrione dalla capsula (fig. 2).

Al primo modo andrebbero riferite le specie di profondità e al secondo quelle di superficie,

Quando lo sviluppo è molto inoltrato pare che la larva di *Muraena Helena* — specie *F* del Grassi — entro piccolissimi limiti possa far variare la densità dell'uovo; e ciò ci viene suggerito dal fatto che, anche dopo aver

[1] Raffaele, *Le uova galleggianti di Teleostei nel golfo di Napoli.* Abdr. a. d. Mittheil. a. d. Zoolog. Studien z. Neapel, VIII, Bd. 1 H.

[2] Grassi, *Metamorfosi dei Murenoidi.*

l'uovo raggiunto l'equilibrio nei recipienti di misurazione, può perderlo in seguito a disnodamenti attivi dell'embrione entro la capsula. Ciò si verifica quando la larva, disposta in senso equatoriale, ossia distesa orizzontalmente, assume, per movimento attivo, la posizione meridiana. Anzichè una modificazione di densità, ci sembra naturale ammettere che, anche quando si considera l'uovo fermo ed in equilibrio con l'ambiente, sia ciò non ostante dotato di lentissimo movimento verticale, per cui basta diminuire, anche di poco, la sezione normale allo spostamento, per modificare con essa la resistenza al moto e accentuarsi la spinta, rendendo il fenomeno palese.

Ora, l'uovo modifica leggermente la sua configurazione quando, verso la schiusa, per azione distensiva della larva, la capsula è costretta a prendere la forma leggerissimamente lenticolare. Si capisce allora che la resistenza è diversa secondo che l'uovo offre al movimento l'asse della lente o la parte perpendicolare di esso.

Ne nasce di conseguenza che, essendo la spinta costante, una diminuzione di resistenza dà agio al moto di manifestarsi. Nella posizione equatoriale della larva, l'uovo presenterebbe la massima resistenza e, se l'ambiente non è perfettamente omogeneo, cosa del resto praticamente irraggiungibile, l'equilibrio apparente si rompe non appena la larva, con una rotazione propria, costringe la capsula a presentare la sezione minore.

Biologia. — *Sulla topografia vertebro-midollare nello cimpanzè.* Nota II del dott. Sergio Sergi, presentata dal Socio B. Grassi.

Alcuni fatti che si possono desumere dalle tabelle riportate nella Nota precedente sono i seguenti.

Il valore della distanza tra le origini apparenti di ogni radice posteriore ed il relativo centro del foro intervertebrale, al quale essa giunge, dalla 15ª radice (7ª dors.) alla 18ª (10ª dors.) è minore di quello della 14ª rad. (v. tab. II). Cioè questo gruppo di radici spinali non segue l'andamento generale dei valori delle lunghezze delle altre radici, che va gradualmente aumentando per quanto esse sono più caudali (a tale referto fa pure eccezione la 6ª radice per una piccola differenza in meno della 5ª). Questo fatto coincide con quello rilevato dal Pfitzner nell'uomo e nella donna adulti, ma non nel bambino e nell'embrione umano, che, cioè, mentre il valore dell'altezza delle radici spinali posteriori va gradualmente aumentando procedendo in direzione caudale, occorre una eccezione abituale per le radici dorsali inferiori dalla 6ª alla 11ª. In queste, secondo le osservazioni del Pfitzner, si rileva ancora che il tratto extradurale ha una direzione diversa che nelle altre, perchè esso non prosegue nella direzione del tratto intradurale, ma forma con questo

un angolo aperto in alto e lateralmente. Tutto ciò prova la esistenza di una comune legge di sviluppo all'uomo ed allo cimpanzè adulti per la porzione inferiore del midollo dorsale. Cioè durante l'accrescimento vi ha uno sviluppo ineguale tra una porzione distale del midollo dorsale e la porzione della colonna vertebrale a cui corrispondono le radici spinali di questo.

L'assenza del fatto nel bambino nella prima infanzia prova che il fenomeno si svolge nell'età successiva. Là dove la colonna vertebrale rimane indietro nell'accrescimento rispetto al midollo porta al ripiegamento dell'estremità caudale delle radici spinali ed al loro accorciamento. Nell'ultima fase di accrescimento è evidente che il midollo spinale e la colonna vertebrale hanno una evoluzione indipendente l'uno dall'altra, determinata da necessità funzionali diverse.

In confronto con i dati del Pfitzner per l'uomo si rileva, che fino al livello della 7ª rad. cervicale il comportamento generale topografico nello cimpanzè e nell'uomo (bambino ed adulto) è molto simile. Però nello cimpanzè il limite dell'origine dell'8° cerv. e della 1ª e 2ª dors. è più in alto che nell'uomo (bambino ed adulto), cioè il segmento cervicale più caudale e quelli dorsali più craniali appaiono spostati più cranialmente che nell'uomo rispetto ai segmenti vertebrali corrispondenti. Il limite caudale dell'8° cerv. si approssima al valore più basso per l'uomo adulto e ricorda valori che si trovano nell'embrione umano (secondo la tabellina 8ª del Pfitzner). Il limite caudale del 12° segmento dorsale dello cimpanzè coincide con i limiti massimi dell'uomo adulto e dell'embrione umano, si allontana dai limiti del bambino che sono sempre più craniali. Tutto ciò dimostra che il rapporto di sviluppo dei 12 segmenti dorsali del midollo alla relativa sezione dorsale della colonna vertebrale è maggiore nello cimpanzè che nell'uomo di tutte le età, ma più ancora della prima infanzia, e questo perchè (Pfitzner) il midollo dorsale è più corto nel bambino che nell'adulto nel rapporto di sviluppo con la colonna vertebrale.

Per fare il confronto con l'uomo mi sono fermato, pel limite caudale del midollo dorsale dello cimpanzè, al 12° segmento, escludendo il 13° segmento, che nell'anatomia descrittiva dello cimpanzè deve essere incluso nel midollo dorsale per la esistenza di una 13ª vertebra dorsale. Ho considerato insieme poi l'ultimo segmento dorsale del midollo (il 13°) ed i quattro lombari dello cimpanzè (nel quale vi sono quattro vertebre lombari) pel confronto con i cinque segmenti lombari dell'uomo. Dal punto di vista morfologico mi sento autorizzato a porre il confronto in questi termini: di esso tratterò più estesamente altrove, ma qui ricordo i dati che si trovano nella monografia del Kohlbrugge [1] sulle radici spinali che dànno origine ai nervi

[1] I. H. F. Kohlbrugge, *Muskeln und periphere Nerven der Primaten mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anomalien. Eine vergleichend-anatomische und antropologische Untersuchung.* Verhand. der Konink. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam (Tweede Sect.) Deel V, n. 6, 1897.

periferici dei primati e anche, per le questioni generali, nella classica Memoria del van Rynberk (¹). È già ben nota del resto la questione sul significato morfologico della differenza tra la 13ª vertebra dorsale (nel caso di 13 vertebre dorsali), e la 1ª lombare (nel caso di 12 vertebre dorsali) nell'uomo, nel gorilla e nello cimpanzè, come si può leggere in Broca (²).

Il limite caudale dell'area radicolare del 25° segmento (V lomb. dell'uomo = IV lomb. dello cimpanzè) nello cimpanzè coincide, pel rapporto vertebrale considerato, coi minimi dell'uomo adulto.

Il limite caudale del cono midollare nello cimpanzè coincide con quello dell'uomo adulto.

Quindi nel complesso abbiamo trovato (per i confronti con i dati del Pfitzner nell'uomo) che *la porzione dorsale del midollo spinale nello cimpanzè in rapporto alla colonna vertebrale ha una estensione maggiore che nell'uomo adulto e più ancora che nel bambino.* L'accrescimento si fa in direzione caudale ed in direzione craniale. Lo sviluppo in direzione caudale segue una legge di accrescimento simile a quella dell'uomo ed in questa direzione il limite caudale raggiunto supera il limite caudale medio dell'uomo adulto e tende a coincidere con i valori estremi del medesimo. Lo sviluppo in direzione craniale sorpassa i limiti dell'uomo in ogni età e solamente si incontra nell'embrione umano.

Il confronto della topografia vertebro-midollare dello cimpanzè con quella dell'uomo secondo i dati dello Sterzi (³) conferma meglio questi risultati.

Limite caudale	Uomo	Cimpanzè
dell'8° seg. spinale	faccia sup. corpo X vert. (= III dors.)	sopra il corpo VII vert.
del 20° seg. spinale	faccia sup. corpo XVI vert. (= IX dors.)	facc. sup. corpo XVIII vert.
del 25° seg. spinale	faccia inf. corpo XX vert. (= I lomb.)	faccia sup. corpo XX vert.
del cono terminale	metà sup. corpo XXI vert. (= II lomb.)	come nell'uomo
del filo term. interno	corpo della XXVI (= II sacr.)	come nell'uomo

Secondo questi confronti appare nello cimpanzè: *a*) più accentuato l'accorciamento della porzione cervicale; *b*) più evidente l'allungamento nelle due direzioni craniale e caudale della porzione dorsale del midollo; *c*) evidente l'accorciamento della porzione lombare; *d*) tipica corrispondenza topografica per l'estremo caudale del midollo (cono terminale e filo terminale interno).

Il midollo dorsale dello cimpanzè è dunque relativamente più lungo che nell'uomo, come accade anche in un altro antropoide, nel gorilla. Il

(¹) G. van Rynberk, *Saggio di anatomia segmentale. La metameria somatica, nervosa, cutanea e muscolare dei vertebrati.* Mem. della R. Acc. dei Lincei, 1908.

(²) Paul Broca, *L'ordre des primates. Parallèle anatomique de l'homme et des singes.* Mem. d'Anthr., tom. III, Paris, 1877, pag. 36.

(³) Sterzi, *Anat. del sist. nerv. centr. dell'uomo,* vol. I, pag. 152.

Waldeyer [1] fin dal 1889 riconobbe che il carattere macroscopico per il quale il midollo spinale del gorilla si differenzia da quello dell'uomo, *nur ist das Dorsalmark relativ länger.* Questa differenza è correlativa di un'altra differenza fondamentale nel comportamento della sostanza grigia della porzione dorsale del midollo, per cui il Waldeyer concludeva nel confronto con l'uomo, che *die grossten Abweichungen im Dorsalmark zu liegen scheinen.* Le mie osservazioni microscopiche sul midollo spinale dello cimpanzè, e che saranno altrove pubblicate, confermano anche per questo antropoide quanto il Waldeyer rilevò per il gorilla e cioè l'esistenza di una particolare differenziazione dall'uomo.

Infine il paragone dei valori della lunghezza delle radici spinali dello cimpanzè con quelli del Souliè [2] per l'uomo dimostra, che nello cimpanzè l'accorciamento della colonna vertebrale rispetto al midollo spinale si fa assoluta nel tratto distale a partire dal limite dell'area radicolare della 20ª radice spinale e cioè a partire dal livello della 17ª vertebra. È noto che negli antropoidi la regione lombare è relativamente corta come nel bambino alla nascita [Keith [3]], l'accorciamento quindi si estende anche alle ultime vertebre dorsali distali.

Il rapporto della lunghezza del midollo spinale (= 260 mm.) del cimpanzè osservato alla lunghezza vertebrale (= 425 mm.) è di 61,1, valore contenuto nelle oscillazioni dei valori per l'uomo adulto (55,6-63,1) e del bambino (58,1-64,0). Questo fatto implica che, ad onta degli accrescimenti ineguali e parziali e non simultanei del midollo spinale e della colonna vertebrale, vi è la tendenza alla conservazione di un rapporto costante di sviluppo della loro lunghezza globale, rapporto che si estende più ampiamente che nell'àmbito della famiglia degli Hominidae. Un altro rapporto (topografico) fondamentale e costante comune all'uomo ed allo cimpanzè lo abbiamo trovato nel limite dell'estremità caudale del cono midollare riferito alla colonna vertebrale. A me sembra che la interpretazione più convincente sulla costanza di tali rapporti debba rintracciarsi in una necessità meccanica, e precisamente, in condizioni analoghe di adattamento ai movimenti del corpo, così come già il Gegenbaur [4] pensò a tali diverse condizioni, per interpretare le differenze notevoli di sviluppo in lunghezza del midollo spinale relativamente alla lunghezza della colonna vertebrale in seno alla classe dei mammiferi.

[1] W. Waldeyer, *Das Gorilla-Rückenmark.* Abhand. der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1889.

[2] Vedi in Sterzi, loc. cit., pag. 264.

[3] Arthur Keith, *Human embriology and morphology,* London, 1903, pag. 47.

[4] Carl Gegenbaur, *Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere mit Berücksichtigung der Wirbellosen,* Leipzig, 1898, I Bd., pp. 782-783.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che la votazione per la elezione del Segretario e del Segretario aggiunto della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, ha dato i risultati seguenti:

votanti 40 — maggioranza 21.

Per Segretario: Castelnuovo ebbe voti 39; Corbino 1.

Eletto Castelnuovo.

Per Segretario aggiunto: Cerulli ebbe voti 4 — Corbino 3 — Fano 2 — Levi-Civita 2 — Nasini 1 — De Stefani 1 — Schede bianche 24 — Schede nulle 3.

Nessun candidato avendo raccolto la maggioranza dei voti, l'elezione è rimandata alle prossime adunanze generali.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Castelnuovo presenta poscia le pubblicazioni giunte in dono, richiamando l'attenzione della Classe su di una raccolta di Memorie scientifiche inviate dal Socio straniero Teodoro Richards, del *Gibbs Memorial Laboratory* di Boston.

Il Presidente Volterra, per incarico del Socio Ciamician, presenta varie pubblicazioni del defunto dott. R. Rossi, offerte dalla famiglia del giovane e valente fisico di cui la morte troncò il brillante avvenire scientifico.

Il Socio Marchiafava fa omaggio della Commemorazione da lui letta nella Biblioteca Lancisiana: *Nel secondo centenario della morte di Giovanni Maria Lancisi*, del quale ricorda i meriti scientifici.

AFFARI DIVERSI

Il Presidente presenta alcuni pieghi suggellati inviati dai signori Bresciani e Pastori perchè siano conservati negli Archivî accademici.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA
presentate nella seduta del 2 gennaio 1921.

D'Ocaque. — Principes usuels de monographie avec application a divers problèmes concernant l'artillerie et l'aviation. Paris, 1920. 8°, pp. 1-67.

De Toni G. B. — Commemorazione del prof. Pier Andrea Saccardo, m. e (Estr. dagli « Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXIX). Venezia, 1920. 8°, pp. 1-36.

Del Guercio G. — Specie nuove e nuovi generi per l'Afidofauna italica (Estr dal « Redia », vol. XIV, pp. 107-136). Firenze, 1920. 8°.

Duffield G. W. — The Emission Spectrum of Silver heated in a carbon-tube furnace in air (Repr. from the « Astrophysical Journal », vol. XXVII, pp. 371-378). Manchester, 1908. 8°.

Fermi C. — Si può col metodo Grassi smalarizzare l'Italia in pochi anni? Roma, 1920. 8°, pp. 1-32.

Ferrari G. — Noterelle d'algebra. Parma, 1920. 8°, pp. 1-95.

Griffini A. — Studî sui Lucanidi. IX: Sul Metopodontus Savagei (Hope) (Estr. dal « Redia », vol. XIV, pp. 197-208). Firenze, 1920. 8°.

Henderson W. N. — Neutral Salt Action on Acid Solubilities. Boston, 1916. 8°, pp. 1-17.

ibn ʿAsākir... al-Taʾrīḫ al-Kabīr li-l-ḥāfiẓ Ṭiqah al-dīn abū-l-Qāsim ʿAli b. al-Ḥasen... ibn Asākir. Damasco, Rawdah al-Šām, 4° picc. 1330-32 ég. voll. 5 (in contin.).

Marchiafava E. — Commemorazione di Giovanni Maria Lancisi fatta nel secondo centenario della morte il 20 gennaio 1920 nella Biblioteca Lancisiana. Roma, 1920. 8°, pp. 1-41.

Richards T. W. — A Calorimetric Method for Standardizing Thermometers by Electical Energy (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLII, pp. 1374-1377). Cambridge, 1920. 8°.

Richards T. W. — A new Thermachemical Method for Subdividing Accurately a Given Interval ou the Thermameter Scale (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVII, pp. 81-96). Cambridge, 1915. 8°.

Richards T. W. — An Advantageous Form of Still for the Exact Measurement of Boiling Point During Fractional Distillation (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society ». vol. XXXVI, pp. 1787-1791). Cambridge, 1914. 8°.

Richards T. W. — An Indirect Method of Determinino the Specific Heat of Dilute Solutions, with Preliminary Data Concerning Hydrochloric Acid. (Repr. from the « Journal American Chemical Society », vol. XLII, pp. 1621-1635). Cambridge, 1920. 8°.

Richards T. W. — Attempt to Separate the Isotopie forms of Lead by Fractional Crystallization (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXIX, pp. 531-541). Cambridge, 1917. 8°.

Richards T. W. — Compressibility of Aqueous Solutions, Especially of Urethane, and the Polymerization of Water (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLI, pp. 59-69). Cambridge, 1919. 8°.

Richards T. W. — Concentrated Thallium Amalgams: their Electrachemical

and Thermochemical Behanior, Densities and Freezing Points (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLI, pp. 1732-1768). Cambridge, 1919. 8°.

RICHARDS T. W. — Density of Radio-Lead from Pure Norwegian Cleveite (Repr. from the « Journal of the American Society », vol. XXXVIII, pp. 1658-1660). Cambridge, 1916. 8°.

RICHARDS T. W. — Die Reinheit von geschmolzenem Lithiumperchlorat und deren Bedeutung für das Atomgewicht von Silber (Repr. « Zeitschrift für Anorganische Chemie », Band 91, pp. 320-332). Cambridge, 1915. 8°.

RICHARDS T. W. — Further Study of Floating Equilibrium (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVIII, pp. 1000-1011). Cambridge, 1916. 8°.

RICHARDS T. W. — Further Study of the Atomic Weight of Lead of Radioactive Origin (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVIII, pp. 2613-2622). Cambridge, 1916. 8°.

RICHARDS T. W. — Ideals of Chemical Investigation (From the « Smithsonian Report », 1916, pp. 213-223). Washington, 1917. 8°.

RICHARDS T. W. — Improvements in Calorimetric Combustion, and the Heat of Combustion of Toluene (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXIX, pp. 341-354). Cambridge, 1917. 8°.

RICHARDS T. W. — Recent Researches in the Wolcott Gibbs Memorial Laboratory of Harvard University (Repr. from « Science », vol. XLII). Cambridge, 1915, 8°, pp. 1-7.

RICHARDS T. W. — Suggestion Concerning the Statement of the Phase Rule (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVIII, pp. 983-987). Cambridge, 1916. 8°.

RICHARDS T. W. — The Atomic Weight of Lead from a Japanese Radioactive Mineral (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLII, pp. 928-930). Cambridge, 1920. 8°.

RICHARDS T. W. — The Atomic Weight of Lead of Radioactive Origin (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVI, pp. 1329-1344). Cambridge, 1914. 8°.

RICHARDS T. W. — The Complications at the Anode in the Silver Coulometer (Voltameter) (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVII, pp. 675-693). Cambridge, 1915. 8°.

RICHARDS T. W. — The Compressibility of Certain Typical Hydrocarbons, Alcohols and Ketones (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVIII, pp. 899-999). Cambridge, 1916. 8°.

RICHARDS T. W. — The Compressibilities of the Elements and their Relations to other Properties (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Science », vol. I, pp. 411-415). Cambridge, 1915. 8°.

RICHARDS T. W. — The Compressibility of Indium (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLII. pp. 49-54). Cambridge, 1920. 8°.

RICHARDS T. W. — The Density of Lead from Radioactive Minerals (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVIII, pp. 221-227). Cambridge, 1916. 8°.

RICHARDS T. W. — The Dielectric Constants of Typical Aliphatic and Aromatic Hydrocarbons, Cyclohexane, Cyclohexanone, and Cyclohexanol (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLI, pp. 2002-2012). Cambridge, 1919. 8°.

RICHARDS T. W. — The Effect of Pressure, and of Dissolved Air and Water on the Melting Point of Benzene (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLI, pp. 201?-2028). Cambridge, 1919. 8°.

RICHARDS T. W. — The essential Attri-

butes of the Elements (Repr. from the « Journal of the Franklin Institute », 1916). Cambridge, 1916, 8°, pp. 1-7.

Richards T. W. — The Freezing Point of Benzene as a Fixed Point in Thermometry (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVI, pp. 1825-1832). Cambridge, 1914. 8°.

Richards T. W. — The Heats of Combustion of Benzene, Toluene, Aliphatic Alcohols, Cyclohexanol, and other Carbon Compounds (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLII, pp. 1599-1617). Cambridge, 1920, 8°.

Richards T. W. — The Inclusion of Electrolyte by the Deposit in the Silver Voltameter (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVII, pp. 7-23). Cambridge, 1915. 8°.

Richards T. W. — The Melting Points and Thermoelectric Behavior of Lead Isotopes (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLII, pp. 1550-1556). Cambridge, 1920. 8°.

Richards T. W. — The Molecular Weight of Sodium Carbonate and the Atomic Weight of Carbon Referred to Silver and Bromine (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society ». vol. XXXVII, pp. 95-113). Cambridge, 1915. 8°.

Richards T. W. — The Present Aspect of the Hypothesis of Compressible Atoms (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVI, pp. 2417-2439). Cambridge, 1916. 8°.

Richards T. W. — The Problem of Radioactive Lead (Repr. from « Science », vol. XLIX). Harvard, 1919. 8°.

Richards T. W. — The Purification by Sublimation and the Analysis of Gallium Chloride (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XLI, pp. 131-132). Cambridge, 1919. 8°.

Richards T. W. — The Purification of Gallium by Electrolysis, and the Compressibility and Density of Gallium (Repr. from the « Journal American Chemical Society », vol. XLI, pp. 133-134). Cambridge, 1919. 8°.

Richards T. W. — The Refractive index and Solubilities of the Nitrates of Lead Isotopes (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XL, pp. 1403-1409). Cambridge, 1918. 8°.

Richards T. W. — The Solubility of Sodium Sulfate as a Means of Determining Temperatures (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XL, pp. 161-174). Cambridge, 1918. 8°.

Richards T. W. — The Surface Tensions of Water, Methyl, Ethyl and Isobutyl Alcohols, Ethyl Butyrate, Benzene and Toluene (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XXXVII, pp. 1636-1676). Cambridge, 1915. 8°.

Richards T. W. — The Transition Temperatures of Strontium Chloride and Strontium Bromide as fixed points in Thermometry (Repr. from the « Journal of the American Chemical Society », vol. XL, pp. 89-95). Cambridge, 1918. 8°.

Rossi R. — An Effect of Pressure upon Arc Spectra-Titanium (Repr. from the « Proceedings of the Royal Society », vol. 83, pp. 414-420). Mancaster, 1910. 8°.

Rossi R. — An Investigation of the Spectrum of Ionium (From the « Proceedings of the Royal Society », vol. 87, pp. 478-484). Manchester, 1912. 8°.

Rossi A. — On a Relation between the Atomic Volumes and the Spectra of Elements (From the « Philosophical Magazine », 1911, pp. 921-925). Manchester, 1911. 8°.

Rossi R. — On the Pressure Displacement of spectral Lines (From the « Philosophical Magazine », 1911, pp. 500-501). Manchester 1911. 8°.

Rossi R. — Series of Lines in the Spectrum of Neon (From the « Philosophical Magazine », 1913, pp. 981-984), Cambridge, 1913. 8°.

Rossi R. — The Effect of Pressure on the Arc Spectrum of Vanadium (Repr. from the « Astrophysical Journal », vol. XXXIV, pp. 21-25). Manchester, 1910. 8°.

Rossi R. — The Effect of Pressure on the Band Spectra of the Fluorides of the Metals of the Alkaline Earths (From the « Proceedings of the Royal Society », vol. 82, pp. 518-523). Manchester, 1909. 8°.

Rossi R. — The Widening of the Hydrogen Lines in the Spark Spectrum (Repr. from the « Astrophysical Journal », vol. XL, pp. 231-235). Cambridge, 1914. 8°.

Russel A. S. — An Investigation of the Spectrum of Ionium (From the « Proceedings of the Royal Society », vol. 87, pp. 478-484). Manchester, 1912. 8°.

Sabot R. — La technique de Fedoroff. Simplifications au cours du travail et des reports (Extr. du « Compte Rendu des séances de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genéve », vol. XXXVII, pp. 51-58). Genéve, 1920. 8°.

Teodoro G. — Sulla embriologia delle Cocciniglie (Estr. dal « Radio », vol. XIV, pp. 137-141). Firenze, 1920, 8°.

Turati E. — Nuove forme di Lepidotteri (Estr. dal « Naturalista Siciliano », anno 1919, n. 7 a 12). Palermo, 1919, 8°, pp. 1-166.

Vannini G. — Le grandi rivelazioni sul circolo. Milano, 1920. 8°, pp. 1-52.

Zattini G. — La potenzialità attuale della produzione del frumento in Italia statistica del dodicennio 1909-1920 (Estr. dalle « Notizie periodiche di statistica agraria », fasc. III). Roma, 8°, pp. 1-57.

AFFARI DIVERSI

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Seduta del 2 gennaio 1921.

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

(*Segue in terza pagina*).

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

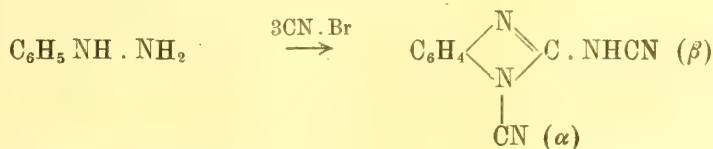
Seduta del 16 gennaio 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sintesi della* o-*Fenilendicianguanidina dalla* o-*Fenilendiamina* (1). Nota del Corrisp. Guido Pellizzari (2).

In un lavoro precedente (3) fu dimostrato che per azione del bromuro di cianogeno sulla fenilidrazina si possono introdurre tre gruppi di cianogeno in luogo dei tre atomi di idrogeno basico; ma per una trasposizione intramolecolare il prodotto che ne resulta invece della tricianfenilidrazide, è la o-fenilen-α-β-dicianguanidina

$$C_6H_5\,NH\,.\,NH_2 \quad \xrightarrow{3CN\,.\,Br} \quad C_6H_4\!\left\langle\begin{matrix} N \\ \\ N \end{matrix}\right\rangle\! C\,.\,NHCN\ (\beta) \qquad \text{(N inferiore legato a } CN\ (\alpha))$$

Infatti questa sostanza per idrolisi graduale prima con idrato potassico, poi

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica del R. Istituto Superiore di Firenze.

(2) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

(3) Pellizzari e Gaiter, *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina.* Nota IV: *Passaggio a derivati della* o-*fenilendiamina.* Gazz. chim. ital., 48, II, 151.

con acido cloridrico, dette i seguenti prodotti di demolizione :

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C.NH.CN \longrightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C.NHCO.NH_2 \longrightarrow$$

fenilen-β-cianguanidina — fenilenguanilurea

$$\longrightarrow C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C.NH_2$$

fenilenguanidina

Per la sintesi di queste sostanze dalla *o*-fenilendiamina, ricordo che l'ultimo prodotto d'idrolisi, la fenilenguanidina, era già stata ottenuta da Pierron per azione del bromuro di cianogeno sulla fenilendiamina (1). In essa per ulteriore cianurazione, Pellizzari e Gaiter (loc. cit.) riuscirono ad introdurre un gruppo cianogeno in posizione α,

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}NH_2\\NH_2\end{matrix}\right. \xrightarrow{CN.Br} C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C.NH_2 \xrightarrow{CN.Br} C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\N(CN)\end{matrix}\right\rangle C.NH_2$$

ma non riuscirono a introdurre il cianogeno in posizione β. Invece dal primo prodotto d'idrolisi, la fenilen-β-cianguanidina, trasformandola in sale sodico e facendo agire su di esso il bromuro di cianogeno ritornarono alla fenilen-α-β-dicianguanidina (2)

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C.NH.CN \xrightarrow{CN.Br} C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\N(CN)\end{matrix}\right\rangle C.NH.CN$$

Siccome ora son riuscito ad ottenere anche questa fenilen-β-cianguanidina dalla *o*-fenilendiamina, passando prima alla fenilenbiguanide, ne viene di conseguenza anche la sintesi della fenilen-α-β-dicianguanidina dalla *o*-fenilendiamina.

Ziegelbauer (3) impiegando la nota reazione che conduce alle biguanidi, ebbe col cloridrato di *o*-fenilendiamina e diciandiamide una fenilenbiguanide alla quale attribuì una formula simmetrica secondo il seguente schema

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}NH_2\\NH_2\end{matrix}\right. + \left.\begin{matrix}CN\\NH_2C{=}NH\end{matrix}\right\rangle NH = NH_3 + C_6H_4\left\langle\begin{matrix}NH{-}C{:}NH\\NH{-}C{:}NH\end{matrix}\right\rangle NH$$

(1) Ann. de chimie et phys. VIII, tom. 15, 190.

(2) Per la costituzione di queste sostanze confronta anche la Nota G. Pellizzari, *Sull'o-amidofenilurea*. Gazz. chim. ital., 49, I, 19.

(3) Monatshefte, 17, 653.

In ricerche descritte in una Nota già consegnata per la stampa alla Gazzetta chimica italiana che porta il titolo: *Azione degli alogenuri di cianogeno sulla fenilidrazina. Nota V: Derivati della melamina,* ho ottenuto questa stessa *o*-fenilenbiguanide partendo dalla fenilendicianguanidina con una serie di reazioni, le quali dimostrano che ad essa spetta una formula di costituzione differente da quella simmetrica data, ma non dimostrata, da Ziegelbauer; le reazioni sono le seguenti:

1°) la fenilendicianguanidina (formula I) addiziona ammoniaca e passa in fenilenisomelamina (form. II);

2°) la fenilisomelamina con acido cloridrico, subisce la trasformazione di un carboimidile in carbonile, reazione normale delle melamine, e passa in fenilenisoammelina (form. III);

3°) per azione dell'idrato potassico si rompe l'anello melaminico, con eliminazione di anidride carbonica, e si forma la fenilenbiguanide (form. IV)

I

C_6H_4 < N > C — NH
N — CN, NH — CN

$\xrightarrow{+NH_3}$

II

C_6H_4 < N > C — NH
N — C(=NH) — NH — C(=NH) — NH

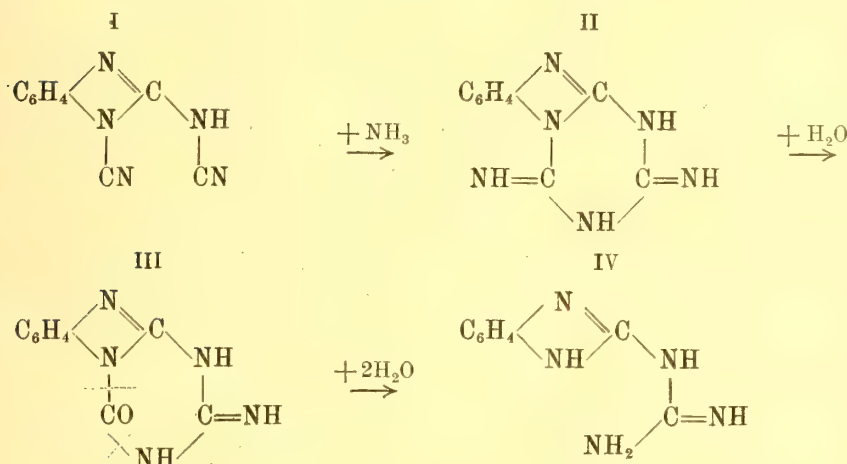
$\xrightarrow{+H_2O}$

III

C_6H_4 < N > C — NH
N — CO — NH — C(=NH) — NH

$\xrightarrow{+2H_2O}$

IV

C_6H_4 < N, NH > C — NH — C(=NH) — NH_2

Questa formula di costituzione dell'*o* fenilenbiguanide fu poi confermata dalla sua facile trasformazione in fenilenguanilurea (form. V) per idrolisi, sostanza già ottenuta da Pellizzari e Gaiter per idratazione della fenilen-*β*-cianguanidina (form. VI).

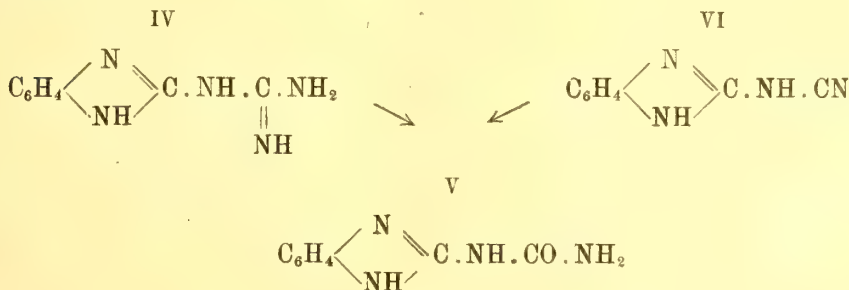
IV

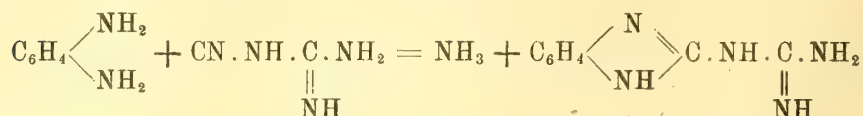
C_6H_4 < N, NH > C . NH . C(=NH) . NH_2

VI

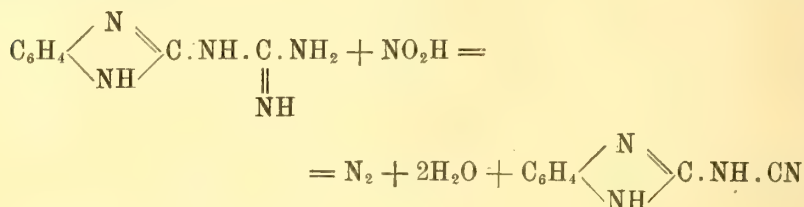
C_6H_4 < N, NH > C . NH . CN

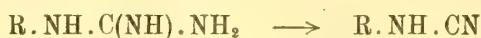
V

C_6H_4 < N, NH > C . NH . CO . NH_2

Quindi lo schema di formazione della fenilenbiguanide dalla *o*-fenilendiamina e diciandiamide deve esprimersi nel seguente modo:

$$C_6H_4\langle{}^{NH_2}_{NH_2} + CN.NH.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH_2 = NH_3 + C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C.NH.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH_2$$

Questa fenilenbiguanide trattata con acido nitroso, invece di dare come era presumibile la rammentata fenilenguanilurea, eliminò gli elementi di una molecola di ammoniaca per passare e con buon rendimento, nella fenilen-β-cianguanidina

$$C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C.NH.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH_2 + NO_2H =$$

$$= N_2 + 2H_2O + C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C.NH.CN$$

È questa una reazione nuova prodotta dall'acido nitroso per la quale un residuo guanidico viene trasformato in un residuo della cianamide, invece che un residuo ureico

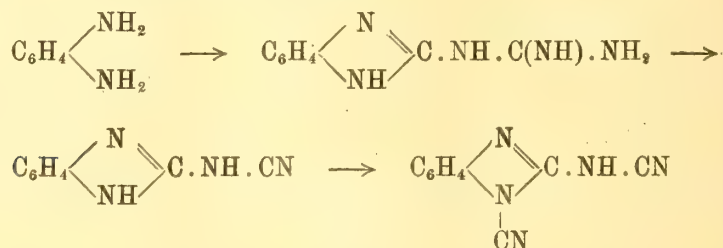
$$R.NH.C(NH).NH_2 \longrightarrow R.NH.CN$$

Con ciò viene resa possibile la sintesi della fenilendicianguanidina direttamente dall'*o*-fenilendiamina con i seguenti passaggi:

1°) cloridrato di fenilendiamina e diciandiamide dànno la fenilenbiguanide;

2°) il cloridrato di fenilenbiguanide con nitrito alcalino e acido cloridrico dànno la fenilen-β-cianguanidina;

3°) il sale potassico della fenilen-β-cianguanidina con bromuro di cianogeno dà la fenilendicianguanidina.

$$C_6H_4\langle{}^{NH_2}_{NH_2} \longrightarrow C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C.NH.C(NH).NH_2 \longrightarrow$$

$$C_6H_4\langle{}^{N}_{NH}\rangle C.NH.CN \longrightarrow C_6H_4\langle{}^{N}_{\underset{\underset{CN}{|}}{N}}\rangle C.NH.CN$$

Il prodotto ottenuto per questa via è identico a quello che si ebbe dalla fenilidrazina e bromuro di cianogeno.

Preparazione della *o*-fenilenbiguanide.

Secondo le indicazioni di A. Ziegelbauer la preparazione vien fatta scaldando in tubo chiuso per 7 ore a 105° una soluzione alcoolica di cloridrato di *o*-fenilendiamina e diciandiamide in proporzione equimolecolare. Il prodotto viene piuttosto impuro e l'A. per purificarlo lo trasforma in nitrato che cristallizza e da questo separa la base colla soda. Con tutto ciò la fenilenbiguanide rimane impura tanto che è descritta come sostanza che si scioglie in acqua colorandola in giallo.

Io l'ho preparata più rapidamente e comodamente, più pura e con rendimento un po' maggiore nel seguente modo:

gr. 10 di cloridrato di fenilendiamina e gr. 10 di diaciandiamide (circa il doppio della quantità equimolecolare) furono sciolti in 100 cc di acqua e la soluzione si fece bollire a ricadere per 5-6 ore; l'ammoniaca che si forma va via e quindi non ha luogo di reagire, come in tubo chiuso, sopra una parte della diciandiamide in concorrenza colla fenilendiamina. Finita la reazione si precipitò la base colla soda caustica e si ricristallizzò due volte dall'acqua con un po' di carbone animale. Quando la sostanza è greggia o non ben purificata effettivamente dà una soluzione giallina, ma questa impurezza si può togliere oltre che con ripetute cristallizzazioni, anche sciogliendo la base in acido cloridrico diluito ed aggiungente una piccola quantità di nitrito alcalino: quel poco acido nitroso che si sviluppa, attacca di preferenza l'impurezza distruggendola e colla soda si ottiene la base che cristallizzata dall'acqua è in lamine lucenti madreperlacee che si decompongono a 254°. Per le altre proprietà della sostanza e per i suoi sali rimando alla Nota di Ziegelbauer ed alla mia sui *Derivati della melamina* di prossima pubblicazione.

Azione dell'acido nitroso sulla fenilenbiguanide.

Gr. 5 di fenilenbiguanide furono sciolti in 100 cc. di acqua coll'aggiunta di 10 cc. di acido cloridrico concentrato e quindi si aggiunsero a diverse riprese a freddo gr. 2,5 di nitrito potassico (circa 1 mol.). Il liquido si fece giallino con lento sviluppo di azoto e dopo poco si vide separarsi una sostanza cristallina leggera che fu raccolta dopo 24 ore: il liquido coll'aggiunta di gr. 1,25 di nitrito alcalino dette ancora nuovo prodotto che in tutto era gr. 3,91 con un rendimento dell'81,4 % del teorico: nelle acque madri non si trovò neppur traccia di fenilenguanilurea. La fenilen-β-cianguanidina così ottenuta purificata dall'acqua bollente con un po' di carbone animale si ebbe nei caratteristici aghi sottili, lunghi, splendenti, elastici già descritti da P. e G. decomponibili fra 250° e 260°:

gr. 0,2646 di sostanza dettero gr. 0,5869 di anidride carbonica e gr. 0,0956 di acqua;
gr. 0,0566 di sostanza dettero 17,3 cc. di azoto a 17° e 760 mm.;
trovato % C = 60,77; H = 4,07; N = 35,45;
calcolato per la fenilencianguanidina C = 60,75; H = 3,79; N = 35,44.

Una parte della fenilencianguanidina così ottenuta sciolta in acqua e potassa secondo le indicazioni di P. e G. (loc. cit., pag. 180) per azione del bromuro di cianogeno fu trasformata in fenilendicianguanidina identica a quella ottenuta dalla fenilidrazina. Come metodo pratico di preparazione credo però sia preferibile quello dalla fenilidrazina.

In una prossima Nota riferirò sopra esperienze eseguite con successo per generalizzare la reazione dell'acido nitroso sopra altri composti guanidici.

Matematica. — *Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie. IV: Rappresentazione tipica dei covarianti.* Nota di ANNIBALE COMESSATTI, presentata dal Corrisp. F. SEVERI [1].

13. Il problema di raccogliere l'insieme delle forme invariantive dedotte da una o più forme originarie, in un campo di razionalità o d'integrità a base finita, può, per la sua importanza, e per il vasto contributo apportatovi da eminenti Autori, considerarsi come fondamentale per la teoria che ci occupa.

Prima che Gordan, nel 1868, pervenisse a stabilire l'esistenza di *sistemi completi di forme invariantive* inerenti ad una data binaria f, mediante le quali tutte le altre si esprimono in modo razionale intero, un passo importante, nel dominio di razionalità, era stato fatto da Hermite mediante la *rappresentazione tipica* [2].

Il teorema di Hermite stabilisce che ogni covariante (ed invariante) di f è eguale ad una funzione intera di f e di certi $n - 1$ covarianti $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_n$ *divisa* per una potenza della f stessa. Esso è stato successivamente perfezionato da Clebsch che sostituì al primitivo sistema dei *covarianti associati* (ad f) di Hermite, altri sistemi notevolmente più semplici [3].

Nel nostro ordine di vedute, i problemi accennati s'interpretano come inerenti alla ricerca d'una *base* per le *ipersuperficie o forme seminvarianti*,

[1] Presentata nella seduta del 16 dicembre 1920.

[2] Hermite, *Second Mémoire sur les fonctions homogènes à deux indéterminées* [Journal für Mathematik, LII (1856), pp. 18-38], § III.

[3] Cfr. Clebsch, *Binären Formen* (cit.), Cap. VII.

intendendo come tali quelle forme dello $S_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ che si ottengono eguagliando a zero un seminvariante di f. E invero, come segue dal teorema di Bruno dimostrato al n. 5, ogni relazione algebrica tra seminvarianti produce una relazione formalmente identica tra i relativi covarianti, e viceversa.

È da una tale concezione del problema, convenientemente trasformata ed elaborata, che mi propongo di dedurre in questa Nota la rappresentazione tipica dei covarianti.

14. Riprendiamo la considerazione del *gruppo Ω delle similitudini* di C^n che caratterizza i seminvarianti di f. Diremo che due punti P e Q di S^n sono *equivalenti* rispetto a tal gruppo, se esiste in esso qualche trasformazione *non degenere* che muta P in Q.

L'insieme dei punti di S_n equivalenti ad un generico punto P, inclusivi per ovvie ragioni d'algebricità anche i punti limiti di successioni di punti equivalenti a P (1), è una superficie algebrica F variabile in un sistema algebrico M, ∞^{n-2}, d'indice 1.

Una ipersuperficie seminvariante Δ_U di S_n, contiene ovviamente la F passante per un suo punto generico; sicchè se le F si concepiscono come elementi d'una varietà W_{n-2} (*algebrica*, anzi, come vedremo tra poco, *razionale*) la Δ_U è ivi rappresentata da una V_{n-3}, e viceversa ad ogni V_{n-3} di W (escluse eventualmente convenienti V_{n-3} *fondamentali*) corrisponde un seminvariante di f.

Possiamo anche sostituire alla W l'*involuzione* segata dalle F sopra una V_{n-2} di S_n, ad esempio sopra uno spazio lineare S_{n-2}; la determinazione dei seminvarianti di f si riduce allora a quella delle V_{n-3} *appartenenti* a tale involuzione.

15. Indichiamo con S uno spazio S_{n-2} passante per lo S_{n-3} osculatore a C^n in U e non contenuto nello S_{n-1} osculatore $a_0 = 0$. Assunto questo S_{n-3} come spazio improprio entro S coll'introduzione di coordinate non omogenee $z_i = \frac{a_i}{a_0}$, le equazioni di S saranno del tipo $z_1 = m_1$, $z_2 = m_2$.

Tenendo conto delle equazioni di Ω, che, a norma del n. 2, si possono scrivere p. es. sotto la forma

$$(8) \qquad \lambda^i z_i' = \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} z_h \mu^{i-h}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n \; ; \; z_0 = 1),$$

(λ, μ parametri), si stabiliscono facilmente le proprietà seguenti:

a) Se non è $m_1^2 - m_2 = 0$, cioè se S non è uno spazio generatore del *cono seminvariante hessiano* $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$, esiste una ed una sola

(1) L'omologo di P per una trasformazione degenere di Ω può essere indeterminato, ma non lo è se quella trasformazione si considera come limite d'una trasformazione non degenere, per una variazione continua dei parametri.

trasformazione di Ω che muta un punto proprio P di S in un altro punto (non dato) di S, e questa è l'involuzione di Ω corrispondente ai valori $\lambda = -1$, $\mu = -2m$, dei parametri;

b) ogni punto proprio d'un generico S è equivalente a *due* ben determinati punti pure proprî d'un altro S generico.

Dalla *a*) segue che ogni F del sistema M, sega S, fuori di punti fissi (improprî) in *due* punti coniugati in una involuzione I_2 generata da una proiettività involutoria (e perciò *razionale*). Se in particolare, come faremo in seguito, si pone $m_1 = 0$, $m_2 = 1$ le equazioni della proiettività generante I_2, che si ottengono dalla (8) per $\lambda = -1$, $\mu = 0$, sono

$$(9) \qquad z'_i = (-1)^i z_i, \qquad (i = 3, 4, \dots, n).$$

L'osservazione *b*) permette di determinare quali sono le forme seminvarianti che segano un prefissato S generico soltanto in punti improprî. In forza della *b*) esse devono comportarsi analogamente rispetto agli altri S generici, e quindi son *coni* aventi per vertice lo S_{n-3} osculatore a C^n in U, cioè corrispondono a covarianti $n-2$ conici. Tali covarianti sono *proiezioni* (n. 6) di covarianti delle forme quadratiche e quindi si riducono alla *forma*, all'*hessiano* o a prodotti di loro potenze intere e positive; di guisa che i seminvarianti cercati sono del tipo $a_0^\alpha (a_0 a_2 - a_1^2)^\beta$.

16. Sia ora Φ un covariante di f, φ il relativo seminvariante. L'ipersuperficie $\varphi = 0$ segherà su $S(z_1 = 0, z_2 = 1)$ una V_{n-3} mutata in sè dalla (9), cioè *appartenente* all'involuzione I_2; e viceversa, data una tale V_{n-3}, applicando ad essa le trasformazioni di Ω se ne dedurrà una forma seminvariante φ.

Ne segue che due seminvarianti i quali seghino su S, fuori d'intersezioni improprie, la stessa V_{n-3} non possono differire che per fattori del tipo $a_0^\alpha (a_1^2 - a_0 a_2)^\beta$, giacchè, per quanto precede, ogni loro parte irriducibile è *individuata* dalla sua intersezione con S, a meno che questa non si riduca allo S_{n-3} improprio.

17. Indichiamo ora con

$$(10) \qquad \psi(z_3, z_4, \dots, z_n) = 0,$$

l'equazione della V_{n-3} staccata su S dal seminvariante φ. Come faremo a dedurne l'espressione di φ?

Anzitutto converrà tener conto che la (10) dev'essere mutata in sè dalla proiettività (9); e perciò occorre e basta che *in ogni termine della* (10) *il numero dei fattori d'indici dispari abbia la stessa parità.*

Inoltre le considerazioni precedenti suggeriscono di cercare delle formule che esprimano le coordinate d'un punto di S in funzione di quelle del generico punto equivalente di S_n. Sostituendo quelle espressioni al posto delle z nel primo membro della (10), e riducendo a forma intera, dovrà

ottenersi, a meno di fattori o divisori del tipo $a_0^\alpha(a_0 a_2 - a_1^2)^\beta$, il cercato seminvariante φ.

18. A conferma delle previsioni, veniamo agli sviluppi effettivi. Poniamo nelle (8) $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_i' = \frac{a_i}{a_0}$, e risolviamole rispetto a $z_3, z_4, \dots, z_n$ *eliminando* λ, μ, Avremo con qualche calcolo

$$(11)\qquad z_i = g_i g_2^{-\frac{i}{2}}, \qquad (i = 3, 4, \dots, n),$$

le forme g_i delle variabili a_i essendo date dalle espressioni

$$(12)\qquad g_i = (-1)^i \sum_{h=0}^{i} (-1)^h \binom{i}{h} a_0^{h-1} a_1^{i-h} a_h. \qquad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Poichè gli S_{n-3} coordinati $z_3 = 0$, $z_4 = 0, \dots, z_n = 0$ sono mutati in sè dalla (9), così $g_3, g_4, \dots, g_n$ saranno seminvarianti di f; e lo stesso può dirsi di g_2 giacchè, come si ricava dalla (12) $g_2 = a_0 a_2 - a_1^2$, è il *seminvariante hessiano* di f.

Tratteniamoci brevemente su questi seminvarianti, e sui corrispondenti covarianti che indicheremo con $G_2, G_3, \dots, G_n$.

Anzitutto, poichè g_i è di grado e peso uguali ad i, dalla formula $m = 2p - nl$ (¹) che dà l'ordine m d'un covariante in funzione del grado l, e del peso p del suo termine principale, abbiamo:

Il covariante G_i *ha grado* i *ed ordine* $(n-2)i$.

Inoltre poichè g_i non contiene $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n$, così si ha che:

Il covariante G_i *è* $n - i$ *conico e si ottiene per proiezione dal covariante analogo delle forme d'ordine* i. *L'unico covariante non conico è* G_n, *che ha rango* 1.

L'interpretazione geometrica dei covarianti trovati, si riduce dunque a quella di G_n, che può così enunciarsi:

L'ipersuperficie Δ_P *relativa al covariante* G_n *è caratterizzata dalle proprietà seguenti*:

1) *È d'ordine* n *ed ha come spazio* $(n-1)$*-plo lo* S_{n-1} *osculatore a* C^n *in* P;

2) *Passa semplicemente per la* C^n *toccandone in ogni punto lo* S_{n-1} *osculatore.* Omettiamo la semplice analisi formale dimostrativa (²).

(¹) Questa formula può dimostrarsi geometricamente, ma ci dispensiamo dal farlo, per brevità.

(²) I nostri covarianti G_i moltiplicati per f, dànno i covarianti *associati ad* f di Hermite. Cfr. i termini principali dati dalla (12) con quelli assegnati per $n = 2, 3, 4, 5$ dal predetto A, nella citata Memoria. I G_i stessi coincidono poi coi covarianti che Clebsch al Cap. VII del suo trattato indica con φ_i, come prova una opportuna verifica.

19. Sostituiamo ora nel primo membro della (10) al posto delle z_i le loro espressioni (11). Eseguendo i calcoli, e tenuto conto della condizione a cui deve soddisfare ψ, si trova che il numeratore della trasformata è una forma $\Psi(g_2, g_3, \dots, g_n)$, *isobarica* nelle g, e tale che ponendovi $a_1 = 0$, $a_0 = a_2$ $(z_1 = 0, z_2 = 1)$ se ne deduce la ψ resa omogenea e moltiplicata per una potenza di a_0. Ne segue che il seminvariante Ψ stacca su S la stessa V_{n-3} segata da φ (a meno d'intersezioni improprie); e pertanto si ha (n. 16)

$$\varphi \equiv a_0^\alpha g_2^\beta \Psi(g_2, g_3, \dots, g_n) \qquad (\alpha, \beta \text{ interi}).$$

Se β fosse negativo, il polinomio Ψ nelle $a_0, a_1, \dots, a_n$ dovrebbe risultare divisibile per g_2^β; ma basta porre $a_1 = 0$ tenendo conto delle (12) per riconoscere che ciò può avvenire solo se la condizione di divisibilità è soddisfatta considerando Ψ come funzione di $g_2, g_3, \dots, g_n$.

In altre parole $g_2^\beta \Psi$ è pure funzione intera (e isobarica) delle g; indicandola ancora con Ψ, e passando dai seminvarianti ai covarianti, avremo dunque il teorema:

Ogni covariante od invariante Φ d'una forma binaria f d'ordine n può rappresentarsi coll'espressione

$$\Phi \equiv f^\lambda \Psi(G_2, G_3, \dots, G_n),$$

nella quale λ è un numero intero positivo o negativo, e Ψ una forma isobarica degli $n-1$ covarianti G_i i cui termini principali sono dati dalla (12).

Matematica. — *Sur le théorème d'existence des fonctions abéliennes.* Nota di S. LEFSCHETZ, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Dans cette Note, écrite sur l'invitation très aimable de M. Castelnuovo, j'avais d'abord l'intention d'exposer ma solution de la question qu'il traite dans ce même fascicule des Rendiconti, telle que je l'avais donnée dans mon Mémoire Bordin. À la réflexion il m'a paru plus intéressant de revenir sur la question et de montrer, ce que je n'avais pu faire alors faute de temps, comment ma méthode permet d'arriver au théorème fondamental de la théorie des fonctions abéliennes en se basant *uniquement* sur les propriétés de définition de ces fonctions.

Soit donc Ω une matrice à p lignes et $2p$ colonnes et $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une fonction de p variables complexes. On suppose que

a) Le parallélépipède aux périodes, U, correspondant à Ω de la manière usuelle, est à $2p$ dimensions, fermé.

b) La fonction φ est entière ou méromorphe, avec au moins *un* zéro, l'ensemble de *tous* ses zéros restant invariant quand on ajoute les périodes aux u.

c) Il n'existe pas de combinaison linéaire des u s'annulant en tout point de cet ensemble.

Il s'agit de montrer, en partant de ces seules hypothèses, que Ω est, selon la locution maintenant classique de M. Scorza, une matrice de Riemann — c'est là le théoreme fondamental.

2. Il résulte d'abord de suite de *b*) que l'ensemble des zéros forme une multiplicité analytique à $2p-2$ dimensions. Considérant les éléments de la frontière de U qui sont parallèles, comme homologues au sens usuel de l'Analysis Situs, on définit une multiplicité fermée que nous appelerons toujours U. Numérotons les arètes partant d'un même sommet. $1, 2, \ldots, 2p$, la μ^e correspondant à la μ^e colonne de Ω. Les faces à k dimensions forment base minima pour les cycles à k dimensions — nous les désignerons par $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, les indices entre parenthèses étant ceux des arètes correspondantes, leur ordre définissant l'orientation de la face.

3. La multiplicité E lieu des zéros de φ intérieurs à U en est un cycle à $2p-2$ dimensions.

Comptons maintenant avec Poincaré les points d'intersection de deux multiplicités M, M', positivement ou négativement suivant l'orientation relative des multiplicités en ces points, le nombre total ainsi obtenu étant désigné par (M, M'). En particulier posons $(E, (\mu, \nu)) = m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$. Les m seront tous des entiers finis pour un choix convenable du système « primitif » de périodes, donc pour tout autre aussi. En se servant de la propriété que $(M, M') = 0$ si $M \sim 0$ ou $M' \sim 0$, on trouve aisément

$$E \sim \Sigma (-1)^n \cdot m_{i_1 i_2} (i_3, i_4, \ldots, i_{2p});$$

$(i_1 < i_2 ; i_3 < i_4 < \cdots < i_{2p}$; n nombre de permutations dans la série des i).

La fonction $\varphi(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$ a exactement les mêmes propriétés que φ, et il y a un cycle correspondant $\sim E$ — désignons par E^2 son intersection avec le premier, en adoptant une définition convenable pour son orientation. On trouve de même

$$E^2 \sim 2\, \Sigma (-1)^n m_{i_1 i_2} m_{i_3 i_4} (i_5, i_6, \ldots, i_{2p})$$

$$(i_1 < i_2 ; i_3 < i_4 ; i_5 < i_6 < \cdots < i_{2p}).$$

Ceci peut-être continué et on trouve finalement

$$E^{p-1} \sim \frac{(p-1)!}{2\pi} \Sigma M_{\mu\nu} (\mu, \nu)$$

où $M_{\mu\nu}$ est le coefficient de $m_{\mu\nu}$ dans le développement du déterminant de

la forme alternée à coefficients entiers

$$F = \Sigma m_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

et π en est le pfaffien. La forme alternée à coefficients entiers

$$\Phi = \Sigma M_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$$

est donc l'inverse de F.

4. On montre maintenant facilement que

$$\frac{2\pi}{(p-1)!} \int\int_{E^{p-1}} du_j \, du_k = \Sigma M_{\mu\nu} \omega_{j\mu} \omega_{k\nu} = 0 .$$

De plus soient $v = v' + iv''$ une combinaison linéaire quelconque des u, $\xi_\mu + i\eta_\mu$ sa période correspondant à la μ^e colonne de Ω, $x = x' + ix''$ une fonction analytique de point sur E^{p-1}. On a

$$\frac{2\pi}{(p-1)!} \int\int_{E^{p-1}} dv' \, dv'' = \frac{2\pi}{(p-1)!} \int\int_{E^{p-1}} \left[\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)^2 \right] dx \, dy$$
$$= \Sigma M_{\mu\nu} \xi_\mu \eta_\nu \neq 0$$

et par suite Ω, qui possède la forme principale Φ, est bien une matrice de Riemann. *Le théorème fondamental est donc démontré.*

Dans le cas de M. Castelnuovo on démontre que ses coefficients $m_{\mu\nu}$ ont bien le sens que nous leur avons attribué d'où son résultat s'ensuit.

Disons seulement pour terminer que par cette méthode on obtient tous les éléments d'une exposition de la théorie des fonctions abéliennes où l'on se passerait presque complètement des formules assez compliquées de la théorie des fonctions thêtas.

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* I: *Le funzioni intermediarie.* Nota del Socio G. Castelnuovo.

Il prof. Lefschetz, nella Memoria ancora inedita che ottenne il premio Bordin dall'Accademia di Parigi, stabilì alcuni importanti risultati sulle funzioni abeliane, con un metodo molto notevole fondato su considerazioni di *Analysis Situs*, del quale trovasi un cenno nella Nota che precede questa mia. Io stesso ero arrivato da qualche tempo ad analoghi risultati seguendo una via puramente analitica, che fu, a dir vero, già indicata dal Frobenius, ma qui viene sfrondata da parti accessorie, notevolmente proseguita, e messa in maggior luce ricorrendo alle geniali vedute dello Scorza e al linguaggio della geometria algebrica. La stessa via permette di esten-

dere e semplificare i procedimenti applicati dal sig. Humbert al caso di due variabili ([1]). Ritengo perciò opportuno raccogliere le mie ricerche in questa Nota e in altre successive.

1. Data una matrice di p righe e $2p$ colonne a elementi complessi

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \omega_{11} & \cdots\cdots & \omega_{1\,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{p1} & \cdots\cdots & \omega_{p\,2p} \end{vmatrix},$$

la costruzione di una funzione abeliana di p variabili, la quale ammetta i $2p$ sistemi di periodi forniti dalle verticali della (1), può ricondursi, come è noto, alla costruzione di funzioni *intermediarie*, cioè funzioni olomorfe al finito $\varphi(u_1, \ldots, u_p)$ dotate di una quasi-periodicità definita dalle $2p$ uguaglianze

$$(2)\qquad \varphi(u_1 + \omega_{1l}, \ldots, u_p + \omega_{pl}) \\ = \varphi(u_1, \ldots, u_p)\, e^{-2\pi i(\lambda_{1l}u_1 + \cdots + \lambda_{pl}u_p) + \mu_l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Le λ e le μ sono costanti, quest'ultime prive di interesse.

Sotto quali condizioni esistono siffatte funzioni?

Supposto che esista la funzione $\varphi((u))$ soddisfacente alle (2), formiamo coi *periodi* ω e colle λ (dette talvolta *periodi di seconda specie*) il determinante

$$(3)\qquad \delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \cdots\cdots & \omega_{1\,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{p1} & \cdots\cdots & \omega_{p\,2p} \\ \lambda_{11} & \cdots\cdots & \lambda_{1\,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{p1} & \cdots\cdots & \lambda_{p\,2p} \end{vmatrix}.$$

Vedremo che δ è un intero; potremo supporre $\delta \geqq 0$, eseguendo, se occorre, uno scambio tra due verticali del determinante. Chiameremo δ il *determinante* della funzione φ.

Si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

a) Le espressioni

$$(4)\qquad \omega_{1i}\lambda_{1k} - \omega_{1k}\lambda_{1i} + \cdots + \omega_{pi}\lambda_{pk} - \omega_{pk}\lambda_{pi} = m_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2p)$$

([1]) Frobenius, Journal für d. r. u. a. Mathem., vol. *97* (1883); Humbert, Journal de Math. (V^e s.), voll. *5* e *6* (1899-1900); Scorza, Rendic. Circolo Matem. di Palermo, tomo *41* (1916). Mentre correggo le bozze mi giunge la notizia della morte di G. Humbert. Invio un reverente saluto alla memoria di questo scienziato, le cui belle ricerche sulle funzioni abeliane hanno ispirato, nell'ultimo decennio, tanti lavori della scuola italiana.

hanno valori interi (detti *interi caratteristici* della φ); si giustifica calcolando in due modi diversi, mediante le (2), $\varphi((u_h + \omega_{hi} + \omega_{hk}))$.

b) Segue, eseguendo opportunamente il quadrato della (3),

$$\delta^2 = \|m_{ik}\| \qquad (m_{ik} = -m_{ki}). \tag{5}$$

Dunque δ è un numero intero, uguale (fatta astrazione dal segno) al pfaffiano del determinante sghembo simmetrico (5).

c) Se alle variabili u_h e ai periodi ω_{hi} si sostituiscono loro combinazioni lineari indipendenti U_h, Ω_{hi}, anche i periodi di seconda specie λ subiscono una trasformazione lineare, ma non mutano nè gli interi caratteristici m_{ik}, nè δ.

d) La funzione φ moltiplicata per un esponenziale ad esponente quadratico nelle u, $e^{-\pi i \Sigma \alpha_{ik} u_i u_k}$, fornisce una nuova funzione intermediaria cogli stessi periodi di prima specie ω; i periodi di seconda specie si alterano, ma non mutano nè le m_{ik}, nè δ.

e) Si eseguisca sulle verticali della matrice (1) una sostituzione a coefficienti interi e determinante non nullo:

$$\omega'_r = a_{r1}\,\omega_1 + \cdots + a_{rp}\,\omega_{2p} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p); \tag{6}$$

in queste è omesso il primo indice delle ω, ω', il quale deve avere lo stesso valore $(1, 2, \ldots, p)$ a sinistra e a destra. La φ può considerarsi come una funzione intermediaria delle variabili u coi nuovi periodi ω'. I periodi di seconda specie subiscono la medesima trasformazione lineare, e gli interi caratteristici m_{ik} si mutano in nuovi interi caratteristici m'_{ik} colla legge secondo la quale i coefficienti della forma alternata

$$\Sigma\, m_{ik}\, \xi_i\, \eta_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2p) \tag{7}$$

si mutano nei coefficienti della forma alternata $\Sigma m'_{ik} \xi'_i \eta'_k$ quando si passa dalle variabili ξ, η alle ξ', η' mediante la sostituzione (6). Il determinante δ si muta in $\delta' = \delta\, \|a_{rs}\|$.

2. La forma alternata (7), che diremo collegata alla φ, ha un significato notevole relativamente alla matrice (1). Per metterlo in rilievo riguardiamo, collo Scorza, le orizzontali della (1) come contenenti le coordinate omogenee di p punti di uno spazio lineare S_{2p-1}, i quali determinano ivi uno spazio S_{p-1} che indicheremo con τ. Siano poi le ξ e le η coordinate di due iperpiani (S_{2p-2}) passanti per τ, tali adunque che

$$\sum_{i=1}^{2p} \xi_i\, \omega_{hi} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{2p} \eta_k\, \omega_{hk} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p). \tag{8}$$

Moltiplicando i due membri della (4) per $\xi_i \eta_k$ e sommando rispetto agli indici i, k, si trova

$$\Sigma\, m_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0\,.$$

Questa rappresenta una reciprocità nulla (inviluppo) in S_{2p-1}, la quale muta ogni iperpiano passante per τ in un punto di τ. Segue, se $\delta \neq 0$, che la detta reciprocità nulla, considerata come luogo e rappresentata dall'annullarsi della forma reciproca

$$(9) \qquad \Sigma M_{ik}\, x_i\, y_k\,,$$

dove M_{ik} è il complemento algebrico di m_{ik} entro $||m_{ik}||$, muta ogni punto di τ in un iperpiano per τ. Dunque la (9) si annulla se al posto delle $(x_1, \ldots, x_{2p})$, $(y_1, \ldots, y_{2p})$ poniamo gli elementi di due righe qualsiansi della matrice (1). La forma (9) è, secondo lo Scorza, una *forma alternata di Riemann* della matrice (1). L'esistenza supposta di una funzione intermediaria cogli interi caratteristici m_{ik} porta l'esistenza di una tal forma, cioè di una relazione alternata tra le orizzontali della matrice.

3. È noto che con una opportuna sostituzione lineare a coefficienti interi, del tipo (6) e di modulo $||a_{rs}|| = \pm 1$, eseguita nel tempo stesso sulle ξ e le η, la forma alternata (7) si muta nella forma canonica

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{p} e_i(\xi'_i\, \eta'_{i+p} - \xi'_{i+p}\, \eta'_i)$$

dove le e_i sono interi positivi. La stessa sostituzione applicata ai periodi ω li muta in periodi ω' tali che, rispetto ad essi, la funzione intermediaria φ ha i nuovi interi caratteristici (n. 1, e)

$$(11) \qquad m'_{i,i+p} = e_i \quad , \quad m_{ik} = 0 \quad \text{se} \quad k - i \neq \pm p\,.$$

La forma di Riemann (9) si trasforma (salvo un fattore intero) nella nuova forma di Riemann

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{e_i}(x_i\, y_{i+p} - x_{i+p}\, y'_i)\,,$$

che si annulla se vien costruita coi periodi ω' di due orizzontali qualsiansi della nuova matrice.

Riduciamo questa alla forma canonica

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} e_1 & 0 & \ldots & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1p} \\ 0 & e_2 & \ldots & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & e_p & \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \ldots & \sigma_{pp} \end{vmatrix} \qquad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki})$$

con una trasformazione lineare eseguita contemporaneamente sulle variabili u e sulle orizzontali della matrice (1) (n. 1, c). La $\varphi((u))$ si muterà in una nuova funzione intermediaria $\varphi_1((U))$ coi periodi di prima specie (13) e gli interi caratteristici (11). Moltiplicando φ_1 per un esponenziale del tipo $e^{-\pi i \Sigma \alpha_{ik} U_j U_k}$ (n. 1, d), si ottiene una terza funzione intermediaria $\varphi_2((U))$ coi periodi di prima specie (13), gli interi caratteristici (11) e certi periodi di

seconda specie λ'_{ik}, dei quali si può supporre (scegliendo opportunamente i parametri α_{ik}), che siano nulli tutti quelli per cui $i - k \geqq 0$. Allora, tenendo presenti le (11), si vede che per questa φ_2 il determinante (3), il cui valore non è cambiato, assume l'aspetto

$$(14) \qquad \delta = \begin{vmatrix} e_1 \dots 0 & \sigma_{11} \dots \sigma_{1p} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 \dots e_p & \sigma_{p1} \dots \sigma_{pp} \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix} \qquad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki})\,;$$

e le proprietà di periodicità si presentano sotto la forma semplicissima

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2(U_1, \dots, U_l + e_l, \dots, U_p) = \varphi_2(U_1, \dots, U_l, \dots, U_p) \\ \varphi_2(U_1 + \sigma_{1l}, \dots, U_p + \sigma_{pl}) = \varphi_2(U_1, \dots, U_p)\, e^{-2\pi i U_l + \nu_l} \end{array} \right. \quad (l = 1, 2 \dots p)$$

4. Se $\delta = 1$ e quindi $e_1 = \dots = e_p = 1$, la φ_2 è una funzione Θ del primo ordine relativa ai periodi (13). In caso opposto eseguiamo la trasformazione di variabili

$$(16) \qquad U_l = \delta v_l = e_1 \dots e_p\, v_l$$

ed assumiamo come nuovi periodi i numeri della tabella

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} 1 \dots 0 & \tau_{11} \dots \tau_{1p} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ 0 \dots 1 & \tau_{p1} \dots \tau_{pp} \end{vmatrix} \qquad \left(\tau_{ik} = \tau_{ki} = \frac{\sigma_{ik}}{\delta}\right).$$

La $\varphi_2((U))$ diviene una funzione $\Theta((v))$ che soddisfa alle seguenti relazioni:

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \Theta(v_1, \dots, v_l + 1, \dots, v_p) = \Theta(v_1, \dots, v_l, \dots, v_p) \\ \Theta(v_1 + \tau_{1l}, \dots, v_p + \tau_{pl}) = \Theta(v_1, \dots, v_p)\, e^{-2\pi i \delta v_l + \nu'_l} \end{array} \right. \quad (l = 1, 2, \dots p)$$

Si tratta dunque di una funzione Θ, propriamente detta, avente l'ordine δ. È una Θ particolare, perchè si ha pure

$$(19) \qquad \Theta\left(v_1, \dots, v_l + \frac{e_l}{\delta}, \dots, v_p\right) = \Theta(v_1, \dots, v_l, \dots, v_p).$$

Si ricordi ora che per la esistenza di una funzione Θ coi periodi (17) è necessario (e sufficiente) che la forma alternata

$$(20) \qquad \sum_{i=1}^{p} (X_i Y_{i+p} - X_{i+p} Y_i)$$

assuma un *segno costante* (positivo) quando al posto delle X e delle Y si pongono le parti reali ed i coefficienti dell'unità immaginaria dei periodi di una combinazione lineare $\sum_{i=1}^{p} \varrho_i v_i$ delle variabili, *qualunque siano* i va-

lori attribuiti ai parametri ϱ. Ora, poichè la (20) è la trasformata della forma (9) attraverso le successive trasformazioni a coefficienti *reali* eseguite sulle x, y e sui periodi (1), segue che *la forma* (9) *conserva sempre lo stesso segno quando al posto delle x e delle y si pongano le parti reali ed i coefficienti dell'unità immaginaria dei periodi di una qualsiasi combinazione lineare delle variabili primitive $u_1, \dots, u_p$*. Diremo collo Scorza che la (9) è una forma riemanniana *principale* della matrice (1).

In conclusione, e tenuto conto che il ragionamento si può invertire, possiamo enunciare il teorema:

Affinchè esista una funzione intermediaria coi periodi (*di prima specie*) (1) *e gli interi caratteristici m_{ik} è necessario e sufficiente che la matrice* (1) *ammetta una forma alternata riemanniana principale, e precisamente la* (9), i cui coefficienti sono gli elementi del determinante aggiunto di $\|m_{ik}\|$.

Matematica. — *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie.* Nota IV di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo [1].

1. Dedico questa Nota alla *interpretazione geometrica degli invarianti Gaussiani* già introdotti [2] limitandomi ad accennare i risultati per le deformazioni di 2^a specie.

2. Data una superficie di S_n $(n \geq 5)$ con S_5 2-osculatore generico esiste in ogni punto P della superficie una normale ben determinata (che dirò normale ombelicale) e su di essa un punto (che dirò centro di curvatura ombelicale), contenuta nello S_5 2-osculatore in P, caratterizzati da una delle seguenti proprietà:

1) *La proiezione ortogonale della superficie sullo* S_3 *individuato dal piano tangente in* P *e dalla normale ombelicale ha in* P *un ombelico; il centro di curvatura della superficie proiezione nell'ombelico è il centro di curvatura ombelicale.*

2) *Tutti gli* S_{n-2} *normali alla superficie nei punti infinitamente vicini a* P *incontrano lo* S_5 2-*osculatore in* P *nel centro di curvatura ombelicale* (*relativo a* P).

[1] Presentata nella seduta del 16 dicembre 1920.

[2] Vedansi le 3 Note precedenti dallo stesso titolo; questi Rendic., vol. XXVIII, 2 e 3 nov. 1919; vol. XXIX, 18 genn. 1920. Ricordo che ho chiamato invarianti e covarianti Gaussiani quelli che pur contenendo derivate d'ordine $\nu+1$ delle coordinate dei punti della superficie sono tali per deformazioni di specie ν; cioè, mentre dipendono (apparentemente) dai coefficienti delle prime $\nu+1$ forme fondamentali, si possono calcolare mediante quelli di sole ν forme $L_1, \dots L_\nu$.

3) *La normale ombelicale è la normale al piano della conica delle curvature* [considerata dal Levi ([1])] *relativa al punto* P *condotta da* P; *e il centro ombelicale è il polo di questo piano rispetto alla sfera di raggio unitario e di centro* P *contenuta nello* S_3 *di* P *e della conica.*

4) *La congruenza delle normali ombelicali ad una superficie stabilisce una rappresentazione conforme fra essa e la superficie parallela costruita secondo quelle normali* (prendendo su ciascuna un segmento infinitesimo costante h); *il modulo della rappresentazione dipende soltanto dal raggio di curvatura ombelicale* (e, naturalmente, da h).

Se si prosegue con continuità la costruzione che fa passare da una superficie a quella parallela e infinitamente vicina secondo le normali ombelicali ([2]) si ottiene una V_3 dotata della notevole proprietà di avere le superficie del sistema costruito come quasi-asintotiche ([3]) nel senso che lo S_5 2-osculatore ad una di esse in un suo punto contiene lo S_3 tangente nel punto alla V_3; le loro traiettorie ortogonali (inviluppate dalle rette delle ∞^1 congruenze ombelicali) stabiliscono fra due qualsiansi di esse una corrispondenza conforme.

3. Se si indicano con $x_i(u, v)$ le coordinate cartesiane rettangolari dei punti della superficie, con D_2 la matrice (a 5 righe ed $n \geq 5$ colonne) formata con le loro derivate prime e seconde (che per ipotesi ha caratteristica 5, quindi $D_2^2 \neq 0$), i coseni direttori l_i della normale ombelicale in x, e il raggio di curvatura ombelicale ϱ sono dati da

$$l_i = \frac{H_i}{\sqrt{\Sigma H_i^2}} \quad ; \quad \varrho = \frac{\sqrt{\Sigma H_i^2}}{D_2^2} .$$

avendo posto

$$H_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} & \frac{\partial x_i}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} & 0 \\ E & F & [1020] & [1011] & [1002] & 0 \\ F & G & [0120] & [0111] & [0102] & 0 \\ [2010] & [2001] & [2020] & [2011] & [2002] & E \\ [1110] & [1101] & [1120] & [1111] & [1102] & F \\ [0201] & [0201] & [0220] & [0211] & [0202] & G \end{vmatrix}$$

([1]) E. E. Levi, *Saggio sulla teoria delle superficie* ecc. [Ann. Scuola Norm. di Pisa, vol. X], n. 37.

([2]) La congruenza delle normali ombelicali varia da superficie a superficie.

([3]) La nozione più generale di varietà quasi-asintotica entro una varietà qualsiasi è stata da me posta fin dal 1912; cfr. *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi* [Internat. Congress of Mathematicians, Cambridge, August 1912].

e $$[hklm] = \Sigma_i \frac{\partial^{h+k} x_i}{\partial u^h \, \partial v^k} \frac{\partial^{l+m} x_i}{\partial u^l \, \partial v^m} .$$

Il raggio di curvatura ombelicale ϱ è, naturalmente, un invariante (assoluto) della superficie per deformazioni di 2ª specie.

4. Ciò posto si trova facilmente che:

5) *Esistono infinite ipersfere* (V^2_{n-1}) *osculatrici ad una superficie in* P (cioè contenenti gli intorni di 1° e 2° ordine di P); *i loro centri sono nello* S_{n-5} *normale allo* S_5 *2-osculatore* (alla superficie in P) *condotto per il centro di curvatura ombelicale* (e NON per P).

6) *Se l'ambiente è uno* S_6 ($n = 6$) *fra le* ∞^1 *ipersfere osculatrici* (*che determinano in* P *una involuzione di terne di tangenti*) *ve ne sono* QUATTRO *tali che la loro sezione con la superficie nel punto* (*che è triplo*) *ha una tangente doppia.*

7) *L'inverso dei prodotti delle distanze dei loro 4 centri dallo* S_5 *2-osculatore* (*quindi dal centro ombelicale, e* NON *da* P), *per quanto involga derivate terze, è un invariante* (*assoluto*) *per deformazioni di 2ª specie ed è espresso da una frazione che ha per numeratore l'invariante Gaussiano* (*relativo*) *della 3ª forma fondamentale,*

$$4 (L_{30} L_{12} - L_{21}^2) (L_{21} L_{03} - L_{12}^2) - (L_{30} L_{03} - L_{21} L_{12})^2 ,$$

quindi

8) *se quest'invariante è nullo una almeno delle distanze indicate diviene infinita.*

Ma di più si possono caratterizzare proiettivamente le superficie (sempre di S_6) per le quali ciò accade. Infatti

9) *se i tre sistemi di quasi-asintotiche di una superficie di* S_6 *determinati su di essa dagli* S_5 *2-osculatori* (*cioè aventi per tangenti in ciascun punto le tangenti nel punto triplo della sezione determinata dallo* S_5) *si riducono a* DUE *soli distinti, cioè se esiste un sistema doppio di quasi-asintotiche, allora essa ha l'invariante Gaussiano per deformazioni di 2ª specie nullo; e viceversa.*

Se poi si avesse un solo sistema (triplo) di quasi-asintotiche, si annullerebbe, oltre l'invariante, il covariante Gaussiano e si ritroverebbe un risultato contenuto nella Nota II, n. 4.

5. È evidente l'analogia delle proprietà esposte in 6)-9) per le superficie di S_6 (in rapporto alle deformazioni di 2ª specie) con le proprietà delle superficie di S_3 (in rapporto alle ordinarie applicabilità).

Come per le superficie di S_3 (e soltanto per queste) si può dare una interpretazione geometrica della curvatura di Gauss per mezzo di misure eseguite nell'ambiente (fuori, quindi, della superficie) così per le superficie di S_6 si può costruire con elementi esterni ad esse un'interpretazione geo-

metrica dell'invariante Gaussiano relativo alla 3ª forma fondamentale; e il suo annullarsi è messo in rapporto [con le 8) 9)] ad un fatto proiettivo analogo a quello che caratterizza le sviluppabili. E anche qui, come per l'annullarsi della curvatura Gaussiana, il fatto metrico sussiste *sempre* in conseguenza della specializzazione proiettiva della superficie, ma non viceversa: solo per determinate dimensioni dell'ambiente (3 se si tratta di deformazioni di 1ª specie, 6 per quelle di 2ª) il fatto proiettivo è necessaria conseguenza di quello metrico.

6. Rappresentazione sferica delle superficie di S_6.

Si può fare una rappresentazione della superficie sull'ipersfera di raggio 1 servendosi delle normali agli S_5 2-osculatori alla superficie. È notevole il fatto che l'analogia ora messa in evidenza (fra le superficie di S_3 considerate rispetto alle applicabilità, e quelle di S_6 per le def. di 2ª specie) si conserva e si ha:

Il limite cui tende il rapporto fra l'area di un pezzo della superficie data e la corrispondente della superficie rappresentativa, al tendere della prima a zero, è un invariante Gaussiano (assoluto) per deformazioni di 2ª specie.

S'introducano le tre forme simboliche

$$L_3^{(u)} \equiv L_{30}\,du^2 + 2\,L_{21}\,du\,dv + L_{12}\,dv^2$$

$$L_3^{(v)} \equiv L_{21}\,du^2 + 2\,L_{12}\,du\,dv + L_{03}\,dv^2$$

(derivate dalla 3ª forma fondamentale L_3; v. Note precedenti)

$$C \equiv C_{20}\,du^2 + 2\,C_{11}\,du\,dv + C_{02}\,dv^2$$

nella quale i coefficienti sono le matrici ottenute da D_2 sopprimendovi successivamente le linee con le $\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}$, divise per $EG - F^2$; e s'indichino con $\omega^2(L_3^{(u)}, C)$, $\omega^2(L_3^{(v)}, C)$ le 2ᵉ spinte (invarianti simultanei) fra ciascuna delle prime due e la terza: detti e, f, g i coefficienti del ds'^2 della superficie rappresentativa sull'ipersfera è

$$ds'^2 = \frac{(EG - F^2)^2}{D_2^2} \Big\{ [\omega^2(L_3^{(u)}, C)]^2\,du^2 + 2\,\omega^2(L_3^{(u)}, C)\,\omega^2(L_3^{(v)}, C)\,du\,dv + [\omega^2(L_3^{(v)}, C)]^2\,dv^2 \Big\}$$

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \left[\frac{(EG - F^2)^{3/2}}{D_2^2}\right]^2 \Big\{ [\omega^2(L_3^{(u)}, C)]^2\,[\omega^2(L_3^{(v)}, C)]^2 - [\omega^2(L_3^{(u)}, C)\,\omega^2(L_3^{(v)}, C)]^2 \Big\}.$$

Nell'ultima parentesi $\}\ \{$ si possono far figurare i prodotti

$$(L_{3-\rho,\rho}\, L_{2\tau,\tau+1} - L_{2-\rho,\rho+1}\, L_{3-\tau,\tau})\,(L_{3-\sigma,\sigma}\, L_{2-\varepsilon,\varepsilon+1} - L_{2-\sigma,\sigma+1}\, L_{3-\varepsilon,\varepsilon}),$$

il che mette chiaramente in evidenza il carattere invariantivo del rapporto studiato per deformazioni di 2ª specie, pur essendo costruito con i coefficienti di L_3 (Nota I, n. 2).

7. A complemento di quanto precede e per metterne in luce l'interesse generale è da osservarsi che se una superficie di S_n ha come spazio $(\nu - 1)$-osculatore generico un S_ρ $(\varrho < n)$, mentre lo spazio ν-osculatore coincide con S_n, *non* sono movimenti tutte le deformazioni di specie $< \nu$, mentre lo sono quelle di specie ν.

Interpretazioni esterne (con costruzioni nell'ambiente) degli invarianti gaussiani per deformazioni di specie $\nu - 1$ si hanno per modelli della superficie in S_n con $n = \varrho + 1$.

I numeri ϱ e ν sono *invarianti proiettivo-differenziali* della superficie; da ciò hanno origine i legami già incontrati o semplicemente accennati [1] fra proprietà proiettive e metriche nella teoria delle deformazioni.

Matematica. — *Risoluzione del problema simmetrico di Dirichlet pel cilindro circolare.* Nota di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

Sia un cilindro circolare di raggio 1 ed altezza a avente per asse l'asse delle z. Scopo della presente Nota è di determinare la funzione armonica $V(r, z)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ simmetrica rispetto all'asse z, che prende in superficie determinati valori. Questi saranno dati sulle basi $z = 0$, $z = a$ da due funzioni $f(r)$, $\varphi(r)$ che si suppongono continue e sviluppabili in serie di funzioni cilindriche nell'intervallo $(0, 1)$ e precisamente sia

$$V(r, 0) = f(r) = A_0 + \sum_1^\infty A_n I_0(\alpha_n r), \tag{1}$$

$$V(r, a) = \varphi(r) = B_0 + \sum_1^\infty B_n I_0(\alpha_n r), \tag{2}$$

dove $I_0(x)$ è la funzione di Bessel di prima specie e d'ordine zero, e α_n $(n = 1, 2, \ldots)$ le radici della $I_0'(x) = 0$. Questi sviluppi sono convergenti in tutto l'intervallo, estremi compresi, e dànno anche per $r = 1$ i valori $f(1-0) = f(1)$, $\varphi(1-0) = \varphi(1)$ [3].

[1] V. le mie Note: *Determinazione delle superficie* ecc. [Ist. Lombardo, vol. LII, 1919, fasc. 16-18].

[2] Presentata nella seduta del 19 dicembre 1920.

[3] Vedi Dini, *Sulla serie di Fourier*. Pisa, 1880, pag. 189 e segg.

I valori della funzione $V(r, z)$ sulla superficie laterale siano dati da una funzione $\psi(z)$ continua e che si suppone sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo $(0, a)$: dovrà essere dunque

$$V(1, z) = \psi(z) \quad \text{con} \quad f(1) = \psi(0) \;,\; \varphi(1) = \psi(a) , \tag{3}$$

le due ultime esprimendo che la ψ si attacca con continuità alle f, φ, passando dalla superficie laterale alle basi.

1. Determinazione formale della V. — La $V(r, z)$ soddisfa alla equazione

$$\Delta^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 ; \tag{4}$$

di questa considero i seguenti tre tipi fondamentali di soluzioni:

$$\alpha z + \beta \quad , \quad (Ce^{kz} + De^{-kz})\, I_0(kr) \quad , \quad E \operatorname{sen} Kz\, I_0(iKr) ,$$

(con $\alpha, \beta, C, D, E, k, K$ costanti arbit arie) delle quali la prima evidente, la seconda ben nota [1], mentre la terza si ottiene dalla seconda ponendo $k = iK$, $C = -D = \frac{E}{2}$. Si osservi che $I_0(ix)$ è reale essendo $I_0(x)$ funzione pari. Poniamo allora

$$V(r, z) = \alpha z + \beta + \tag{5}$$

$$+ \sum_1^\infty E_n \operatorname{sen}\frac{n\pi z}{a}\, I_0\left(i\frac{n\pi r}{a}\right) + \sum_1^\infty (C_n e^{\alpha_n z} + D_n e^{-\alpha_n z})\, I_0(\alpha_n r) ,$$

dove le α_n hanno il significato detto prima, e $\alpha, \beta, E_n, C_n, D_n$ sono costanti da determinarsi. Dalla (5) per le (1) (2) avremo

$$V(r, 0) = \beta + \sum_1^\infty (C_n + D_n)\, I_0(\alpha_n r) = A_0 + \sum A_n I_0(\alpha_n r) ,$$

$$V(r, a) = \alpha a + \beta + \sum_1^\infty (C_n e^{\alpha_n a} + D_n e^{-\alpha_n a})\, I_0(\alpha_n r) = B_0 + \sum B_n I_0(\alpha_n r) ,$$

quindi per l'univocità degli sviluppi

$$\left\{\begin{aligned} &\beta = A_0 \quad , \quad \alpha = \frac{B_0 - A_0}{a} , \\ &C_n + D_n = A_n \quad , \\ &C_n e^{\alpha_n a} + D_n e^{-\alpha_n a} = B_n \quad , \end{aligned}\right. \tag{6}$$

[1] Vedi Beltrami, *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, Mem. Accad. Bologna, 1881, tomo II; oppure *Opere*, tomo III.

e di qui

$$C_n e^{\alpha_n z} + D_n e^{-\alpha_n z} = \frac{A_n(e^{\alpha_n(a-z)} - e^{-\alpha_n(a-z)}) + B_n(e^{\alpha_n z} - e^{-\alpha_n z})}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}}. \tag{6'}$$

Rimarranno da determinarsi i coefficienti E_n. Consideriamo perciò la funzione

$$F(z) = \frac{B_0 - A_0}{a} z + A_0 + \tag{7}$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{A_n(e^{\alpha_n(a-z)} - e^{-\alpha_n(a-z)}) + B_n(e^{\alpha_n z} - e^{-\alpha_n z})}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}} \cdot I_0(\alpha_n)$$

formata dalla parte lineare e dall'ultimo termine di V in (5) facendovi $r = 1$.

La funzione $\psi(z) - F(z)$ si annulla per le (1), (2), (3) per $z = 0$ e $z = a$: sviluppiamola in serie di Fourier (prolungandola come funzione dispari tra 0 e $-a$): avremo

$$\psi(z) - F(z) = \sum_1^\infty E'_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{a}. \tag{8}$$

Se vogliamo quindi che sia soddisfatta la prima delle (3) dovrà essere

$$E_n = \frac{E'_n}{I_0\left(i\frac{n\pi}{a}\right)}, \tag{9}$$

e con ciò il problema è formalmente risolto dalla (5) tenendo conto delle (6) (6') (7) (8) (9).

2. Validità della soluzione. — Dimostriamo in primo luogo che la serie (7) è equiconvergente nell'intervallo $(0, a)$ inclusi gli estremi. Spezziamo perciò la serie nella somma di quattro altre di cui la prima è

$$\sum A_n I_0(\alpha_n) \cdot H_n \quad \text{con} \quad H_n = \frac{e^{\alpha_n(a-z)}}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}}. \tag{10}$$

I numeri H_n sono positivi, qualunque sia z $(0 \leq z \leq a)$ e decrescenti al crescere di n, come si vede facilmente osservando che $H_n = e^{-\alpha_n z} \cdot K_n$ con

$$K_n = \frac{e^{\alpha_n a}}{e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a}},$$

e che

$$K_{n+1} - K_n = - \frac{e^{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)a} - e^{-(\alpha_{n+1} - \alpha_n)a}}{(e^{\alpha_{n+1}a} - e^{-\alpha_{n+1}a})(e^{\alpha_n a} - e^{-\alpha_n a})} < 0.$$

Consideriamo allora la serie convergente $\sum A_n I_0(\alpha_n)$ e, preso ε piccolo a piacere, determiniamo n in modo che

$$\left| \sum_{i=1}^{p} A_{n+i} I_0(\alpha_{n+i}) \right| < \frac{\varepsilon}{K_1} \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Applicando il lemma di Abel [1], avremo

$$(11) \qquad \left| \sum_{i=1}^{p} A_{n+i} I_0(\alpha_{n+i}) H_{n+i} \right| < \frac{\varepsilon}{K_1} H_{n+1} < \varepsilon \quad , \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

per la relazione precedente e perchè $\frac{H_{n+1}}{K_1} < 1$: quindi la (10) è equiconvergente per $0 \leq z \leq a$. Ragionando in modo analogo per le altre tre serie si dimostra completamente la nostra asserzione.

La stessa dimostrazione leggermente modificata mi permette di asserire che la seconda serie nella (5) è equiconvergente in tutto il rettangolo $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq a$.

Ritornando alla (7), questa come serie equiconvergente di funzioni continue rappresenta una funzione continua: questa è altresì sviluppabile in serie di Fourier. Infatti o essa non ha infiniti massimi e minimi e quindi, pel noto criterio di Dirichlet, è sviluppabile; nel caso contrario basta dimostrare, seguendo un criterio del Lipsichtz [2], che in ciascuno di questi eventuali punti β si ha per δ sufficientemente piccolo

$$|F(\beta + \delta) - F(\beta)| < A\delta^{\alpha}$$

essendo A una costante e α un numero positivo. La dimostrazione non è difficile applicando i criterî precedenti, quindi per brevità la tralascio.

Ammesso questo, sarà valida la (8) e la serie del secondo membro sarà equiconvergente nell'intervallo $0 \leq z \leq a$. Ma allora la seconda serie nella (5) diventa

$$(12) \qquad \sum E'_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{a} \cdot \frac{I_0\left(\frac{in\pi r}{a}\right)}{I_0\left(\frac{in\pi}{a}\right)}.$$

Ora, questa serie si ottiene dalla (8) moltiplicandone i termini per i numeri

$$L_n = \frac{I_0\left(\frac{in\pi r}{a}\right)}{I_0\left(\frac{in\pi}{a}\right)}.$$

Si osservi che

$$0 < L_n \leq 1 \qquad (0 \leq r \leq 1),$$

e che inoltre

$$L_{n+1} \leq L_n,$$

[1] Vedi Cesàro, *Corso di Analisi algebrica*. Torino, 1884, pag. 126.

[2] Vedi Picard, *Traité d'Analyse*, tomo I, 2ª ediz., pag. 245.

come si trova facilmente calcolando da $\frac{dL_n}{dn}$ (si considera n come variabile continua) e facendo vedere che essa è negativa: basta perciò sostituire a $I_0(ix)$ la sua espressione $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}$.

Ma allora, applicando il lemma di Abel, si può dimostrare che la serie (12) è equiconvergente nel rettangolo $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq a$: quindi la nostra (5), che è formata di serie equiconvergenti i cui termini sono funzioni armoniche, è, come è ben noto, una funzione armonica e soddisfa alle condizioni poste.

Chimica. — *Sulla trasformazione della magnesia leggera in magnesia pesante* [1]. Nota di N. Parravano e C. Mazzetti, presentata dal Socio E. Paternò [2].

È noto che la magnesia, quando venga calcinata, subisce una forte diminuzione di volume. Nei refrattari di magnesia che si usano nei forni metallurgici deve perciò, prima della messa in opera, provocarsi la trasformazione di MgO dalla forma meno densa in quella più densa.

Questa trasformazione è irreversibile ed è stata attribuita all'esistenza di due forme di ossido di magnesio le quali, oltre al peso specifico, hanno pure altre proprietà fisiche e chimiche differenti [3].

In che rapporto le due forme stiano fra loro e in che condizioni esse siano trasformabili l'una nell'altra non si conosce però con precisione. La prescrizione da tutti seguita di cuocere la magnesite a temperatura elevata prima di foggiarne refrattarî indica che la trasformazione della varietà leggera in quella pesante richiede un'alta temperatura per compiersi, mentre d'altra parte le misure di densità fatte da Ditte su MgO mantenuto a temperature crescenti da 350° a 1200° dimostrano la possibilità che la forma pesante si origini da quella leggera a temperature molto più basse di quelle comunemente adoperate in pratica per cuocere la magnesite.

La conoscenza delle condizioni esatte in cui si compie la trasformazione e delle cause che possono agire favorendola od ostacolandola sarebbe di notevole interesse, perchè essa potrebbe infatti dare utili indicazioni sul modo migliore come eseguire in pratica la cottura della magnesia.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

[2] Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

[3] Ditte, C. R, *73*, 111, 191, 270 (1871); id., *76*, 108 (1877); Anderson, J. Ch. S., *87*, 257 (1905); Mellor, Trans. Cera. Soc., *16*, 1918, parte I, 89; Fearnsides, id. id., pag. 97.

Si è creduto perciò opportuno compiere in questo senso una serie di ricerche su magnesie derivanti da magnesiti italiane e confrontarne il comportamento con quello dell'ossido di magnesio proveniente da carbonato quasi puro, e ciò per stabilire l'influenza che esercitano le varie impurezze sempre presenti nelle magnesiti.

A questo scopo è stata esaminata la velocità con cui si idrata MgO derivante dalla scomposizione di carbonati di diversa provenienza, mantenuti per tempi diversi a temperature successivamente crescenti da 800° a 1400°.

È noto infatti che i refrattarî di magnesia debbono le loro eccellenti qualità, fra l'altro, anche alla proprietà di idratarsi lentamente a contatto dell'acqua. Infatti l'uso della calce, che pure potrebbe fornire buoni refrattarî, non si è mai esteso appunto per la facilità con cui essa si spegne anche nella forma più compatta che può ottenersi quando la si calcina in presenza di piccole quantità di fondente come argilla ed ossido di ferro.

Sulla velocità di idratazione dell'MgO si conoscono solo i risultati ottenuti da P. De Mille Campbell [1] idratando l'ossido proveniente dalla calcinazione a temperature successivamente crescenti — fino a 1450° — di una magnesite naturale contenente: 1,24 % SiO_2, 1,32 % $Fe_2O_3 + Al_2O_3$, 1,94 % CaO. Dalle sue esperienze Campbell ha concluso, fra l'altro, che tra 1000° e 1100° si verifica una variazione nella costituzione dell'ossido di magnesio accompagnata da diminuzione marcata della velocità di idratazione. Il Campbell perciò in sostanza ha confermato l'esistenza di due forme di magnesia e ne ha fissato — nel caso del prodotto da lui studiato — il punto di trasformazione intorno a 1100°.

È stato esaminato da noi il comportamento dell'ossido risultante da carbonati che avevano le composizioni seguenti:

	I	II	III	IV	V
MgO	40,85	41,86	41.54	44,10	44,04
CaO	2,58	2.96	1,60	1,07	3,25
$Fe_2O_3 + Al_2O_3$.	assente	3,31	0,88	1,84	0,88
SiO_2	assente	0,90	10,10	0,46	3.42
Perdita per calcina .	56,34	50,80	45,64	52,30	48,33

Il prodotto I è stato acquistato in commercio; il II era stato fornito dalla Società « Magnesite » di Castiglioncello e proveniva dagli scavi a giorno in località Poggio Nocini: il III proveniva dalle cave di magnesite della ditta Sclopis in località « Givoletto »; il IV era stato fornito dalla Società Magnesite di Val d'Elsa e proveniva dalla miniera « Querceto » in Casale d'Elsa; il V era stato fornito dalla stessa Società « Magnesite » di Casti-

(1) J. Ind. Eng. Ch., *1*, 665 (1909); id. id., *10*, 595 (1918).

glioncello ed era stato estratto dalla galleria Cacciaguerra in località Massaccio [1].

Le esperienze saranno descritte estesamente altrove; qui ci limitiamo a riportane i risultati.

Si è trovato che la velocità di idratazione dell'MgO diminuisce:

1°) col crescere della temperatura di calcinazione,

2°) colla durata della calcinazione ad ogni temperatura,

senza che sia possibile osservare una discontinuità nella diminuzione di idratabilità in funzione della temperatura di cottura.

La velocità di idratazione dell'ossido proveniente dalla magnesite di Poggio Nocini (Castiglioncello) è molto minore che nel caso del carbonato puro, ed è influenzata in misura molto maggiore dalla durata di cottura. Tra 1000° e 1100° la velocità di idratazione, invece di continuare a diminuire in maniera regolare o diminuisce più lentamente o addirittura cresce per poi tornare a diminuire.

Evidentemente, tra 1000° e 1100°, si compiono reazioni fra gli ossidi di Mg e Ca e quelli di Si, Al, Fe con formazione di silicati, alluminati, ferriti, suscettibili non solo di idratarsi, ma di assorbire acqua in maggiore quantità e più facilmente di MgO e CaO.

Questi risultati permettono di trarre varie conclusioni:

1°) L'affermazione che l'ossido di magnesio si trasforma verso i 1600° [2] o verso i 1100° [3] è certamente inesatta. La trasformazione si inizia già alla prima temperatura da noi sperimentata (800°); a questa temperatura essa è però molto lenta. Questo risultato trova del resto conferma nelle determinazioni di densità eseguite da Ditte sopra MgO mantenuto per un certo tempo a temperature diverse. L'ossido leggero ha una densità di circa 3,2 e quello pesante di circa 3,7. Ebbene, la densità di quello leggero varia nella maniera seguente quando venga portato alle temperature indicate:

Temperature	350° (1 ora)	440° (1 ora)	560° (1 ora)	1200° (12 ore)
Peso specifico	3,1932	3,2014	3,2482	3,5699

2°) Le magnesiti naturali contengono impurezze le quali esercitano una influenza notevole sulla volocità di idratazione dell'MgO che risulta dalla calcinazione di esse, agevolando la trasformazione nella forma pesante.

3°) La trasformazione della magnesia leggera in quella pesante è lenta a compiersi e diventa tanto più rapida quanto più alta è la temperatura.

[1] Alle società che ci hanno gentilmente favorito campioni dei loro minerali esprimiamo i nostri più vivi ringraziamenti.

[2] Le Chatelier, *Le chauffage,* pag. 399.

[3] Campbell, loc. cit.

Per effettuarla non basta calcinare la magnesia ad una data temperatura, ma occorre mantenere l'ossido per un determinato periodo di tempo alla temperatura in questione affinchè la trasformazione possa progredire in misura sufficiente (1).

4°) Non si è riscontrata una vera discontinuità nella diminuzione della velocità di idratazione in funzione della temperatura e della durata di cottura, per modo che sembra probabile che un punto di trasformazione della magnesia leggera in pesante non esista.

Probabilmente la magnesia leggera è amorfa e quella pesante cristallina (periclasio). La trasformazione dell'una varietà nell'altra si compie a tutte le temperature, e le impurezze accelerano il processo forse nella maniera già suggerita da Le Chatelier per le varie forme di quarzo in tridimite (2). La forma amorfa è meno stabile della cristallina a tutte le tempeture; essa perciò si scioglie nel flusso formato dalle impurezze generando soluzioni che sono soprassature rispetto alla forma cristallina, stabile, che così precipita.

(1) Mellor, loc. cit.
(2) C. R., *165*, 218 (1917).

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIX. (1892-1920). Fasc. 1°-12°, Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 7°-10°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 5.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. Maglione & C. Strini (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

RENDICONTI — Gennaio 1921.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Seduta del 16 gennaio 1921.

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. **N. 3.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXX.° — Fascicolo 3°

Seduta del 6 febbraio 1921.

1° Semestre.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCAD. NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

// RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 febbraio 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti.* Nota del Socio C. SEGRE.

1. Nella Memoria *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* (Rendic. Circ. mat. di Palermo, tomo 30, 1910, pag. 87) io avevo studiato principalmente le questioni legate a quelli che possiamo chiamare *fochi di 1° ordine*, per un sistema infinito di spazi: ossia punti, per ognuno dei quali passano *due* spazi del sistema infinitamente vicini. Ora si presentano dei problemi, la cui trattazione porta a considerare dei *fochi di 2° ordine* (o d'ordine superiore), cioè punti d'incontro di *tre* (o più) spazi successivi. In questa Nota, ed in altre che verranno poi, mi occuperò appunto di tali problemi.

2. Consideriamo, per ora, un sistema $\Sigma\ \infty^2$ di piani, *immerso* in S_4. Dette x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate di punti in questo spazio, rappresentiamo i piani colle equazioni $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, ove $\alpha \equiv a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$, $\beta \equiv b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$; i coefficienti a_i, b_i essendo date funzioni dei due parametri u, v, da cui dipendono i piani di Σ. Così le derivate di α, β rispetto a u, v (derivate che indicheremo con α^u, α^v, ecc.) saranno anche esse polinomi lineari in x_1, x_2.

Se un punto x è comune al piano (u, v) e a $(u + du, v + dv)$, e quindi è foco (di 1° ordine, in generale) per Σ, varranno, insieme colle

$x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, le $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, cioè:

$$(1) \qquad \alpha^u du + \alpha^v dv = 0 \quad , \quad \beta^u du + \beta^v dv = 0,$$

e quindi:

$$(2) \qquad J \equiv \alpha^u \beta^v - \alpha^v \beta^u = 0 .$$

Questa equazione è di 2° grado in x_1, x_2. Dunque, com'è ben noto, i fochi (di 1° ordine) di un piano di Σ formano in generale una conica. La diremo *conica focale* del piano.

3. Se un punto è foco di 2° ordine, ossia sta su 3 piani infinitamente vicini π, π', π'' di Σ, esso, perchè è su π, π', sta sulla conica focale di π; e, perchè è su π', π'', sta sulla conica focale di π'. Per avere dunque nel piano (u, v) un foco di 2° ordine, basterà scrivere che il punto x sta sulla conica focale di questo piano, e su quella del piano $(u + du, v + dv)$. La 1ª condizione dà:

$$(3) \qquad x_3 = \alpha \ , \ x_4 = \beta \ , \ J = 0 ;$$

la 2ª dà, come al n. 2, le (1), e in più $J^u du + J^v dv = 0$. Ne segue:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \alpha^u & \beta^u & J^u \\ \alpha^v & \beta^v & J^v \end{vmatrix} = 0 .$$

Sarà perciò quest'ultima equazione (doppia), che, insieme colle (3), caratterizzerà i fochi di 2° ordine [1].

Quella matrice, con due colonne lineari in x_1, x_2 e una quadratica, è annullata da 5 punti. Dunque: *su ogni piano di Σ vi sono in generale* 5 *fochi di 2° ordine* (*sulla conica focale*).

4. Dimostriamo ora che: se *tutti* i punti delle coniche focali di Σ son fochi di 2° ordine, il loro luogo non è una V_3, ma bensì una superficie (o una linea, se Σ si compone dei piani di S_4 passanti per una stessa retta).

Possiamo pensare i punti x di quelle coniche (3) come funzioni di tre variabili, cioè dei parametri u, v che fissano il piano, e della coordinata x_1. La terza delle equazioni (3) determina anzi tutto x_2 come funzione implicita di u, v, x_1; mentre le prime due dànno x_3 e x_4 in funzione di u, v,

[1] Si può anche ottenere la (4) così. I piani di Σ passanti per un dato punto x corrispondono alle soluzioni u, v comuni alle due equazioni $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, nelle quali si sia posto quel punto dato. Rappresentando u, v come coordinate di punto in un piano ausiliario, sicchè le dette equazioni avranno per imagini due linee, si vede che una soluzione $(u\,v)$ sarà *doppia* (almeno), se dalle due equazioni si trae lo stesso valore per dv/du, e sarà *tripla* se inoltre vien lo stesso valore per d^2v/du^2. La 1ª ipotesi dà subito la (2). La 2ª porta ad una relazione, che, presa insieme colla (2), risulta equivalente a (4).

x_1, x_2, e quindi anche di u, v, x_1. Basterà provare che, se queste funzioni verificano le (4), la matrice funzionale delle coordinate $x_1 . x_2, x_3, x_4$, riguardate così come funzioni di x_1, u, v, è nulla; ossia che:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & a_1 + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & b_1 + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \alpha^u + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} & \beta^u + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \alpha^v + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} & \beta^v + b_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ciò equivale a dire che è zero la matrice che si ottiene da questa sopprimendo la 1ª orizzontale e la 1ª verticale; ossia, semplificando, la matrice:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \alpha^u & \beta^u \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} & \alpha^v & \beta^v \end{vmatrix} .$$

Le derivate di x_2 rispetto a u e v, che qui compaiono, si calcolano derivando l'equazione $J = 0$ rispetto a queste variabili. Risulta:

$$\frac{\partial J}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + J^u = 0 \quad , \quad \frac{\partial J}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial v} + J^v = 0 ;$$

sicchè, sostituendo nell'ultima matrice, questa risulta nulla, se ha luogo la (4): il che appunto avviene, per ipotesi. —

Se le coniche focali dei piani generici di Σ non si spezzano, la superficie che viene a contenere queste ∞^2 coniche non potrà essere altro, com'è noto, che *la* F^4 *proiezione di quella di Veronese*, o *la* F^3 *di* S_4 (*rigata*). Dunque: *Son solo i sistemi* ∞^2 *di piani costituiti dai piani delle coniche di queste due superficie quelli per cui avviene che tutti i punti delle coniche focali sian fochi di 2° ordine, senza che queste coniche focali si spezzino* (¹).

5. Una curva Γ, appartenente ad S_n, con $n > 3$, sia tale che esistano ∞^2 piani che la seghino in 6 (o più) punti. Proiettando Γ (se $n > 4$) su un S_4 da un S_{n-5} generico, si ottiene una curva C, che godrà della stessa

(¹) Questa riserva è indispensabile. Le ∞^2 coniche, spezzandosi in coppie di rette, potrebbero costituire una superficie di S_4 anche nei seguenti modi: l'insieme di una rigata con direttrice piana e del piano di questa (le ∞^2 coniche componendosi di una generatrice della rigata e di una retta del piano, incidenti); oppure l'insieme di due coni, distinti o no, collo stesso vertice, e che possono anche ridursi a piani (le coniche componendosi con due generatrici risp. dei due coni).

proprietà: i punti d'appoggio dei piani seisecanti di C essendo proiezioni dei punti d'appoggio di quelli di Γ.

Nel sistema $\infty^2 \Sigma$ costituito da quei piani di S_4 seisecanti di C, ogni piano avrà i 6 (o più) punti d'incontro con C come fochi di 2° ordine: poichè, essendo Σ ∞^2, dovranno per ogni punto di C passare ∞^1 suoi piani, e quindi quanti si vogliano piani infinitamente vicini. Ora, pel n. 3, i fochi di 2° ordine di ogni piano sono in generale 5 punti della conica focale: se no, infiniti, che costituiranno tutta quella conica, ove essa non si spezzi. Nelle nostre ipotesi, avendosi almeno 6 fochi di 2° ordine, dovrà appunto accadere che la conica focale di un piano generico di Σ, se è irriducibile, sia luogo di fochi di 2° ordine. Se invece essa si spezza, i 6 punti d'appoggio di ogni piano su C dovranno distribuirsi sulle due rette componenti la conica; sicchè C, e quindi anche Γ, starà su una rigata di plurisecanti (almeno trisecanti). Nel 1° caso, della irriducibilità, le ∞^2 coniche focali, e quindi anche la linea C, stanno, pel teorema del n. 4, su una superficie F^4 proiezione di quella di Veronese, o su una F^3: i piani seisecanti essendo quelli delle ∞^2 coniche di queste superficie. Risalendo a S_n, se $n > 4$, abbiamo che i 6 (o più) punti d'appoggio degli ∞^2 piani plurisecanti di Γ sono su coniche, il cui luogo ha per proiezione *generica* in S_4 una delle due dette superficie. Sarà dunque il luogo stesso una superficie; e anzi, del medesimo ordine di quelle. Concludiamo [1]:

Se una curva iperspaziale ammette ∞^2 *piani che la incontrino in 6 punti* (*almeno*), *ma non infinite rette trisecanti, essa: o appartiene a* S_5 *e sta su una superficie* F^4 *di Veronese; oppure appartiene a* S_4 *e sta sulla* F^4 *proiezione della superficie di Veronese, od anche sulla* F^3 *rigata: i piani plurisecanti essendo quelli delle* ∞^2 *coniche di queste superficie.*

Si avverta che per le curve con ∞^2 piani 5-secanti la proposizione ora ottenuta non sarebbe più vera: come si potrà riconoscere sulle curve composte che incontreremo.

6. Finirò coll'osservare brevemente (lasciando ad altri di sviluppare questi cenni) come la considerazione dei fochi di 2° ordine permetta di giungere facilmente a determinare per l' S_4 tutti i casi possibili di sistemi *algebrici* ∞^2 di piani *del 2° ordine*, cioè tali che per un punto generico di S_4 ne passino due. (Non dico di quelli del 1° ordine, perchè — molto ovvii — son già conosciuti da tempo).

Basta notare che in un siffatto sistema Σ ogni foco di 2° ordine, trovandosi su 3 piani infinitamente vicini di Σ, dovrà stare di conseguenza su infiniti; e precisamente su ∞^1, se non è comune a tutti i piani di Σ:

[1] La questione qui risolta mi era stata posta dall'amico Castelnuovo. — Tratterò poi anche un problema più generale.

nel qual caso questi si otterrebbero proiettando da quel punto le rette di una congruenza di 2° ordine di S_3. Potranno dunque aversi solo più questi due casi: 1°) Sono ∞^2 i fochi di 2° ordine; ma essendo anche ∞^2 i piani, bisognerà che ogni piano abbia ∞^1 fochi di 2° ordine. Ne segue che la conica focale di ciascun piano si spezza: se no, si tratterebbe (n. 4) dei sistemi degli ∞^2 piani delle coniche di una F^3 o F^4, i quali sistemi sono risp. di 1° e di 3° ordine, non del 2°. Su ogni piano si avranno così una o due rette luoghi di fochi di 2° ordine; e queste rette riempiono, per ipotesi, una superficie. Se sono ∞^2, daranno un piano incontrato in rette da tutti i piani di Σ; se sono ∞^1, per ognuna di esse passeranno ∞^1 piani di Σ. 2°) I fochi di 2° ordine (o almeno le posizioni di un tal foco al variare del piano di Σ) son solo ∞^1, ossia hanno per luogo una linea algebrica segata in 5 punti (o meno, se non si tratta di tutti i fochi di 2° ordine) dai piani di Σ.

Questo 2° caso offre uno speciale interesse. Si parta, ad esempio, da una linea algebrica L, che può essere riducibile, appartenente ad S_4, della quale si sappia che la proiezione generica su S_3 ammette precisamente 2 quadrisecanti. Allora si potrà asserire che gli ∞^2 piani quadrisecanti di L (i quali, per l'ipotesi, formeranno un sistema di 2° ordine) incontreranno certo di conseguenza in un punto (il 5° foco di 2° ordine) un'altra linea: che però potrebbe essere indeterminata, su una superficie incontrata secondo linee da tutti quei piani.

Rientra in questa proposizione il noto teorema che gli ∞^2 piani di S_4 appoggiati a 4 rette generiche incontrano di conseguenza una 5^a retta. Anche i piani che incontrano in 3 punti una quartica razionale normale e si appoggiano a una retta generica, formano un sistema ∞^2 di 2° ordine; e quindi dovranno incontrare un'altra linea, che risulta facilmente essere ancora una quartica. E altri casi sono stati incontrati, con tutt'altro metodo, da M. Pieri [1].

[1] *Sulla geometria proiettiva delle forme di 4^a specie*. Giorn. di matem., vol. 28 (1890), pag. 209. I piani che incontrano una C^4 razionale normale e 3 sue corde, incontrano un'altra C^4. — I piani che incontrano una C^3 sghemba, due rette appoggiate ad essa, e una sua corda, incontrano un'altra C^3. — I piani che s'appoggiano a 3 rette e ad una conica incidente a due di esse, incontrano un'altra conica.

Chimica. — *Considerazioni sulla costituzione intima del benzolo e di alcuni nuclei eterociclici.* Nota del Socio G. Ciamician e di R. Ciusa.

Le considerazioni che esponiamo nella presente Nota, ci sono state suggerite da alcuni fatti assai interessanti che in questi ultimi anni ha posto in rilievo il prof. Angelo Angeli [1]. Egli ha notato che i radicali negli ortoderivati e nei paraderivati del benzolo si comportano in molte reazioni come se il complesso benzolico a cui sono attaccati non esistesse, perchè reagiscono come se fossero uniti l'uno all'altro direttamente.

Questo assai singolare comportamento è proprio soltanto dei derivati aromatici; non si rinviene nei derivati anche parzialmente idrogenati e naturalmente non si manifesta nei composti della seria grassa; deve però essere strettamente connesso con la struttura intima del benzolo: esso apparisce quindi caratteristico per le sostanze aromatiche, ed è un criterio assai più rigoroso di quello indicato a questo scopo da V. Meyer [2]. Per trovarne una spiegazione, siamo stati indotti a riflettere sopra alcune considerazioni fatte circa trenta anni fa da A. Angeli e G. Ciamician [3].

Rappresentando il benzolo con i modelli di Kekulè, si può ammettere, come si deve fare per più ragioni, che tutti gli atomi dell'idrogeno siano disposti da una parte sola del modello e non alterni, e si arriva così alla ben nota configurazione rappresentata dalla fig. 1.

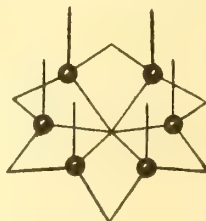



Fig. 1.

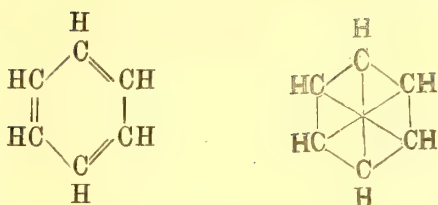
In questa, come non è stato forse abbastanza rilevato, le due formule, quella di Kekulè coi tre doppî legami e quella diagonale, vengono ad equi-

(1) Vedi questi Rendiconti, VIII, 2, 28; XXVI, 1, 480; XXIX, 1, 375.

(2) Lehrbuch der organischen Chemie, V. Meyer u. P. Jacobson, II vol., pag. 41.

(3) Vedi questi Rendiconti, vol. VII, I°, 241 (1891).

valersi

```
       H                      H
       C                      C
  HC ⁄   ╲ CH            HC ⁄ | ╲ CH
  ‖        |              |  ╲╳╱  |
  HC ╲   ⫽ CH            HC ⁄ | ╲ CH
       C                      C
       H                      H
```

Bisogna quindi ammettere che in quei derivati aromatici che hanno la stabilità del benzolo, i tre doppî legami si confondano coi tre legami diagonali, per cui può apparire necessario in certi casi che le valenze centrali siano un poco più lunghe delle altre; i legami doppî coi loro caratteri compariscono invece quando l'anello si allarga. Soltanto con sei tetraedri è possibile questa coincidenza dei doppî legami con quelli diagonali e ciò spiega perchè il cicloottotetraene, C_8H_8 di Willstätter, non abbia caratteri aromatici, ma bensì olefinici.

Partendo da questi concetti, si può comprendere che quando in un derivato della serie orto o di quella para, i due radicali sieno adescati, come si espresse con uno di noi il prof. Angeli, da un opportuno reattivo, avvenga un rilassamento del legame che li unisce al nucleo, perchè le valenze che rimangono libere, data la speciale configurazione del benzolo, possono saturarsi fra loro per doppio, per triplo o per legame diagonale, che, come lo dimostra il modello, vengono a rappresentare la stessa cosa (fig. 2).

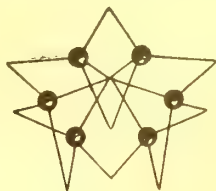
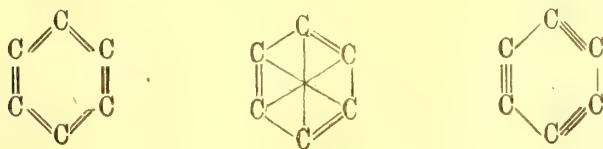
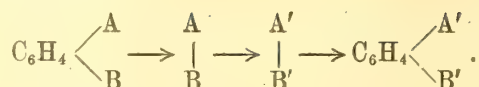



Fig. 2.

Le tre formule quindi si equivalgono

ed il complesso C_6 del benzolo potrebbe avere un'esistenza effimera come aggruppamento completamente saturo. I radicali, rimasti liberi, si uniscono tra di loro, reagiscono e dopo finita l'azione adescante del reattivo impiegato, riprendono modificati le loro posizioni, mentre il nucleo centrale ri-

torna alla struttura primitiva:

$$C_6H_4\langle{}^{A}_{B} \longrightarrow \overset{A}{\underset{B}{|}} \longrightarrow \overset{A'}{\underset{B'}{|}} \longrightarrow C_6H_4\langle{}^{A'}_{B'} .$$

Che i sei tetraedri nel benzolo sieno disposti in modo che le sei valenze disponibili vengano a stare, come si è detto prima, da una parte sola e non siano alterne, come vorrebbe il Weinberg [1], è necessario ammettere, perchè solo così si spiega l'esistenza di un'anidride nel caso dell'acido ortoftalico e non negli altri due.

Nella pubblicazione di allora furono espresse alcune idee sulla configurazione degli anelli eterociclici del pirrolo e del tiofene, che vanno modificate in seguito alla scoperta del cicloottotetraene.

Nella *piridina* basta ammettere che l'azoto, con le sue tre valenze, abbia pressochè le dimensioni degli altri tetraedri, perchè possa rimpiazzare un « CH » nella formola del benzolo, senza che la configurazione sia per nulla alterata. Il complesso C_5N non potrebbe per altro esistere come aggruppamento saturo, come il C_6.

Nel *pirrolo* invece apparisce necessario, come volle a suo tempo il Bamberger, che l'azoto sia pentavalente. Ammettendo che le due ulteriori valenze dell'azoto siano poste parallele l'una vicina all'altra nella direzione della quarta valenza del tetraedro (ciò che sta in buona armonia con altri fatti), si ha come risulta dal modello (fig. 3),

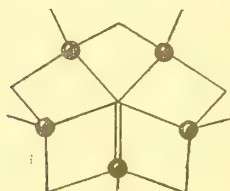



Fig. 3.

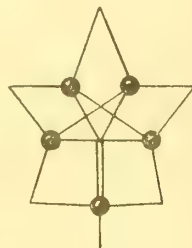



Fig. 4.

la configurazione del pirrolo analoga a quella del benzolo; essa deve per altro rappresentare una stabilità minore, perchè i tre legami diagonali, che nascono dall'intersezione dei due legami doppî colle due valenze dell'azoto, si trovano in posizione forzata. Qui può peraltro esistere il complesso saturo C_4NH (fig. 4).

Nel *tiofene* l'atomo di zolfo deve avere dimensioni tali da permettere, con lo zolfo tetravalente, una configurazione in cui i due doppî legami fra carbonio e le due valenze dell'atomo di zolfo vengono a costituire, senza sforzo, come nel benzolo, contemporaneamente tre legami diagonali. Con lo zolfo potrebbe esistere, come forma effimera, anche il complesso saturo C_4S.

[1] Vedi A. von Weinberg, Berichte, *52*, 928 e 1501 (1919), e *53*, 1353 (1920).

Chimica-fisica. — *Sulla solubilità delle sostanze cristalline nel caucciù* (¹). Nota del Corrisp. G. Bruni.

Il problema della natura delle soluzioni di caucciù e di sostanze organiche è stato ripetutamente trattato da varî autori sotto diversi punti di vista. Per la relativa bibliografia rinvio ai trattati speciali della materia (²).

Da un lato interessa la questione della ricerca del *peso molecolare* del caucciù che non fu finora risolta in modo soddisfacente. Nei tentativi, poco numerosi, fatti finora (³) furono trovati, com'era da aspettarsi, abbassamenti crioscopici minimi o pressioni osmotiche altissime e i pesi molecolati si calcolerebbero quindi elevatissimi.

Le determinazioni hanno però un grado di esattezza troppo basso per permettere conclusioni anche approssimativamente attendibili, cosicchè giustamente Harries conclude che il peso molecolare del caucciù è ancora sconosciuto (⁴). Alcuni autori, come Ditmar (⁵), hanno anche creduto di poter concludere che, siccome il caucciù è un colloide, la ricerca del peso molecolare non ha senso e canzonano i « Kristallchemicher » che se ne occupano. L'osservazione è radicalmente sbagliata, noi sappiamo oggi infatti che fra soluzioni vere e soluzioni colloidali non vi è che una differenza di grado.

D'altro lato si è cercato, a scopo pratico, di determinare la *solubilità* della gomma nei varî solventi usati nella tecnica. È naturale che per la natura amorfa della gomma non sia possibile stabilirne una vera solubilità. Già il fenomeno della soluzione appare diverso da quello comune. Come tutti i pratici ben sanno, e come fu osservato da Weber (⁶), esso desta la impressione che sia il *solvente* che si sciolga nella gomma, anzichè questa in quello. Tale considerazione ci ha condotto a ricercare se si possa stabilire la solubilità di sostanze estranee nel caucciù considerato come solvente. Come sostanze estranee più adatte si presentano quelle organiche e in par-

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Ricerche Chimiche e Chimico-Fisiche della Società Pirelli a Milano.

(²) Weber C. O., *The Chemistry of India Rubber*. London, Griffin, 1912, pp. 12-16; Schidrowitz P., *Rubber*. Methuen e C., London, pp. 154-155; Gottlob K. P., *Technologie der Kautschukwaren*. Braunschweig, 1915, pp. 2-4.

(³) Hinrichsen und Kindscher, Ber. *42*, 4329 (1909); Caspari W. A., J. Chem. Soc., vol. 105, 1915, pag. 2139.

(⁴) Harries C. D., *Untersuchungen über die natürlichen und künstlichen kautschukarten*. Springer, Berlin, 1919, pag. 7.

(⁵) R. Ditmar, *Der Kautschuk*. Berlin, Springer, 1914.

(⁶) Weber C. O., op. cit., pag. 15.

ticolar modo quelle aromatiche, solide a temperatura ordinaria, che si mescolano colla gomma assai più facilmente e intimamente delle altre. Nella Nota presente, rendo conto di esperienze eseguite coll'azobenzolo, colla naftalina e colla p. toluidina.

Fui indotto a esperimentare la prima sostanza dalla circostanza seguente. Nel corso di alcune ricerche sugli acceleranti, osservai che preparando sul mescolatore a cilindri una miscela di gomma con 10 % di azobenzolo, si ottiene una specie di gelatina perfettamente trasparente di color rosso aranciato. Abbandonata a sè, la miscela diventa opaca e lascia riconoscere nella massa i cristallini dell'azobenzolo. Riscaldandola essa torna trasparente, e per raffreddamento di nuovo opaca. Una serie di esperienze preliminari eseguite dal dott. Menghi dimostrò in modo sicuro che quanto maggiore è la percentuale di azobenzolo contenuta nella miscela, tanto più alta è la temperatura alla quale si deve portare la medesima per ottenere la trasparenza. Queste esperienze erano eseguite avvolgendo una sottile foglia della miscela attorno al bulbo di un termometro graduato in decimi di grado. Il tutto era introdotto in una provetta vuota e questa veniva scaldata lentamente in un bagno d'acqua. Si osservava la temperatura alla quale si aveva la trasparenza, e poi raffreddando quella alla quale la miscela ricominciava ad apparire opaca. Per quanto il metodo non fosse adatto a determinazioni esatte, tuttavia le osservazioni fatte erano sufficienti a stabilire in modo indubbio il fatto fondamentale della variazione della temperatura di chiarificazione colla concentrazione dell'azobenzolo.

Essendo il dott. Menghi occupato in altre ricerche, le esperienze successive furono da me affidate al dott. C. Pelizzola.

Era anzitutto necessario di provvedere ad una depurazione possibilmente completa del caucciù impiegato, per liberarlo soprattutto delle resine in esso contenute che, essendo sostanze a basso peso molecolare, falserebbero i risultati ottenuti, anche se presenti in piccola quantità. Si impiegò sempre la migliore gomma di *Hevea brasiliensis* di piantagione. Come è noto essa non contiene più di 1,5 % di resine. Essa veniva estratta con acetone in Soxhlet per parecchie settimane fino a che il liquido ricadente non dava più alcun residuo; poi veniva sciolta in benzolo e riprecipitata con alcool. Il solvente veniva quindi cacciato in un essicatore a vuoto.

Una prima serie di esperienze fu eseguita al microscopio facendo uso di un tavolino riscaldatore di Pfeiffer formato da una vaschetta di vetro a faccie parallele, fra cui si faceva circolare dell'acqua calda di cui un termometro in decimi misurava la temperatura. Una foglia sottile della mescolanza di gomma e di azobenzolo veniva posta sulla faccia superiore e si osservava col microscopio. A temperatura ordinaria si scorgevano assai netti i cristalli rosso-aranciati dell'azobenzolo dispersi nella massa trasparente aventi un colore più chiaro. Facendo passare acqua man mano più calda si

notava la temperatura alla quale scomparivano gli ultimi cristalli. Esperienze fatte con miscele di varie concentrazioni confermarono con maggior precisione il risultato precedente e cioè che col crescere della concentrazione dell'azobenzolo aumenta la temperatura a cui si deve portare la miscela per avere la omogeneità. Apparve però evidente che dato lo spessore delle pareti della vaschetta e la loro scarsa conduttività termica vi era sempre una differenza troppo forte fra la temperatura segnata dal termometro e quella reale a cui si trovava la miscela. Stimo quindi inutile riportare qui dettagliatamente i risultati numerici ottenuti.

Le esperienze definitive furono eseguite col metodo termico diretto. Si trovò infatti che se una mescolanza di gomma ed azobenzolo contenente una proporzione sufficiente di questa sostanza viene scaldata e poi fatta raffreddare lentamente, mediante un termometro introdotto nella massa si riesce a determinare assai bene la curva di raffreddamento da cui si può dedurre il punto di incipiente solidificazione o cristallizzazione.

I risultati di varie esperienze successive concordano abbastanza bene fra di loro. I valori indicati nelle tabelle sono le medie dei risultati di parecchie determinazioni indipendenti e possono essere ritenuti esatti entro 0,2°. Si usavano generalmente 25 gr. di miscela per ogni determinazione. Le miscele più ricche in azobenzolo venivano preparate fondendo l'azobenzolo e aggiungendovi la gomma che vi si scioglie facilmente e rapidamente. Quelle più ricche in gomma si preparavano mescolando i due componenti nella solita macchinetta mescolatrice a due cilindri. Esperienze di confronto mostrarono che una miscela della medesima concentrazione preparata coi due metodi dava risultati assolutamente identici.

TABELLA I.

Num.	In 100 parti Azobenzolo	Caucciù	Temperatura di incipiente cristallizzazione
1	100	0	69,0°
2	98	2	68,95
3	95	5	68,6
4	90	10	68,6
5	80	20	67,2
6	75	25	66,2
7	70	30	65,7
8	60	40	63,1
9	50	50	59,2
10	40	60	52,1
11	30	70	43,4

(*NB.* — Le miscele 2 e 4 furono preparate per soluzione nell'azobenzolo fuso; quelle 7 a 11 al mescolatore; quelle 5 e 6 con entrambi i metodi).

Altre due serie di esperienze furono eseguite nello stesso modo con naftalina e p. toluidina.

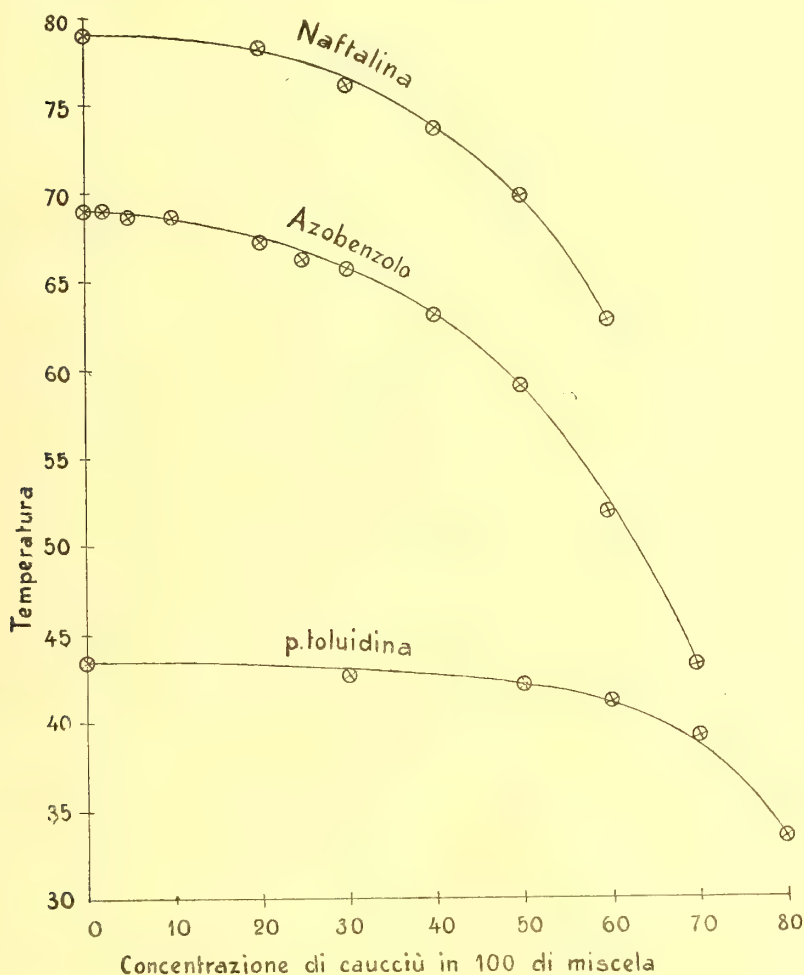
TABELLA II.

Num.	In 100 parti Naftalina	Caucciù	Temperatura di incipiente cristallizzazione
1	100	0	79,0°
2	80	20	78,2
3	70	30	76,1
4	60	40	73,7
5	50	50	69,9
6	40	60	62,7

TABELLA III.

Num.	In 100 parti p. toluidina	Caucciù	Temperatura di incipiente cristallizzazione
1	100	0	43,4°
2	70	30	42,6
3	50	50	42,1
4	40	60	41,1
5	30	70	39,2
6	20	80	33,4

I risultati ottenuti sono rappresentati dalle figure in cui sulle ascise si portano al solito le concentrazioni e sulle ordinate le temperature. Come si vede le curve sono perfettamente regolari ed il loro andamento è in tutto simile a quello delle curve di congelamento e di solubilità nei comuni solventi; esse sono tutte fortemente concave verso l'asse delle concentrazioni. Ciò dimostra che il sistema « caucciù-sostanza organica cristallina » si comporta come un comune sistema a due componenti; o, in altri termini, il caucciù si comporta rispetto a queste sostanze cristallizzate come un solvente ordinario formando delle vere e proprie soluzioni sature. Si osservano anche facilmente fenomeni di sopraraffreddamento e soprasaturazione che si possono togliere nel modo consueto. Il carattere « colloide » del caucciù non esercita su ciò alcuna influenza. Si potrebbe tentare ora di trarre conclusioni intorno al peso molecolare del caucciù sciolto nei varî solventi; si deve però osservare che appunto le determinazioni nelle soluzioni più diluite in gomma che si dovrebbero usare a questo scopo, sono quelle per le quali l'errore possibile di esperienza porta la massima incertezza e supera addirittura gli abbassamenti osservati, cosicchè non credo per il momento possibile trarre conclusioni su questo punto su cui mi riservo di continuare le ricerche. Che le soluzioni siano soluzioni molecolari vere e proprie della sostanza cristal-

lina nella gomma non è dubbio; l'andamento concavo verso l'asse delle concentrazioni sembra dimostrare, come nel caso delle ben note esperienze di Jones sugli idrati e solvati in genere, che fra le molecole del caucciù e quelle della sostanza cristallina si formano dei complessi.

Si ritenne necessario ricercare se il riscaldamento prolungato del caucciù col solvente, quale si verifica durante le esperienze, non potesse produrre un'alterazione permanente nel suo stato molecolare p. s. una depolimerizzazione. Ciò è da escludere per il fatto più volte osservato che la temperatura di solidificazione delle miscele rimane praticamente invariata anche dopo riscaldamento prolungato per molte ore. Per verificare meglio questo fatto si operò nel modo seguente: gr. 50 di azobenzolo vennero fusi e vi si aggiunsero gr. 5 di gomma deresinata agitando fino a completa soluzione di quest'ultima; la miscela si mantenne poi fusa per parecchie ore ancora.

Dopo raffreddamento e solidificazione la miscela polverizzata fu estratta in un Soxhlet con alcool etilico per 90 ore sino a completa asportazione dell'azobenzolo. Il residuo di gomma per staccarlo dal filtro di carta venne sciolto in benzolo. Si lasciò poi evaporare il benzolo, la gomma si mescolò con 8 % di zolfo e si fece vulcanizzare riscaldando per 2 ore a 144°. Si ottenne una vulcanizzazione perfetta, la quale dimostra che il caucciù non aveva subìto alcuna alterazione permanente.

Ritengo quindi di aver dimostrato che il caucciù si comporta come un *liquido spesso* ed ha un vero potere solvente per le sostanze che vi sono aggiunte. Tale potere solvente è massimo per le sostanze organiche aromatiche e per gli idrocarburi e i derivati alogenati in genere, minore per la maggior parte delle sostanze della serie grassa, specie se ossigenate, minimo per la maggior parte delle sostanze minerali, salvo alcuni elementi.

Così è certo, che una parte, per quanto piccola, dello zolfo che si aggiunge alla gomma per la vulcanizzazione si trova disciolto, e che le mescolanze relative costituiscono delle vere soluzioni sature di zolfo in gomma, in presenza di un forte eccesso di zolfo. Sulla portata di questo fatto sul meccanismo della vulcanizzazione mi riservo di ritornare.

Mineralogia. — *Studi su minerali del Lazio. La melilite degli inclusi nel peperino* [1]. Nota del Corrisp. F. Millosevich.

Anni or sono negli scavi entro il peperino per le fondazioni della villa Volterra ad Albano Laziale furono rinvenuti e portati a questo Museo mineralogico dei blocchi contenenti melilite (humboldtilite) in nitidi e limpidi cristalli; nei blocchi il minerale è accompagnato da pirosseno, leucite, hanyna, granato giallo. La purezza dei cristalli, non comune in questo minerale, mi invogliò a compierne lo studio, soprattutto nell'intento di portare un contributo alla conoscenza della sua costituzione chimica, problema ancora degno di interesse, non ostante le numerose ricerche in proposito.

Dal punto di vista cristallografico poco o punto di nuovo era da aspettarsi, data la scarsezza di forme e l'uniformità di abito, che caratterizzano questo minerale.

Ho osservato le forme:

$$c\{001\}\ ,\ a\{100\}\ ,\ h\{310\}\ ,\ r\{111\}\ ,\ v\{201\}$$

e le combinazioni:

$$ac\ ,\ ach\ ,\ acrh\ ,\ acrhv\ .$$

Le prime quattro forme sono comuni, e risultano osservate già da vom

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Roma.

Rath (1) che diede una brevissima descrizione di cristalli di melilite in blocchi nel peperino: la quinta è rara anche nella melilite vesuviana, dove fu osservata prima da Kaiser (2) e poi da Zambonini (3).

Zambonini per la melilite del Vesuvio dà la preferenza alla costante di Des Cloizeaux

$$a:c = 1:0,4548$$

calcolata dall'angolo $cr = 32^\circ\, 45'$. Le mie misure poche, ma su buoni cristalli, dànno un valore attendibile dello stesso angolo pari a $32^\circ\, 50'\, {}^1/_2$: vom Rath (4) dà per i cristalli pure dei blocchi del peperino $32^\circ\, 51'$ e identico valore attribuisce Brooke (5) a quest'angolo nella melilite vesuviana. Dalle mie misure si ricava dunque:

$$a:c = 1:0,45643\,.$$

La forma $v\{201\}$ fu riscontrata in un solo cristallo, ma con facce estese, che consentono discrete misure.

$(001):(201) = 42^\circ\, 18$ (media di 3 determinazioni)
$42^\circ\, 23'\, {}^1/_2$ (calcolato con la mia costante).

I cristalli sono ben trasparenti e appena appena colorati in bigio-giallognolo: all'esame ottico presentano apparenza omogenea senza accenno della così detta *Pflockstructur*. La sfaldatura basale è bene evidente: non si avverte invece distintamente sfaldatura prismatica.

Il peso specifico del minerale fu determinato col picnometro, e risultò 2,929 a 15°.

Gli indici di rifrazione principali determinati col rifrattometro Abbe-Pulfrich sono:

$$\omega_{Na} = 1,633 \qquad \varepsilon_{Na} = 1,629 \qquad \omega - \varepsilon = 0,004\,.$$

Materiale scelto con tutte le possibili cautele fu riservato all'analisi. I risultati che si riportano sono la media di due e, in alcuni casi, di tre determinazioni. Fu controllata accuratamente l'assenza di ioni ferrosi.

SiO_2	41,07
Al_2O_3	10,47
Fe_2O_3	3,80
CaO	33,92
MgO	6,02
Na_2O	3,25
K_2O	1,04
	99,57

(1) *Min. geogn. Fragmente*..... Zeits. d. deut. geol. Gesellsch., *18*, 1866, 544.

(2) Zeits. f. Kryst., *31*, 1899, 24.

(3) *Miner. Vesuviana*, 1910, 253.

(4) Vom Rath (loc. cit.) ha misurato cristalli di inclusi nel peperino e non quelli delle geodi della leucitite di Capo di Bove, come erroneamente scrive Kaiser.

(5) Quaterly Journ. of Science, London, 1823, *16*, 274.

Bodländer [1] e dopo di lui Zambonini [2] discutendo le loro analisi e le altre anteriori misero giustamente in rilievo che la nota ipotesi di Vogt [3], secondo la quale le meliliti si devono considerare come miscele isomorfe di gehlenite $3\overset{II}{R}O . \overset{III}{R}_2O_3 . 2SiO_2$ e di åkermanite $4\overset{II}{R}O . 3SiO_2$, pur avendo trovato universale accoglienza nei testi scientifici, non corrispondeva ad una esatta interpretazione dei risultati analitici.

Studi ulteriori dimostrarono che la formola data da Rammelsberg ed universalmente ammessa per la gehlenite, è puramente empirica; e che questo minerale si deve considerare come una miscela di cui è parte integrante un composto di costituzione $2CaO . Al_2O_3 . SiO_2$ preparato artificialmente da Weyberg [4] e, in seguito, ottenuto anche da Rankin e Wright [5] nello studio sperimentale del sistema ternario $CaO — Al_2O_3 — SiO_2$. Schaller [6] diede il nome di velardeñite a tale composto che costituisce circa l' 80 % della gehlenite di Velardeña nel Messico.

L'åkermanite poi di Vogt nota dapprima soltanto come minerale ipotetico e come composto artificiale $4RO . 3SiO_2$ fu constatata realmente esistente fra i minerali vesuviani da Zambonini [7], il quale diede la stessa formola accennando però alla possibilità che essa sia un sale doppio di calcio e di magnesio. E Schaller infatti [8] interpretando le analisi di Freda e Zambonini ammise la formola $4MgO . 8CaO . 9SiO_2$. Ferguson e Mervin [9] ottennero nello studio sperimentale del sistema ternario $CaO — MgO — SiO_2$ un composto di costituzione chimica assai prossima cioè $2CaO . MgO . 2SiO_2$, che chiamarono anche åkermanite.

Il sistema binario artificiale åkermanite-gehlenite, o meglio, $2CaO . MgO . 2SiO_2 — 2CaO . Al_2O_3 . SiO_2$ fu recentissimamente oggetto di indagini accurate da parte di Ferguson e Buddington [10], e dalle loro ricerche si può trarre, per quanto riguarda le meliliti naturali, la considerazione seguente: che il sistema non è identico a quello ammesso da Vogt, ma soltanto prossimo; che in esso le miscele sul 50 %, quelle cioè che dovrebbero approssimarsi alla costituzione della melilite, non hanno di questa le proprietà fisiche. I dati dei citati autori sono infatti:

(1) Neues Jahrb. f. Miner. etc. 1893, I, 15.
(2) Zeits. f. Kryst., *41*, 1906, 226.
(3) Archiv for Mathematik og Naturvidens Kab. Kristiania, *13*, 1890, 310 e seg.
(4) Centralbl. f. Miner., 1904, 729.
(5) Americ. Journ. of Science, *39*, 1915, 26.
(6) U. S. Geol. Survey, Bull. *610*, 1916, 106.
(7) *Miner. Vesuviana*, 255.
(8) Schaller W. T., *The melilite group*, U. S. geol. Survey, Bull. *610*, 1916, 109.
(9) Americ. Journ. of Science *48*, 1919, 118.
(10) Americ. Journ. of Science, *50*, 1920, 131.

gehlenite 50 åkermanite 50

ω_{Na} 1,653 ε_{Na} 1,652 $\omega - \varepsilon$ 0,001

p. sp. 2,993

parecchio discosti cioè dai corrispondenti meglio determinati nelle meliliti naturali.

Contro l'ipotesi di Vogt, Bodländer [1] ammise che le meliliti naturali otticamente negative (di quelle naturali otticamente positive non possediamo analisi a quanto io sappia) fossero da considerare come miscele isomorfe di un metasilicato $\overset{II}{R}SiO_3$ con un alluminato $\overset{II}{R}\overset{III}{R}_2O_4$. Ipotesi semplice, applicabile con sufficiente esattezza all'interpretazione di tutte le analisi delle meliliti, ed anche, aggiungo io, delle gehleniti, e verso questa mostrò di inclinare Zambonini [2] nella discussione delle due analisi di melilite di Capo di Bove; forse troppo semplice o meglio troppo indeterminata, tanto che Zambonini cerca di darne un'espressione più esatta correggendo la locuzione « miscela isomorfa » con quella molto più generale di « soluzione solida », venendo con ciò ad indicare indirettamente il punto debole della ipotesi stessa, quello cioè di fare astrazione da composti ben definiti come minerali o, almeno, come specie cristallografiche.

Un progresso delle nostre conoscenze sull'argomento è segnato dal lavoro sopra citato di Schaller, il quale considera meliliti e gehleniti come miscele isomorfe di åkermanite $4MgO.8CaO.9SiO_2$, di velardeñite $2CaO.Al_2O_3.SiO_2$, di sarcolite $3CaO.Al_2O_3.3SiO_2$ e di sarcolite sodica cioè di un minerale ipotetico $3Na_2O.Al_2O_3.3SiO_2$ che non si riscontra isolato, ma che entra in miscela con il composto precedente a costituire la sarcolite vesuviana. La discussione di molte analisi di melilite e di gehleniti fatta da Schaller dimostra che la sua ipotesi risponde con sufficiente esattezza ai dati sperimentali.

I risultati della mia analisi, discussi col metodo proposto da Schaller e posti in confronto con quelli corrispondenti di altre analisi, sono:

	åker.	sarc.	sodasarc.	velar.
Melilite degli inclusi nel peperino di Albano Laziale (Millosevich):	48,5	27,5	9,0	15,0
idem gialla della leucitite di Capo di Bove (Lazio) (Zambonini):	49,5	32,4	8,3	9,8

(1) Loc. cit., 19.
(2) Loc. cit., 232-233.

Melilite bruna della leucitite di Capo di Bove (Lazio) (Zambonini):

	åker.	sarc.	sodasarc.	velar.
	47,9	28,0	8,3	15,8

idem del Vesuvio (Bodländer) [1]:

	42,5	41,2	9,8	6,5

Che la sarcolite possa considerarsi isomorfa con la melilite e con la gehlenite si può dimostrare agevolmente. Nei cristalli di melilite del Vesuvio e in quelli da me misurati (e sono del resto i soli finora conosciuti da cui si possa ricavare una costante cristallografica) appare, come dissi, la forma {201}. Se si assume questa come {101} la costante si raddoppia, si ha cioè:

melilite $a:c = 1:0,91286$ Millosevich.

Nella sarcolite la corrispondente piramide di 2° ordine forma con la base un angolo di 41° 32′ ²/₃ da cui si calcola:

sarcolite $a:c = 1:0,8861$ Zambonini.

Nella gehlenite si riscontra una forma di simbolo {703} che fa con la base un angolo di 43° 2′. Se detta forma si assume ancora come {101} si giunge alla costante:

gehlenite $a:c = 1:0,9336$ Des Cloizeaux.

Nei cristalli artificiali di åkermanite si avrebbe con analoga scelta di assi

åkermanite $a:c = 1:0,90$ (circa) Vogt.

[1] Per una svista Schaller (loc. cit., pp. 122 e 123) discute la terza delle analisi del Bodländer attribuendola a materiale di Capo di Bove, mentre è stata eseguita su melilite del Monte Somma.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Elio e neon « sintetici »*. Nota del prof. A. Lo Surdo, presentata dal Corrisp. A. Garbasso [1].

Facendo delle esperienze con tubi contenenti idrogeno nei quali passavano intense scariche elettriche mi ero accorto di alcune piccole variazioni di pressione, che potevano spiegarsi ammettendo il passaggio di questo gas attraverso alle pareti di vetro.

Ho ripensato allora alla famosa questione della comparsa dell'elio e del neon dopo lunga azione della scarica elettrica sull'idrogeno, elio e neon che Sir W. Ramsay [2] riteneva si formassero sinteticamente dall'idrogeno e dall'ossigeno.

Le esperienze fatte per accertare questa supposta formazione non hanno dato risultati concordi: contro i risultati positivi di Ramsay, di Collie e Patterson e Masson [3], stanno quelli negativi di R. J. Strutt [4], Merton [5] e Piutti e Cardoso [6]. Da qui il dubbio che la presenza dell'elio e del neon potesse derivare dall'intervento di una causa non conosciuta.

Alcune esperienze di Collie e di Patterson tenderebbero ad escludere la permeabilità delle pareti di vetro nei tubi di scarica; ma le chiare esperienze di Jaquerod e Perrot [7] sul passaggio dell'elio attraverso i bulbi di quarzo del termometro a gas portati a temperature moderatamente alte, quali possono essere raggiunte dalle pareti dei tubi di scarica, lasciano dubitare che un fenomeno consimile, sia pure di entità molto più piccola, possa aver luogo per il vetro.

Mi sono proposto quindi di ricercare se un tubo di vetro caldo sia permeabile all'elio senza che intervenga la scarica elettrica, e se la permeabilità ci sia anche quando il riscaldamento è dovuto alla scarica elettrica.

Un tubo di vetro sul quale era avvolta una spiralina di filo da reostati, veniva scaldato mediante la corrente elettrica mentre si trovava in

(1) Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

(2) W. Ramsay, *Nature*, 89, 502; Trans. Chem. Soc., 1913, pag. 264; Rend. Soc. Chim. Ital., ser. II. vol. V, pag. 135.

(3) Chem. Soc. Trans., vol. 103, pag. 419, 1913; Chem. Soc. Proc., vol. 29, pp. 27, 217, 213, 1913; Proc. Roy. Soc., vol. 91, 1914-15, pag. 30.

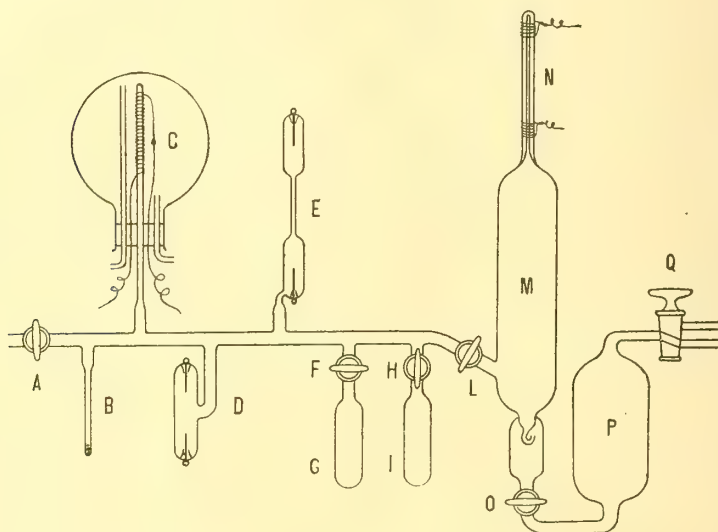
(4) Merton, Proc. Roy. Soc., 1914, A 90, 549.

(5) Strutt, Proc. Roy. Soc., 1914, A 89, 499.

(6) Gazzetta Chimica Italiana, 1920, vol. L, 5.

(7) Arch. Soc. Phys. Nat. (4) *18*, pag. 613; id., *20*, pag. 128, 1905.

una atmosfera di idrogeno puro o di elio aereonautico (1). Questo tubo era saldato ad un ramo dell'apparecchio rappresentato schematicamente nella fig. 1, che è simile a quello col quale Strutt (2) aveva analizzato l'idrogeno dopo averlo assoggettato alla scarica, e non aveva trovato traccia di elio e neon « sintetici ».

Il rubinetto A stabilisce la comunicazione con la pompa di Gaede. In B c'è una piccola quantità di permanganato potassico: in C è il tubo colla spiralina di cui è detto avanti (3); esso si trova dentro un pallone di vetro nel quale, attraverso due tubi, si può introdurre o ricambiare il

gas che lo circonda. In D è un tubo di scarica, in E un tubo di Plücker, in G e in I del carbone di noce di cocco, circa 20 gr. per ciascun tubo, M e P contengono del mercurio accuratamente purificato e distillato.

Questo mercurio attraverso al rubinetto O si può far passare da M in P o viceversa, mettendo in comunicazione, mediante il rubinetto a due vie Q, il recipiente P con una pompa pneumatica o coll'atmosfera. Così il gas contenuto in M può essere compresso nel capillare N (4) fino a fargli raggiun-

(1) Elio impuro di idrogeno e di altri gas, che viene usato come gas leggero incombustibile per il riempimento dei dirigibili; esso viene estratto dai gas naturali (C. Porlezza, Giorn. di Chim. Ind. e Appl., anno II, 1920, pag. 638; Mc Lennan, *Helium: its Production and Uses*, Journ. of the Chem. Soc., vol. 117 e 118, 1920, pag. 923; Nature. vol. CV, 1920. pp. 747 e 778).

(2) Strutt, loc. cit.

(3) I tubi usati in questa esperienza avevano diametri esterni da 5 a 10 mm., e lo spessore di circa 0,5 mm.; delle sottili striscette di mica impedivano il diretto contatto della spiralina col vetro.

(4) Questo capillare aveva un diametro interno di mm. 0,1.

gere la pressione opportuna per eccitare in esso la luminosità mediante la scarica dovuta all'effetto di induzione dei due elettrodi esterni, che sono in comunicazione con un rocchetto di induzione di 10 cm. di scintilla.

Il metodo di sperimentare era il seguente. Nell'apparecchio si faceva il vuoto tenendo aperti i rubinetti A e L e chiusi tutti gli altri, dopo aver liberato mediante riscaldamento il carbone dai gas occlusi, e dopo aver fatto passare il mercurio in P finchè il suo livello in M non fosse quasi al fondo.

La pompa di Gaede veniva fatta funzionare lungamente per due o tre giorni successivi in diverse riprese. Dopo si verificava che non ci fossero delle perdite capaci di portare all'interno, durante una esperienza, delle tracce di neon e di elio rivelabili coll'apparecchio.

Si scaldava quindi il tubo C facendo passare la corrente elettrica nella spiralina. Durante questa operazione nel pallone si manteneva idrogeno o elio aereonautico. Dopo qualche tempo, generalmente un'ora, si toglieva la corrente dalla spiralina e si procedeva all'analisi del gas che era penetrato all'interno. Perciò si scaldava prima il tubetto B contenente il permanganato potassico: dell'ossigeno veniva così ad aggiungersi ai gas penetrati; quindi di tratto in tratto si faceva funzionare, mediante un piccolo rocchetto di induzione, il tubo di scarica D, allo scopo di fare combinare l'idrogeno all'ossigeno. Finalmente si immergeva uno dei tubi contenenti il carbone di noce di cocco, per es. G, nell'aria liquida e si apriva il rubinetto F lasciando così assorbire dal carbone i gas, in modo da avere un residuo di quelli poco assorbibili, cioè di elio e di neon. Dopo circa un'ora si chiudeva F e si apriva H, dopo aver immerso nell'aria liquida il tubo I: anche questo si lasciava assorbire per circa un'ora.

Veniva allora chiuso il rubinetto L e così una gran parte del gas residuo rimaneva dentro lo spazio M. Facendo entrare il mercurio attraverso il rubinetto O si comprimeva il gas dentro il capillare N fino alla pressione opportuna per la scarica.

La luce veniva osservata mediante uno spettroscopio, sulla fenditura del quale veniva proiettata opportunamente l'immagine del capillare che, pure essendo del diametro interno di mm. 0,1, non poteva sostituire la fenditura poichè, attraverso la spessa parete di vetro, appariva troppo grosso.

Ed ecco i risultati delle esperienze:

1°) Tubo di vetro in atmosfera di idrogeno. La spiralina è riscaldata al rosso-scuro appena visibile al buio. Durata del riscaldamento un'ora; pressione raggiunta circa un decimo di millimetro.

Al Plücker il gas mostra, avanti il trattamento con l'ossigeno, esclusivamente lo spettro dell'idrogeno e le righe del mercurio.

Dopo il procedimento accennato avanti, cioè reazione con ossigeno e assorbimento, non si vede traccia apprezzabile di neon o di elio nel residuo che

occupa qualche millimetro del capillare, poichè eccitando la scarica in N si vedono solo le righe del mercurio e quelle dell'idrogeno.

2°) Il tubo di vetro veniva mantenuto in un'atmosfera di elio aereonautico, e scaldato per un'ora come nella esperienza precedente. Durata un'ora, pressione finale circa 0,1 mm. Al tubo di Plücker il gas mostra esclusivamente le righe dell'idrogeno e quelle del mercurio.

Fatta avvenire la reazione con ossigeno e l'assorbimento con carbone, nel capillare N si ha un residuo di circa 0,1 mm^3. (volume ridotto alle condizioni normali). Questo gas all'esame spettroscopico mostra esclusivamente le righe del neon prevalenti e quelle dell'elio molto più deboli.

Ignoravo che l'elio aereonautico contenesse del neon. Ho introdotto una piccola quantità di questo gas nell'apparecchio della fig. 1 e gli ho fatto subire il solito trattamento con ossigeno e l'assorbimento del carbone. Dopo queste operazioni esso mostrava nel tubo di Plücker E insieme alle righe molto brillanti dell'elio, quelle del neon ben visibili.

3°) Invece del tubo scaldato con la spiralina si teneva nell'atmosfera di elio aereonautico il tubo di Plücker E. La pompa e l'apparecchio venivano avanti liberati dall'elio con lunghe ed accurate operazioni. Il Plücker veniva alimentato per circa mezz'ora dalla scarica di un rocchetto di induzione di 10 cm. di scintilla. L'incremento della pressione all'interno era più rapido che nelle esperienze col tubo riscaldato dalla spiralina; e come prima il gas residuo, di circa 0,1 mm^3., emetteva le righe del neon e dell'elio.

4°) La stessa esperienza veniva fatta tenendo il tubo di Plücker in atmosfera di idrogeno puro: passava molto idrogeno, ma nessuna traccia apprezzabile di elio e di neon.

Conclusione. — *Neon, elio ed idrogeno passano attraverso il vetro caldo: l'idrogeno passa in quantità molto maggiore che gli altri due gas. Questo fatto può spiegare la origine dell'elio e del neon « sintetici »: essi possono provenire dall'atmosfera.*

Il passaggio dipende naturalmente dalla temperatura del vetro e quindi dalla natura della scarica, e da parecchie altre circostanze fra le quali la qualità e lo spessore del vetro; è probabile quindi che la discordanza dei risultati di Ramsay, Collie, Patterson e Masson, e di quelli di Strutt, Merton, Piutti e Cardoso si debba alla diversità di queste circostanze.

Ringrazio vivamente il prof. Garbasso per aver messo largamente a mia disposizione i mezzi del Laboratorio di Fisica del Regio Istituto di Studî Superiori in Firenze, dove ho eseguito queste esperienze.

Mineralogia. — *Sul berillo di Piona* (lago di Como) (¹). Nota del dott. Mario Ferrari, presentata dal Socio C. Viola (²).

La piccola penisola di Piona, sulla riva sinistra del lago di Como, poco lungi da Colico, fa parte di una regione essenzialmente formata da micaschisti e gneiss di colore oscuro e di incerta età, che mostrano interposti numerosi straterelli più o meno estesi, alcuni dei quali quarzosi, altri anfibolici. Ad occidente del paesello di Olgiasca, poco sopra il livello del lago, giace inoltre, fra gli schisti, un banco di quarzite compatta e, sul versante nord-occidentale della penisola, trovansi alcune lenti calcaree, in parte sfruttate a scopo industriale, come il banco di quarzite dianzi accennato.

L'interesse maggiore però, che la regione offre, sovra tutto per la mineralogia, è dovuto a varii filoni pegmatitici, noti da tempo agli studiosi. Tali filoni non si incontrano soltanto fra le formazioni della penisoletta di Piona, ma anche fra quelle di tutta una zona assai più estesa, sia sui fianchi del Legnoncino e del Legnone, come pure più lontano. Di essi scrissero, o ad essi accennarono, oltrechè antichi autori, il Jervis (³), il Curioni (⁴), il Melzi (⁵) e, in questi ultimi anni, il Bertolio (⁶) ed il Repossi (⁷). Il quale ne diede anzi una diligente descrizione, illustrata da uno schizzo fotografico, nella terza delle sue Note sotto riferite In questa inoltre egli rivela la presenza di minerali di uranio fra quelli ritrovati nel più conosciuto dei filoni di Piona, il filone del laghetto, giacente sul fianco orientale della penisola, presso Cascina Béttega. Esso, già sfruttato industrialmente per il suo feldispato, è da ricordare anche per il ritrovamento del crisoberillo, mine-

(¹) Lavoro compiuto nell'Istituto di Mineralogia della R. università di Parma.

(²) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

(³) G. Jervis, *I tesori sotterranei d'Italia*. Torino, 1873, vol. I, pag. 240.

(⁴) G. Curioni, *Geologia applicata delle province lombarde*. Milano, 1877, vol. I, pag. 25.

(⁵) G. Melzi, *Di un nuovo giacimento mineralogico interessante sulle sponde del laghetto di Piona*, « Giornale di mineralogia, cristall. e petrogr. », di F. Sansoni. Milano, 1890, vol I, fasc. I, pag. 60.

(⁶) S. Bertolio, *Sui filoni pegmatitici di Piona e sulla presenza in essi del berillo*, « Rend. del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », serie II, vol. 36, an. 1903, pag. 368.

(⁷) E. Repossi, *Appunti mineralogici sulla pegmatite di Olgiasca* (lago di Como), « Rend. R. Accad. Lincei », vol. XIII, I° sem., 1904; *Il crisoberillo nella pegmatite di Olgiasca* (lago di Como), « Atti Congresso Naturalisti italiani ». Milano, 1907; *I filoni pegmatitici di Olgiasca, Rinvenimento in essi di minerali di uranio*, « Atti della Società Ital. di Scienze Nat. », vol. 52, pag. 487.

rale rinvenuto in Italia forse soltanto nelle pegmatiti di Sondalo (Valtellina). Associato però a questo minerale non trovasi nello stesso filone l'altro minerale assai più comune di glucinio, il berillo. E neppure fu rinvenuto berillo in un filone pegmatitico di minore potenza, che il Bertolio ([1]) indicò a mezzogiorno di Olgiasca, in località Rivetta, e che può ritenersi con ogni probabilità un prolungamento del primo.

La specie minerale, oggetto della presente Nota, abbonda al contrario in un filone giacente poco a nord della C. Malpensata, sul versante della penisola opposto a quello del laghetto: piccolo filone in concordanza con gli schisti, affiorante in modo visibile per una decina di metri e la cui potenza non supera forse i due. Mai sfruttato a scopo industriale, fu lavorato, dopo la scoperta del berillo fattavi dal Bertolio, al solo fine di trarne minerali per collezioni o per studio. Di là vengono i grandi cristalli di berillo della regione serbati nel Museo civico di Milano e quelli raccolti dal prof. C. Viola per l'Istituto di mineralogia della R. Università di Parma.

Attratto dalla ricchezza dei minerali inclusi nelle pegmatiti di Piona e delle regioni adiacenti, che il prof. Viola ebbe cura di raccogliere sopra luogo, mi ero proposto, fin dalla primavera del 1915, di studiarne alcuni in modo completo. Ma, nel maggio di quell'anno, chiamato dalla guerra ad assolvere ben altro e più grave còmpito, dovetti rimanere lontano per lungo tempo dagli studî e dalla scienza. Nè ora posso prevedere — fra tanta svalutazione del lavoro intellettivo e in special modo di quello puramente scientifico — se e quando mi sarà concesso di riprendere, con animo sereno e col necessario fervore, le ricerche cominciate. Perciò credo meglio far conoscere con questa Nota quanto le poche indagini, da me compiute fin dal 1915 intorno al berillo di Piona, hanno potuto dimostrare.

Ho già detto che il berillo dell'interessante giacimento si presenta spesso in cristalli di grandezza considerevole: essi raggiungono talvolta, come osservò anche il Repossi, oltre 30 cm. di lunghezza e 7-8 cm. di larghezza. Un lieve straterello micaceo ne avvolge la superficie delle facce, rendendo così facile il distacco di quelli dalla roccia includente. Forma comune appare soltanto il prisma esagono, senza riconoscibili terminazioni naturali: lamelle micacee infatti, ordinate entro i singoli cristalli secondo il piano basale di questi, ne cagionano la separazione irregolare delle estremità. Il minerale, di colore giallo-verdastro chiaro od azzurro-verdognolo, è torbido, spesso con numerose fratture, che ne traversano la massa e che si vedono riempite di mica o di altri minerali difficilmente determinabili.

Al microscopio lamine di berillo, tagliate normalmeute all'asse senario, mostrano evidente la nota anomalia ottica, per cui il minerale, vuolsi per pressioni subìte, appare biassico. Su tali lamine e su altre, tagliate paral-

([1]) S. Bertolio, loc. cit.

lelamente al medesimo asse, furono determinati gli indici di rifrazione, ω ed ε, per mezzo del rifrattometro Abbe-Pulfrich.

Gli angoli limite θ, quali risultarono dalle misure, appaiono dalla tabella seguente, che riassume i valori ottenuti, operando con luce gialla di sodio, su 5 lamine diverse, 2 parallele e 3 normali all'asse senario.

Per lamine $\parallel A_6$

	θ_ω	θ_ε
I	55°.30',2	55°.16',5
II	" .39,8	" .27,4

Per lamine $\perp A_6$

III	55°.29'	55°.13',5
IV	" .32	" .14,4
V	" .31,1	" .14,9

Dal valore di tale angoli si dedussero i valori di ω e di ε per mezzo della nota formula

$$n = \mu \operatorname{sen} \theta ,$$

dove μ è l'indice di rifrazione del mezzo otticamente più denso, con cui le lamine sono poste a contatto, θ l'angolo limite della riflessione totale, n l'indice cercato.

Tali valori, calcolati da quelli θ sopra esposti e da $\mu = 1.9070$ — tale essendo l'indice di rifrazione, per la luce del sodio, dell'emisfera nel rifrattometro usato — sono i seguenti:

	ω	ε
I	1.5716	1.5674
II	1.5747	1.5708
III	1.5713	1.5664
IV	1.5723	1.5667
V	1.5720	1.5668

D'onde la birifrangenza negativa del berillo $(\omega - \varepsilon)$ risultò, per le 5 lamine in esame,

I	0.0042	III	0.0049
		IV	0.0056
II	0.0039	V	0.0052

con un valore medio $\omega - \varepsilon = 0.00476$.

Il peso specifico fu determinato con la bilancia di Westphal e ioduro di metilene su varî frammenti di piccole e medie dimensioni: esso risultò eguale a 2.67, con variazioni sensibili nella terza decimale.

Fu infine sottoposto il berillo ad analisi quantitativa e la composizione risultante dalla media dei valori di due determinazioni, compiute sullo stesso cristallo, è quella sotto riferita:

	%
SiO_2	65,50
Al_2O_3 / Fe_2O_3 (tracce)	19,72
BeO	11,52
CaO	0,88
MgO	0,33
K_2O	0,27
Na_2O	2,03
	100,25
Perdita per arrov.[to]	1,46

Il BeO fu determinato separando l'idrato di berillo dall'idrato di alluminio e di ferro per breve riscaldamento a bagno-maria in carbonato ammonico (1:4) + solfuro ammonico dei 3 idrati e per successiva ebollizione prolungata del soluto, filtrazione del precipitato, soluzione di questo in acido cloridrico, riprecipitazione degli idrati e seconda separazione con carbonato ammonico.

Biologia. — *Sulla presenza di depositi uratici nel tessuto adiposo dei Termitidi* (¹). Nota I di Carlo Jucci, presentata del Socio B. Grassi (²).

In due precedenti Note (³) ho brevemente riassunto i risultati del mio lungo studio (1917-20) sui Termitidi e più precisamente sulla differenziazione della casta neotenica. Nella II Nota accennavo ad abbondanti depositi urici nel corpo grasso degli alati sciamanti e reali veri di *Calotermes* e additavo in essi l'indice di processi metabolici profondamente diversi da quelli dei reali neotenici, evidentemente in rapporto alla differenza dei processi anabolici, alla dieta alimentare caratteristica che conduce alla differenziazione degli individui neotenici dai riproduttori normali.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Roma.

(²) Presentata nella seduta del 19 dicembre 1920.

(³) *Sulla differenziazione delle caste nella società dei Termitidi. I neotenici.* Nota I e II. Rendiconti Accad. Lincei, Scienze Fis. Mat. e Nat., vol. XXIX, serie 5ª, 2° sem., fasc. I e II, Roma, luglio 1920.

Proseguendo nel mio studio mi sono proposto di chiarire i seguenti punti essenziali: 1°) come e quando compaiano le concrezioni uratiche nel corpo adiposo dei futuri sessuati; 2°) se e come sia dimostrabile la loro derivazione quale residuo dalla digestione delle inclusioni albuminoidi; 3°) quando queste inclusioni albuminoidi si formino e se solamente da accumulo dei prodotti elaborati dall'intestino o non anche, negli alati fondatori di nuova colonia, da messa in riserva dei prodotti istolitici di organi imaginali (muscoli alari); 4°) quali variazioni induca il digiuno nella quantità delle inclusioni albuminoidi e delle concrezioni uratiche; 5°) quale sia la esatta composizione chimica di queste concrezioni e se veramente aumentino di numero e grandezza negli sciamanti che continuano a vivere e fondano una nuova colonia; 6°) se e quando nei reali a capo d'una coloniola scompaiano dal corpo adiposo gli urati e si depositino nei varî organi escretori i prodotti caratteristici del metabolismo neotenico.

Credo opportuno per ora anticipare la comunicazione succinta dei principali fatti osservati: « faits tellement evidents que l'imagination n'a plus de prise sur eux, chose toujours bonne pour se former une serieuse convinction » (1).

È proprio strano che osservazioni così facili (non fa bisogno d'alcuna tecnica speciale e nemmeno di forte ingrandimento microscopico) e così importanti (per penetrare un po' nell'intimità dei processi vitali e degli adattamenti biologici), su un materiale tanto studiato come i Termitidi (e i fenomeni da me rilevati sono di tal natura da potersi prevedere generalizzabili a tutto il gruppo), non sieno state fatte prima d'ora.

Ver'è che anch'io ho avuto per tre anni sottomano le due specie indigene, *Termes* e *Calotermes*, senza pervenire ad alcuna osservazione del genere.

È stato il pigmento tegumentario delle vecchie regine di complemento il carattere spia che, orientando la mia attenzione verso lo studio dei prodotti escretivi presi ad indice dei processi metabolici, m'ha dischiusa una via nuova di ricerche.

Rimane tuttavia ben singolare il fatto che Feytaud abbia potuto compiere un accuratissimo lavoro (2) sulle « modifications anatomiques subies par l'image après l'essaimage », e segnatamente sulla « transformation du tissu adipeux », senza nulla notare di ciò che salta agli occhi anche colla più grossolana delle dissezioni (3).

(1) Fabre, 1863. *Études sur le rôle du tissu adipeux dans la sécretion urinaire des insectes.* Ann. Sc. Nat. Zool.

(2) Feytaud, 1912. *Contribution à l'étude du Termite lucifuge.* Arch. Anat. Microsc., XIII.

(3) Come del resto con gli usuali metodi istologici: le concrezioni uratiche si con-

Fu nei reali veri di Calotermes, cui rivolsi la mia attenzione per dimostrare caratteristici del metabolismo neotenico i prodotti ptialurici da me trovati nei reali di complemento e sostituzione, ch'io dapprima osservai la presenza di depositi uratici nel corpo grasso dei Termiti. Nell'addome e anche nel torace, ormai sgombro di muscoli alari, tutto il tessuto adiposo è fittamente farcito di grosse concrezioni sferitiche rifrangentissime che a campo oscuro spiccano bianche opache nei preparati a fresco come nelle sezioni.

Sono così fittamente accumulati questi sferoliti che solo ai margini di qualche più giovane lobulo adiposo è dato distinguere la struttura del tessuto: apparentemente sinciziale, dacchè, senza verun limite cellulare, v'appaiono sparsi grossi nuclei, a nucleolo acidofilo e rete cromatinica basofila, frequentemente in divisione amitotica. Benchè varie di grandezza e forma e struttura le concrezioni sono generalmente sferoidali e costituite da varî strati concentrici, variamente rifrangenti, attorno ad uno o più ili.

L'esame chimico le rivela per concrezioni uratiche. Dànno infatti la reazione della muresside e negli acidi acetico e cloridrico si dissolvono per rideporsi in forma di cristalli d'acido urico tabulari isolati o aghiformi in bellissime druse. D'altronde l'esame morfologico (1) le mostra identiche alle concrezioni d'urato di soda che Cuénot trova nei Blattidi e vede aumentare gradatamente di dimensioni « si bien que chez les adultes à maturité sexuelle le corps adipeux n'est plus qu'un énorme amas d'urates, les cellules adipeuses vidées de leur contenu étant presque complètement annihilées par le développement des cellules à concrétions ».

Reali di *Termes lucifugus* non esistono, qui almeno nella campagna romana, in natura (2), ma, allevando coppie di alati sciamanti in provette

---

servano perfettamente bene nelle sezioni (purchè si abbia cura di evitare: nell'imparaffinamento le temperature eccessivamente elevate e nella colorazione la differenziazione in alcool acidulato. Solo in qualche punto nel materiale da me fissato col liquido di Leewen l'acido acetico converte gli urosferiti in cristalli giallicci d'acido urico).

(1) Questi urosferiti presentano fenomeni ottici (croce di polarizzazione, non estinzione, colori d'interferenza nei più grandi elementi) simili a quelli segnalati da Henneguy per i calcosferiti del tessuto adiposo di Phitomiza, da Pettit per calcosferiti in calcificazioni patologiche (1897) e da Philiptschenko per le concrezioni d'urato di soda del corpo grasso dei Collemboli (1902).

(2) Recentemente Feytaud ha dimostrato non infrequente in Francia la formazione di nuove colonie da parte d'individui sciamanti che si ritrovano, ancora dopo 2 anni, re e regina tra numerosissima prole (un migliaio d'individui), Poi, a cominciare dalla fine del secondo anno, la coppia reale vera viene sostituita da una larga schiera di reali neotenici. Ecco dunque verificata sperimentalmente l'ipotesi del Silvestri. Ma in Italia non si è mai rinvenuta alcuna coppia reale; e questo m'induce a supporre che sotto il nome di Termite lucifugo si comprendano due specie, o razze biologiche almeno, distinte: nella nostra sarebbe particolarmente spinto il singolare adattamento biologico, comune a tutto il genere *Leucotermes*, alla propagazione diffusiva con formazione di reali complementari.

(già dal 1893 il Grassi dimostrò la possibilità di ottenere così artificialmente nuove colonie), mi sono procurato giovani reali [1], sui quali ho verificato la perfetta identità dei fenomeni nelle due specie indigene di Termiti.

Tale identità del resto risulta senz'altro evidente dallo studio degli alati sciamanti delle due specie: nei quali anche, il corpo adiposo è farcito di prodotti urosferitici, nell'addome soprattutto, ma anche nel torace tra i muscoli alari e perfino nella testa. Il corpo lacerato d'uno sciamante strisciato su un vetrino lo ricopre d'innumerevoli urosferiti, e, tagliato in pezzi e gettato in una capsula con qualche goccia d'acido nitrico, svolge una effervescenza vivissima come un frammento di calcare. Disseccando la soluzione ottenuta e umettandone il residuo con ammoniaca si ha formazione abbondantissima di porporato d'ammonio. Ma nel corpo adiposo dell'alato sciamante spiccano, di tra i mucchi di urosferiti, specie nella parte anteriore dell'addome, a livello del gisiere e del ventricolo, numerose zollette eosinofile, inclusioni albuminoidi che sembrerebbero doversi interpretare come i residui ancora relativamente abbondanti delle ricchissime provvigioni albuminoidi accumulate nella ninfa e consumate man mano, evidentemente per i bisogni del metabolismo e soprattutto per la crescita dei genitali e la costruzione dell'organismo volante.

Difatti nelle ninfe di *Termes* e *Calotermes* il tessuto adiposo, farcito di goccie grassose e d'inclusioni albuminoidi (spiccano intensamente eosinofile, poligonali, grandi e piccole, in grande quantità, disposte specialmente lungo le briglie del reticolo citoplasmatico: molte piccole appaiono ammassate attorno ai nuclei), presenta qua e là, forse contenuti in speciali cellule uriche, gruppi numerosi di urosferiti. Ma simili depositi uratici compaiono fin dagli stadî larvali e si rinvengono anche nelle piccole larve; si ritrovano altresì negli individui adulti delle caste di neutri: negli operai di *Termes* e nei soldati di *Termes* e *Calotermes*.

[1] Merita particolare menzione una coloniola fondata il 15 maggio con coppia sciamante. Aperta il 26 agosto conteneva, oltre gli individui reali già assai sensibilmente ingrossati, 5 uova, 4 larve (2 assai piccole e un'altra candida e un'altra rossiccia di legno), un operaio quasi adulto (aiuta i genitori a trasportare le uova quando si disturba il nidino) e un soldato ancor bianco (Feytaud nelle sue coloniole non vide comparire, neanche dopo 18 mesi, soldati). Riprendendo le esperienze di allevamento spero, collo studio delle giovani colonie, portare un contributo alla soluzione del problema dei neutri.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Volterra dà il doloroso annuncio della morte del Socio nazionale sen. prof. Giuseppe Colombo, spentosi il 16 gennaio 1921, di cui ricorda con affettuosa e calda parola i meriti di scienziato e di cittadino, aggiungendo che dell'estinto sarà fatta una speciale Commemorazione; e informa inoltre la Classe di un'altra perdita nella persona del Socio straniero prof. Guglielmo Waldeyer, mancato ai vivi il 23 gennaio 1921.

Il Socio Viola dà notizia della morte del Socio straniero E. S. Fedorow, avvenuta nel giugno del 1920.

Il Socio Mattirolo legge una dotta commemorazione del defunto Socio nazionale prof. Pier Andrea Saccardo, del quale illustra la vasta opera scientifica; questa Commemorazione sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono, richiamando l'attenzione della Classe su quelle del Socio Fano e dei Corrispondenti Berlese e Silvestri, e su di una raccolta di scritti in memoria del Socio straniero Norman Lockyer, inviata dalla vedova del defunto accademico.

Il Socio Paternò fa omaggio, a nome dell'autore prof. Aldo Mieli, della pubblicazione da quest'ultimo diretta: *Gli scienziati italiani dall'inizio del Medio Evo ai nostri giorni*, e ne discorre.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Castelnuovo comunica il seguente

Elenco dei lavori presentati al concorso al premio Reale per l'*Astronomia*.

(Scadenza 31 dicembre 1920. — Premio di L. 10.000).

1. Abetti Giorgio. 1) « Determinazione preliminare della parallasse di 61 Cygni » (st.). — 2) « Ascensioni rette di 140 stelle » (st.). — 3) « Ricerca sui moti proprî in Ascensione retta di 140 stelle » (st.). — 4) « Sul moto proprio di BD + 4° 4879 » (st.). — 5) « Parallassi di 42 stelle ecc. » (st.) — 6) « Parallasse delle stelle fisse » (st.). — 7) « Il sistema binario

τ Cygni » (st.). — 8) « Gli spettri delle stelle » (st.). — 9) « Misure micrometriche di coppie di stelle 1910-1913 » (st.). — 10) « Il sistema multiplico ξ Ursae Maj. » (st.). — 11) « Densità di alcuni sistemi binarî visuali » (st.). — 12) « Determinazioni di longitudine astronomica con la telegrafia senza fili » (ms.). — 13) « Determinazioni di latitudine astronomica » (ms.). — 14) « Determinazioni astronomiche di tempo » (ms.). — 15) « Progetto della torre solare per l'Osservatorio di Arcetri » (ms.). — 16) « N°. sette tavole e una descrizione manoscritta del telescopio a torre per osservazioni fisiche del sole » (ms.).

2. Armellini Giuseppe. 1) « Il problema dei due corpi nell'ipotesi di masse variabili » (st). — 2) « Sulla forma della traiettoria nel problema dei due corpi di masse crescenti, e sulle sue applicazioni per una possibile spiegazione della grande eccentricità di Marte » (st.). — 3) « Determinazione matematica dello schiacciamento polare di Giove » (st.). — 4) « Estensione della soluzione del Sundman, dal caso di corpi ideali al caso di sferette elastiche omogenee » (st.). — 5) « Esame analitico della teoria del Fabry e Crommelin sull'origine delle comete » (st.). — 6) « Sopra un'ipotesi del Pickering relativa alla frequenza degli afeli delle orbite cometarie nelle vicinanze dell'antiapice » (st.). — 7) « Osservazioni sopra le comete secolari » (st.) — 8) « Sopra la forma dello sferoide lunare » (st.). — 9) « Osservazioni sopra una recente teoria della luce zodiacale » (st.). — 10) « Sopra le distanze dei pianeti dal Sole » (st.). — 11) « Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno » (st.). — 12) « Ricerche sopra la previsione dell'urto nel problema dei tre corpi » (st.). — 13) « Sull'estinzione della luce stellare nell'atmosfera di Roma » (st.). — 14) « Osservazioni fotometriche sopra la 'Nova Aquilae' e su Giove » (st.). — 15) « Nuova determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio » (st). — 16) « Sul Potenziale Galattico » (st.). — 17) « Le comete ed il calcolo nelle probabilità » (st.). — 18) « Il sistema planetario e le sue leggi empiriche » (st.). — 19) « Il problema dei due corpi di masse variabili » (st.). — 20) « Sul moto di un punto attratto da più punti fissi » (st.). — 21) « Sopra le perturbazioni secolari del pianetino Hungaria e sulla distanza di Leverrier » (ms.).

3. Tordelli Emilio Angelo. « Nuova scoperta scientifica. Teoria universale della repulsione del calore solare e planetario. Nuova teoria scientifica circa lo cause del moto dei pianeti e dei corpi celesti in generale » (st.).

4. Zappa Giovanni. 1) « Per la determinazione dei moti proprî delle stelle di Santini » (st.). — 2) « Riflessioni sulle stelle giganti e nane nella evoluzione stellare » (st.). — 3) « Semplificazione del calcolo della latitudine da osservazioni in primo verticale con il metodo delle coppie e nuove riflessioni sull'effetto degli errori » (st.). — 4) « Per una verifica sperimentale della teoria di relatività di Einstein » (st.). — 5) « Sul valore di una

particolare legge di forza centrale » (st.). — 6) « Sulla osservazione meridiana delle stelle quasi fondamentali » (st.) — 7) « Studio di un nuovo metodo per la determinazione della latitudine con osservazioni in primo verticale » (st.). — 8) « La Cometa periodica 1906 IV Kopff nella sua prima apparizione » (st.). — 9) « Determinazione della latitudine dell'Osservatorio di Catania » (st.). — 10) « Valori normali delle coppie di Battermann » (st.). — 11) « Differenze sistematiche tra il catalogo fondamentale di Newcomb e quello di Auwers » (st.). — 12) « Per la riduzione attinometrica del catalogo astrografico internazionale e in particolare della zona Catanese » (st.). — 13. « Scandaglio della condensazione galattica » (st.). — 14) « Studio del micrometro e delle livelle del zenitale di Capodimonte » (st.). — 15) « Lo studio fotometrico delle variabili a corto periodo e ad ecclissi » (st.). — 16) « Il calcolo delle costanti delle lastre fotografiche » (st.). — 17) « Studio del Macromicrometro » (st.). — 18) « La riduzione del Catalogo astrofisico internazionale studiata nella zona Catanese » (ms.).

Il Presidente dà comunicazione del bando di concorso al premio istituito da S. M. il Re per onorare la memoria di Augusto Righi, presso la R. Università di Bologna; i lavori dovranno trattare di fisica sperimentale, e dovranno esserne autori scolari del defunto sen. Righi.

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXIX. (1892-1920). Fasc. 1°-12°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 7°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 5.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano*, *Pisa* e *Napoli*.

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma*.

RENDICONTI — Febbraio 1921.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Seduta del 6 febbraio 1921.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CONCORSI A PREMI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

Pubblicazione bimensile. **N. 4.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXX.° — Fascicolo 4°

Rendiconto del 20 febbraio 1921.

1° SEMESTRE

ROMA

TIP. DELLA R. ACCAD. NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconto del 20 febbraio 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* II: *La geometria sulle varietà abeliane.* Nota del Socio G. CASTELNUOVO [1].

5. Conviene illuminare i risultati della Nota precedente [2] col linguaggio della geometria algebrica. Formiamo perciò, mediante rapporti convenienti di funzioni intermediarie relative alla matrice (1), $p+1$ funzioni abeliane

$$x_i = f_i(u_1, \dots, u_p) = f_i((u)) \qquad (i = 1, 2, \dots, p+1) \tag{21}$$

cioè funzioni meromorfe al finito, aventi i $2p$ gruppi di periodi forniti dalla detta matrice. E ricordiamo che tra le x_i passa sempre una relazione algebrica

$$V(x_1, \dots, x_{p+1}) = 0, \tag{22}$$

la quale rappresenta una varietà *abeliana* V_p, di uno spazio a $p+1$ dimensioni. Supporremo che la corrispondenza tra il punto (21) della V_p ed il gruppo $(u_1, \dots, u_p)$ di valori dei parametri sia biunivoca.

In questa ipotesi, data la matrice (1), la varietà abeliana V_p è determinata, a meno di una trasformazione birazionale Viceversa, data la V_p, è determinata la matrice (1) od una matrice *equivalente* (Scorza), cioè dedotta dalla (1) mediante combinazioni lineari tra le orizzontali (che por-

[1] Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

[2] Questi Rendiconti, vol. XXX, 1° sem., fasc. 2°, pag. 50; essa verrà citata con I seguìto dal n. del § o della formola.

tano a sostituire ai parametri u nuovi parametri e mediante sostituzioni lineari a coefficienti interi, unimodulari, tra le verticali (che portano a sostituire un sistema di periodi primitivi con un nuovo sistema di periodi primitivi).

Ne viene che le trasformazioni eseguite in I, 3 non alterano la varietà V_p, ma permettono di introdurre in questa un sistema più comodo di parametri U ed un più semplice sistema di periodi (13). Al contrario, là trasformazione di parametri (I (16)), $U_l = \delta v_l$, quando $\delta > 1$, e l'adozione della matrice di periodi (17) porta a rappresentare i punti U_l della varietà V_p sui gruppi di una involuzione d'ordine δ^{p-1} appartenente ad una nuova varietà abeliana W_p descritta dal punto v_l; il gruppo generico della involuzione essendo dato da $\left(v_1 + \frac{a_1 e_1}{\delta}, \ldots, v_p + \frac{a_p e_p}{\delta}\right)$, ove a_l percorre i numeri $0, 1, \ldots, \frac{\delta}{e_l} - 1$.

Premesso ciò, riprendiamo la funzione intermediaria $\varphi((u))$ o $\varphi_2((U))$ (I, nn. 1-3). L'equazione $\varphi = 0$ o $\varphi_2 = 0$ rappresenta una varietà algebrica Φ a $p-1$ dimensioni entro V_p, *varietà intermediaria*. La corrispondenza algebrica $(1, \delta^{p-1})$ ora considerata tra V_p e W_p muta la Φ in una nuova varietà intermediaria Θ di W_p, appartenente all'involuzione suddetta; la quale varietà è rappresentata dall'annullarsi della funzione Θ d'ordine δ data dalle formole (18) e (19), e può quindi chiamarsi *varietà* Θ d'ordine δ. Con ciò il risultato si presenta così:

Data entro una varietà abeliana V_p *una varietà intermediaria* Φ (a $p-1$ dimensioni) *di determinante* $\delta > 0$, *è sempre possibile trasformare la* V_p *in una nuova varietà abeliana* W_p *con una trasformazione razionale* $(1, \delta^{p-1})$, *in guisa che la* Φ *si muti in una varietà* Θ *d'ordine* δ *della* W_p. E viceversa, ad ogni varietà Θ d'ordine δ di W_p appartenente alla involuzione ivi esistente corrisponde una varietà intermediaria di V_p.

Ora una funzione Θ d'ordine δ contiene linearmente δ^p costanti arbitrarie; ma se la Θ è costretta a verificare le condizioni I (19), il numero di queste costanti si riduce a $e_1 e_2 \ldots e_p = \delta$ [1]. Sicchè la varietà Θ di W_p dell'ultimo teorema, e quindi anche la Φ di V_p, appartiene ad un sistema lineare $\infty^{\delta-1}$. Se però insieme alla Φ si considerano le sue trasformate, entro V_p, mediante le ∞^p trasformazioni ordinarie di 2ª specie $u_l = u_l + \text{cost.}$, si conclude:

Una varietà intermediaria di determinante δ, *entro la varietà abeliana* V_p, *appartiene ad un sistema algebrico continuo* $\infty^{p+\delta-1}$ *costituito da* ∞^p *sistemi lineari di dimensione* $\delta - 1$.

p varietà generiche del sistema continuo hanno $p!\,\delta$ *punti comuni.* Infatti p varietà Θ di ordine δ di W_p hanno in comune (Poincaré, Wirtinger)

[1] Cfr. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Teubner, 1903), pag. 126.

$p!\,\delta^p$ punti, i quali si distribuiscono, nel nostro caso, in $p!\,\delta$ gruppi della involuzione esistente su W_p. A questi gruppi corrispondono altrettanti punti di V_p comuni a p varietà Φ [1].

6. Supponiamo ora di conoscere due funzioni intermediarie $\varphi_1((u))$, $\varphi_2((u))$ relative alla stessa matrice (1); siano δ_1, δ_2 i due loro determinanti, non nulli, e $m_{ik}^{(1)}, m_{ik}^{(2)}$ i loro interi caratteristici. Nel caso, di maggiore interesse, che le $m_{ik}^{(1)}$ non siano proporzionali alle $m_{ik}^{(2)}$, la matrice (1) possiede due diverse forme bilineari alternate (I, n. 2), ed è quindi singolare (Scorza).

Presi come esponenti due numeri interi positivi r_1, r_2, formiamo la funzione

$$\varphi = \varphi_1^{r_1}\,\varphi_2^{r_2} \tag{23}$$

che è pure intermediaria, coi periodi (1), e i numeri caratteristici $r_1 m_{ik}^{(1)} + r_2 m_{ik}^{(2)}$. Il determinante δ di φ è il pfaffiano, in valore assoluto, della matrice quadrata $\| r_1 m_{ik}^{(1)} + r_2 m_{ik}^{(2)} \|$; è quindi una forma d'ordine p in r_1, r_2:

$$\delta = I_0 r_1^p + \binom{p}{1} I_1 r_1^{p-1} r_2 + \binom{p}{2} I_2 r_1^{p-2} r_2^2 + \cdots + I_p r_2^p, \tag{24}$$

dove $I_0 = \delta_1$, $I_p = \delta_2$.

Se Φ_1, Φ_2 sono le varietà intermediarie a $p-1$ dimensioni, in V_p, rappresentate da $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, la varietà Φ rappresentata da $\varphi = 0$ appartiene a un sistema continuo che, con le notazioni della geometria algebrica, si suole indicare col simbolo $\{ r_1 \Phi_1 + r_2 \Phi_2 \}$.

Il numero delle intersezioni di p varietà generiche del sistema è $p!\,\delta$ (n. 5). D'altra parte il numero stesso è dato simbolicamente da

$$[r_1 \Phi_1 + r_2 \Phi_2]^p = r_1^p [\Phi_1^p] + \binom{p}{1} r_1^{p-1} r_2 [\Phi_1^{p-1} \Phi_2] + \cdots + r_2^p [\Phi_2^p], \tag{25}$$

dove $[\Phi_1^{p-h} \Phi_2^h]$ indica il numero delle intersezioni di $p-h$ varietà appartenenti al sistema $\{\Phi_1\}$ ed h varietà appartenenti al sistema $\{\Phi_2\}$. Poichè la espressione (25) ha lo stesso valore della (24) moltiplicata per $p!$ in corrispondenza ad *ogni* coppia di numeri interi positivi r_1, r_2, segue che

$$[\Phi_1^{p-h} \Phi_2^h] = p!\, I_h. \tag{26}$$

Quindi *i coefficienti della forma binaria* (24), che sono invarianti simultanei delle due funzioni intermediarie φ_1, φ_2, *hanno il significato geometrico assegnato dalle* (26).

7. Il risultato si può facilmente estendere al caso di tre o più funzioni intermediarie. La massima generalità si ottiene colla seguente considerazione.

[1] Il Lefschetz nella Memoria inedita già citata arriva a questo e al successivo risultato mediante considerazioni di *Analysis situs*.

Si supponga che l'*indice di singolarità* (Scorza) della matrice (1) sia $\varkappa$, ed in conseguenza che la (1) possegga $\varkappa + 1$ forme alternate (principali) di Riemann linearmente indipendenti. Siano

$$\Sigma\, m_{ik}^{(l)} \xi_i \eta_k \qquad (l = 0, 1, \ldots, \varkappa) \tag{27}$$

le forme reciproche di quelle, scelte in modo da costituire una *base minima*, in modo adunque che ogni altra forma consimile relativa alla matrice (1) possa ottenersi come combinazione lineare *a coefficienti interi*, r_l, delle (27) ([1]). Allora, detta φ_l una funzione intermediaria cogli interi caratteristici $m_{ik}^{(l)}$, e detta Φ_l la varietà rappresentata entro V_p da $\varphi_l((u)) = 0$, risulta che $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_\varkappa$ costituiscono una *base minima* per le varietà intermediarie entro V_p. Al variar degli interi r_l il sistema continuo

$$\{ r_0 \Phi_0 + r_1 \Phi_1 + \cdots + r_\varkappa \Phi_\varkappa \} \tag{28}$$

fornisce tutte le varietà intermediarie di V_p. Anzi *fornisce tutte le varietà algebriche a* $p - 1$ *dimensioni di* V_p, in virtù di un importante teorema con cui il Lefschetz, nella Memoria inedita nominata, estende a V_p un risultato che Appell ed Humbert avevano stabilito per le superficie iperellittiche.

Per ottenere la più generale espressione del teorema di Bézout entro V_p si formi il determinante

$$\| r_0 m_{ik}^{(0)} + \cdots + r_\varkappa m_{ik}^{(\varkappa)} \| .$$

Il pfaffiano di questo è una forma algebrica di grado p nelle $r_0, \ldots, r_\varkappa$; la indicheremo, scelto opportunamente il segno, con

$$\Sigma \frac{p!}{h_0! \ldots h_\varkappa!} I_{h_0 \ldots h_\varkappa} r_0^{h_0} \cdots r_\varkappa^{h_\varkappa},$$

la somma essendo estesa a tutti i gruppi di numeri interi non negativi $h_0, \ldots, h_\varkappa$ che dànno per somma p. Ora si trova col ragionamento del numero 6 che

$$[\Phi_0^{h_0} \ldots \Phi_\varkappa^{h_\varkappa}] = p!\, I_{h_0 \ldots h_\varkappa},$$

dove il simbolo a primo membro indica il numero delle intersezioni di $p = h_0 + \cdots + h_\varkappa$ varietà a $p - 1$ dimensioni, di cui h_0 scelte nel sistema continuo $\{\Phi_0\}, \ldots, h_\varkappa$ scelte nel sistema $\{\Phi_\varkappa\}$.

8. Le funzioni intermediarie considerate sinora hanno il determinante $\delta > 0$. Accenniamo rapidamente alle particolarità che si presentano se $\delta = 0$ e quindi $\| m_{ik} \| = 0$. Per limitarci al solo caso che interessi, supporremo che la (1) sia ancora *una matrice di Riemann*, cioè che essa possegga,

([1]) Scorza (loc. cit. in I), § 3 della Parte prima.

oltre la forma alternata (7) che è ora degenere, una forma alternata non degenere; la matrice è in tal caso (Scorza) singolare ed impura, ed è sempre collegata con una varietà abeliana V_p. Supponiamo poi che la caratteristica del determinante $\|m_{ik}\|$ sia $2q$ dove $0 < q < p$.

Allora con una opportuna trasformazione unimodulare sui periodi (1) e colla sostituzione, in luogo delle primitive variabili u, di convenienti loro combinazioni lineari U (cfr. I, n. 3), si trova che, dei p integrali di differenziale totale $\int dU_l$ annessi alla varietà V_p, i primi q costituiscono un sistema regolare di q integrali riducibili con $2q$ periodi. Le equazioni $U_1 = \text{cost.}, \dots, U_q = \text{cost.}$ definiscono entro V_p una congruenza ∞^q di varietà algebriche w a $p-q$ dimensioni, di cui una sola passa per un punto generico di V_p. Le stesse trasformazioni applicate alla primitiva funzione intermediaria $\varphi((u))$, seguite, se occorre, dalla moltiplicazione per un esponenziale ad esponente quadratico nelle U, mutano la φ in una nuova funzione intermediaria $\varphi_2(U_1, \dots, U_p)$ che si riconosce dipendere dalle sole variabili $U_1, \dots, U_q$. Si conclude dunque che *la varietà intermediaria a $p-1$ dimensioni rappresentata dalla equazione $\varphi((u)) = 0$ o $\varphi_2((U)) = 0$ è, nelle ipotesi attuali, formata da ∞^{q-1} varietà w della congruenza suddetta.*

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio Carlo De Stefani [1].

IV.

Eocene.

Strati inferiori.

Le rocce Triassiche e quelle ritenute Infraliassiche sono coperte da grande massa di rocce che io ritengo Eoceniche, tanto nei versanti della Polcevera e della Scrivia, quanto nella regione situata più ad Occidente. Le rocce di quest'ultima regione sono da altri attribuite al Permiano e da altri al Giura. Descriverò i fossili trovativi in ambedue le regioni; ma primieramente indicherò quelli trovati negli strati più antichi immediatamente sovrastanti al Trias ed all'Infralias, poichè, per avventura, potrebbero appartenere ad età geologica alquanto diversa da quella degli strati più alti. Debbo però soggiungere che io mi sono occupato a cercare fossili solo nella regione occidentale cristallina, quindi anche negli strati più alti di essa, ma non già in quelli più alti della regione eocenica orientale, meno o punto metamorfica, la cui età non è contestata.

[1] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

Valle dell' Iso.

Fra le rocce d'età incerta sarebbe anche il Calcare, o Cipollino, o Calceschisto molto siliceo che sta nella valle dell'Iso ad occidente del *Grezzone* del Trias superiore della ellissoide d'Isoverde fra quello e il Diabase. Siccome però la roccia è strettamente connessa con l'Eocene così mi parve unirla alla parte inferiore di questo terreno. Il detto Calcare siliceo (Calcite, Quarzo, Silice idrata, Sericite, Pirite, Limonite, ciuffi di Rutilo) è grigio cupo con venette quarzose e calcitiche normali agli strati. Presentasi un intreccio hexactinico dictyonale di almeno 3 ordini, con allineamento regolare, a volte radiale; ma con maglie quadrate o parallelogramme alquanto irregolari, meglio visibile dove sono convertite in Limonite. Sono senza spinosità e senza Lychnische, quantunque a 405 D, sembrerebbe vedere le une e le altre nelle Macrosclere, probabilmente per effetto di corrosioni. Certe maglie più grandi anche poligonali e a losanga, qualora non derivino da rottura delle altre, accennerebbero a piccole cavità cavediali. L'interno delle maglie convertite talora in Calcite è occupato spesso da Limonite o da Quarzo. Questo fatto, e la diversità di orientazione del Quarzo stesso fanno sì che la distribuzione delle maglie si fa meglio distinta al Polariscopio.

Trattandosi, come in ogni altro dei casi osservati, di esemplari frammentizi dei quali non vedesi la forma esterna, torna male distinguere fra i canali acquiferi quali sieno i canali inalanti o *Epirhize* e quali gli esalanti o *Aporhize* con le relative aperture (*Ostia* e rispettivamente *Postica*); però tenendo conto, come già dissi nell' introduzione, che la quiete nel fondo dei mari, poco o punto deve avere disturbato la situazione originaria, possiamo ritenere che nel caso delle *Dictyoninae* i canali inalanti fossero paralleli al fondo e ai sedimenti e successivamente alla stratificazione, e che i canali esalanti siano quelli normali cioè presso a poco verticali al fondo.

Quanto alla forma di organismi così delicati, devesi considerare che quella può essere stata alterata specialmente nel senso orizzontale da pressioni verticali sopravvenienti, come fu constatato in altri giacimenti di Spongiari; perciò cavità circolari, compresse, possono essere ridotte ellittiche od a losanga per rottura dei margini. Anche questa è una difficoltà della quale occorre tener conto nell'esame dei nostri esemplari. Con questi concetti e con queste riserve valevoli per tutti gli esemplari descritti dirò che in quelli della presente località vi sono *Ostia* puntiformi di piccole *Epirhize* in mezzo all' intreccio conformato a minutissime losanghe o ellissi con l'asse maggiore parallelo alle stratificazioni. Eran queste le forme che a prima vista mi davano l' idea di piccole *Nummuliti* lenticolari. Vi sono poi Ostia maggiori o *Postica* di *Aporhize* circolari con due o tre circoli periferici concentrici e con reticolo radiale fra essi, come pure attorno al circolo più esterno, caratteri questi non notati altrove.

Talora intorno a queste *Aporhize* sono 6 o 7 raggi angolosi, stellari con gli apici diretti all'esterno delle *Postica.* Sono ben distinte *Exactiniae* parenchimali, rare *Diactiniae*, *Oxyhexactiniae* e qualche *Pentactinia* dermale, forse una *Clavula*: placche dermali o gastrali con forellini irregolari ravvicinabili p. es. a quelle delle *Aphrocallistes* Gray, Cretacee e viventi, le quali però hanno le maglie prevalentemente triangolari.

Trattando con acido cloridrico oltre il tessuto meglio conservato nella parte limonitica, rimane un delicatissimo intreccio quarzoso di prismi piramidati sostituiti alla Silice colloide per modo che le singole Spicole restano ingrossate ed alterate: pure il tessuto hexactinico rimane in qualche breve tratto visibile ne' suoi più minuti elementi. Vedesi pure in negativa qualche *Oxyhexactinia* calcitica, forse di *Lyssacina* rimasta vuota nell'intreccio quarzoso. Si notano tubi di *Aporhize* verticali che terminano cechi in mezzo a tessuto hexactinico ed *Epirhize* oblique o normali alle precedenti, più o meno serpeggianti. La specie è dunque una *Hexasterosa* che per l'intreccio relativamente regolare si potrebbe paragonare al genere vivente e Cretaceo *Hexactinella* Carter, che però ha le spicole spinose.

Nell'intreccio siliceo notasi qualche rhabdo di *Megamorina* ed in quello quarzoso acidulato vidi un evidente *Pinakide* di *Tetractinella.*

Nella parte calcarea sono oscure tracce di *Orbulina* e *Biloculina.*

Il fossile ad ogni modo non dà precise indicazioni di età, salvo l'esclusione del Paleozoico.

Cairo.

Fra gli strati eocenici che direttamente o quasi succedono al *Grezzone* triassico, assai degno di nota è il ritrovamente delle Fornaci di Cairo sulla sinistra della Bormida presso il passaggio a livello della ferrovia. Ivi sotto alla lunga zona del Trias fossilifero che principiando alle Fornaci traversa senza discontinuità la Bormida e finisce al M. Gos, sotto come dicevo è uno Schisto nero che avrebbe potuto credersi *Carbonifero* con noduli di quarzo candido, alcuni direbbero di Quarzo grasso. Cotale Schisto, con la stessa situazione stratigrafica traversa la Bormida e sulla destra passa a Calceschisti scuri, pur sottostanti al Trias, ricoprenti a loro volta Gabbri e Serpentine estese a valle al di sotto dell'Oligocene che invade tutta la regione. Avevo già indotto che siffatta successione insolita di strati dal Trias in poi era effetto di un locale, esteso, rovesciamento e che gli strati stratigraficamente sottostanti al Trias appartenevano all'Eocene; il ritrovamento della Silicospongia fu coerente a questo concetto.

Lo schisto nero sopra detto, bene stratificato, a strati sottili ma irregolari e scontorti presenta Quarzo, abbondante Sericite, rara Clorite, Limonite pseudomorfa di Pirite nella parte schistosa, aciculi di Apatite tendente al verde, rarissimi prismi di Tormalina riconoscibili all'alto pleocroismo ed

alla completa estinzione a 0° ed un groviglio di microliti capillari di Rutilo intorno alle zonule più scure. Osservando i noduletti quarzosi con forte lente, e in sezioni, si vede che sono frammenti di una *Hexasterophora Lychniscosa.* a maglie dictyonali, regolari, minutissime, eventualmente visibili anche in brevi tratti della parte schistosa nella quale puntini bianchi, quarzosi, in serie, rispondono al centro di maglie hexactiniche o di canaletti acquiferi. Le Megasclere, meno visibili fuori del Quarzo, sono regolari, a maglie quadrate, con Lychnische ben distinte; le microsclere, pur regolari, sono più visibili nella parte limonitica. Sulla superficie *Ostia* puntiformi ed altre aperture circolari di canaletti esalanti con intreccio radiale. Mai *Amphidischi*, *Scopulae*, *Clavulae*, *Uncini*. Era probabilmente una *Lychniscosa inermia* come tante altre notate nella massa degli schisti che ho attribuito all'Eocene.

Geologia. — *Cenni di un ordinamento sistematico delle Stimate geologiche.* Nota del Socio A. Issel [1].

L'ordinamento razionale di una serie di oggetti naturali, più o meno collegati fa loro da caratteri comuni, o di un complesso di fenomeni dotati di un certo grado di affinità, suol essere frutto di intensa indagine e costituisce un fattore efficace a pro' della didattica, massime se sia accompagnato da una opportuna terminologia sistematica. Inoltre, e su questo punto importa insistere, esso è suscettibile di promuovere notevoli progressi della disciplina cui si riferisce.

Chi non vede, ad esempio, quanto sia agevolato lo studio della chimica dalla classificazione razionale dei composti e della terminologia che ne consegue? Chi non è persuaso delle scoperte suscitate in ordine alla teoria delle combinazioni e in numerose applicazioni dal principio di cui tengo discorso?

Inspirato da questo concetto, già tentai di metterlo in pratica nel campo della geologia, col tentativo di un ordinamento logico delle icoliti o pietre figurate, e credo non senza vantaggio, malgrado le imperfezioni che non seppi evitare [2]. Nella Nota che sottopongo oggi all'apprezzamento dei Colleghi, mi faccio a tracciare le prime linee di un ordinamento delle *Stimate geologiche.*

Non mi mancherebbero gli elementi per lo svolgimento, se non integrale, almeno esteso della materia; ma, a causa delle difficoltà materiali che per me si oppongono alla pubblicazione di una voluminosa Memoria [3], mi contenterò di esporre uno schema assai succinto.

[1] Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

[2] *Prime linee di un ordinamento sistematico* ecc. Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XI, fasc. 11°. Roma, 1916.

[3] Alludo principalmente alla crisi dell'industria tipografica.

Prima di tutto, qual'è propriamente il significato che attribuisco alla espressione che campeggia nel titolo della mia Nota?

Le stimate geologiche sono per me le tracce, i segni, in certo modo i relitti. di mutamenti di carattere fisico-chimico, meccanico e talvolta anche biologico, indotti *localmente* nelle masse rocciose, d'ordinario alla superficie, per opera di fenomeni geologici attuali o riferibili a tempi non remotissimi.

Non si tratta dei corrugamenti orografici e quindi dei tipi svariatissimi di giogaie, monti singoli, acrocori, e nemmeno di pianure, valli, catini e in genere di depressioni emerse e sommerse; non vi sono contemplate le forme delle terre emerse, i varî tipi di rive più o meno articolate, le formazioni d'origine ignea ed acquea, i fenomeni precipui relativi al vulcanismo in genere, al metamorfismo regionale, alle grandi soluzioni di continuità della corteccia terrestre, nè tampoco si comprendono fra le stimate i mutamenti cagionati dalla morfologia terrestre, dai ghiacciai, dai bradisismi. Prescindo finalmente dalle tenui alterazioni temporarie che si producono sotto ai nostri occhi alla superficie dei ghiacci e nelle distese di sabbie desertiche agitate dai venti. Intendo occuparmi invece, sotto l'accennata denominazione, di certi caratteri proprî alle meteoriti, di segni osservati sulle rocce colpite dalla folgore, di tracce d'erosione lasciate sulle superficie rocciose per opera delle correnti atmosferiche e delle acque meteoriche o correnti, delle cavità praticate meccanicamente o per effetto di soluzione dalle acque superficiali, delle incrostazioni e degli intonachi abbandonati per opera delle acque mineralizzate, in ispecie di quelle che raggiungono temperatura più alta dell'ordinaria, di certi casi di metamorfismo locale, delle sublimazioni e delle rubefazioni vulcaniche, delle piccole soluzioni di continuità o leptoclasi dovute a pressioni o trazioni esercitate localmente sulle rocce, dei segni di frane e di carreggiamento lasciati alla superficie di alcune formazioni, delle scalfitture (veri sismogrammi naturali) tracciate sulle superficie rupestri per fatto dei terremoti, dei solchi d'erosione e dei fori di litodomi che accusano spostamenti nel livello rispettivo del mare e delle terre emerse, delle strie, dei solchi, delle aree levigate per opera di ghiacci emersi o sommersi, delle figure di viscosità, delle impressioni radiculari, delle icbniti e d'altri segni d'origine organica, non in quanto si riferiscono a peculiari tipi di animali e di piante, ma perchè attestano condizioni fisiche speciali proprie ai sedimenti in cui si osservano.

Le stimate geologiche non costituiscono individui ben definiti, come spesso si verifica nelle icoliti; non presentano vere unità specifiche, come i fossili e i minerali, e perciò si prestano assai meno di questi ad essere inquadrate nelle divisioni e suddivisioni tassonomiche, e non è facile assegnare a ciascun gruppo il posto che gli compete.

Una prima distinzione, di carattere artificiale, sarebbe quella da stabilirsi in base al fatto che si dànno stimate nelle quali si verificò:

a) eliminazione di materia dovuta, secondo i casi, ad azione meccanica, chimica o biologica (esempî: solchi e strie glaciali, fori di litodomi);

b) accrescimento di materia, suscettibile di essere attribuito a deposito idrotermale o di acque mineralizzate, a sublimazione od anche a fenomeno biologico (esempî: incrostazioni di geyserite e di pelagosite);

c) alterazione di materia, che consegue, sia da fusione, sia da pseudomorfosi, sia dalla introduzione di elementi che non preesistevano nella matrice, sia da mutamenti nella struttura. Si tratta per lo più di fenomeno superficiale, ma può raggiungere una certa profondità (esempî: formazione di minerali nuovi a contatto delle intrusioni di rocce ignee);

d) compressione di sedimenti, nei casi in cui la compressione o il costipamento conferirono ad un deposito caratteri morfologici o struttura peculiare (esempî: cristallinità e scistosità per effetto di dinamometamorfismo).

Ognun vede come da siffatta enumerazione possono risultare quattro gruppi di stimate, ciascuno dei quali comprende tracce di fenomeni disparatissimi; ma il numero loro non è certo adeguato al bisogno.

L'ordinamento da preferirsi è ben diverso, e deve, in quanto sia possibile, inspirarsi ai principî del metodo naturale. Convien scegliere per base, in altre parole, i caratteri precipui, quelli specialmente fondati sulla genesi.

Il mio tentativo mi ha condotto a proporre, per ora, nove divisioni principali di stimate, ciascuna delle quali si scinde in un certo numero di sezioni; mi riserbo poi di proporre una ulteriore suddivisione delle sezioni in varietà e mutazioni; ma ciò non sarebbe possibile nello spazio concesso ad una Nota preliminare.

Ecco, ora, ridotto nei minimi termini, lo schema dell'ordinamento proposto:

Classe 1ª – *Stimate cosmiche.* — Sono quelle che si osservano esclusivamente nelle meteoriti, e si distinguono, in base agli studî di Daubrée, nelle sezioni qui appresso enumerate: *per fusione*, *per attrito*, *per ossidazione*, *per frantumazione*, *per erosione*.

Classe 2ª – *St. atmosferiche.* — Comprendono le sezioni segnalate con questi termini: *per logoramento*, *per disintegrazione*, *per idratazione*, *per piovosità*, *per fulminazione*, *per alterazione*, *per disseccamento*, e comportano parecchie suddivisioni di terzo ordine.

Classe 3ª – *St. idrosferiche.* — Sono dovute alle acque marine e continentali; comprendono le sezioni precipue segnalate colle espressioni: *per erosione*, *per soluzione*, *per trapanazione*, *per disfacimento*, *per increspatura* con diverse varietà.

Classe 4ª – *St. idrominerali.* — Si possono scindere in due gruppi principali, secondochè sono formate da acque termali e non termali, le quali si distinguono poi in marine e continentali. Sezioni più notevoli: *per evaporazione*, *per precipitazione*, *per reazione*, con parvenze e modalità più o meno distinte.

Classe 5ª - *St. vulcaniche.* — Sezioni principali: *per sublimazione, per vetrificazione, per rubefazione, per reazione.*

Classe 6ª - *St. tectoniche.* — Sezioni più importanti: *per flessione, per sollevamento, per frattura, per rigetto, per terremoto, per frana, per carreggiamento* ecc. Parecchie varietà ben distinte.

Classe 7ª - *St. plutoniche.* — Sezioni: *per termometamorfismo, per dinamomorfismo, per pseudomorfosi, per frantumazione.* Non mancano mutazioni di ciascun gruppo.

Classe 8ª - *St. glaciali.* — Sezioni: *per attrito* (con modalità diverse e varietà subacquee ed emerse), *per compressione* (nei così detti *pavimenti glaciali*).

Classe 9ª - *St. fisiologiche.* Si tratta delle orme di vertebrati o ichniti, delle tracce di reptazione e d'altri segni lasciati sopra sedimenti molli, sommersi ed emersi, dall'incedere di animali striscianti o natanti.

Senonchè questi relitti figurano tra le stimate in quanto accusano condizioni speciali dei depositi sui quali si osservano, e non dal punto di vista della paleontologia. Vi si connettono, in una sezione propria, le *impronte radiculari*; a titolo di appendice vi si potrebbero aggregare le *figure di viscosità*, le *dendriti* ed altre impronte fisiche con parvenza di fossili [1]; ma non si esclude che le accennate figure, come le dendriti sieno suscettibili di collocarsi opportunamente in altra classe.

Mi sono chiesto se non fosse il caso di attribuire a ciascuna divisione di primo grado un nome speciale derivato dal greco o dal latino, affine di agevolare l'intento didattico che è nei miei voti; ma, dopo matura riflessione, mi sono arretrato dinanzi al timore di accrescere la complicazione del gergo geologico già tanto farraginoso. Mi è parso opportuno tuttavolta di introdurre nella terminologia delle stimate alcune voci nuove; ciò affine di eliminare circonlocuzioni superflue: dico, ad esempio, *sismoliti* gli esemplari di rocce che presentano strie o scalfitture dovute ad attriti provocati dal terremoto; denomino *gliptoliti* le superficie rupestri solcate, incise o levigate dai ghiacciai; *talassoliti* i sedimenti che presentano tenui rughe o crespe prodotte dal moto ondoso; *udoliti* i depositi che offrono piccole cavità cagionate dalla caduta di gocce di pioggia.

[1] *Figure di viscosità ed impronte radiculari.* Ateneo Ligure, fasc. di agosto-dicembre. Genova, 1889.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Su due proposizioni di J. W. Lindeberg e E. E. Levi, nel Calcolo delle variazioni.* Nota II di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE [1].

Per gli integrali in forma non parametrica

$$(1) \qquad I_c = \int_c f(x\,,y\,,y')\,dx\,,$$

relativi cioè alle curve date da un'equazione $y = y(x)$, il Lindeberg ha dimostrato la proposizione analoga a quella da lui stesso stabilita per gli integrali in forma parametrica e da noi riportata nella Nota I [2] limitandola a quelle curve per le quali la funzione $y(x)$ corrispondente ha la derivata prima sempre, in modulo, inferiore ad uno stesso numero; con altre parole, ha provato che:

« Se C_0 è una curva la cui funzione corrispondente $y_0(x)$ è continua insieme con le sue due prime derivate, e se su di essa valgono le condizioni di Legendre e di Weierstrass, prese in senso stretto, scelti comunque due numeri positivi, ε e ε', si può determinarne un altro ϱ in modo che sia sempre $I_c - I_{c_0} > 0$, per ogni altra curva ordinaria [3] C, avente gli stessi estremi della C_0, soddisfacente ovunque alla disuguaglianza $|y(x) - y_0(x)| < \varrho$ e tale che la lunghezza complessiva degli intervalli dell'asse x, sui quali è sempre $|y'(x) - y_0'(x)| > \varepsilon'$, risulti maggiore di ε ».

Volendo conferire a questo enunciato tutta la generalità che ha la proposizione corrispondente del Lindeberg, relativa agli integrali in forma parametrica, è necessario di liberare l'enunciato stesso dalla condizione relativa alla limitazione del modulo della derivata $y'(x)$. Questo scopo fu raggiunto dal compianto prof. E. E. Levi, il quale superò la grave difficoltà che qui si presentava per mezzo del seguente teorema:

« Se, in un campo finito e chiuso T di valori $(x\,,y\,,y')$, sono soddisfatte le condizioni $f_{y'y'}(x\,y\,y') > 0$, $E(x\,,y\,;y'\,,\overline{y}') > 0$, per ogni $\overline{y}' \neq y'$ [E essendo la funzione di Weierstrass relativa all'integrale (1)]; e se T_1 è un campo chiuso, contenuto in T, per il quale esiste un $\delta > 0$ tale che ogni punto di T_1 sia il punto di mezzo di un segmento di lunghezza 2δ paral-

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] Questi Rendiconti, pag. 19.

[3] Composta cioè di un numero finito di archi per ciascuno dei quali la $y(x)$ abbia la derivata prima finita e continua.

lelo all'asse y' e totalmente contenuto in T, allora si possono determinare due numeri positivi σ e μ per modo che, se $|y'-\bar{y}'|>\sigma$ e (x, y, y') è in T_1, si abbia

(2) $$E(x, y; y', \bar{y}')>\mu|y'-\bar{y}'| \text{ ».}$$

Dopo ciò, e ammesso che sulla curva C_0 valga la condizione di Legendre in senso stretto e che la condizione di Weierstrass sia verificata in modo da aversi, per ogni x dell'intervallo su cui è definita la $y_0(x)$, ed ogni coppia y, y' soddisfacente alle $|y-y_0(x)|<r$, $|y'-y'_0(x)|<r$ (r essendo un numero positivo, comunque piccolo) e qualunque sia $\bar{y}'\neq y'$, $E(x, y; y', \bar{y}')>0$, la proposizione del Lindeberg, secondo quanto ha mostrato il Levi, vale indipendentemente dalla restrizione dianzi accennata.

Per estendere il teorema, così ottenuto, conformemente a quanto si è fatto nella Nota I, occorre una preliminare estensione del teorema del Levi sopra riportato. A questo intento, ho cominciato col liberare completamente il teorema del Levi dalla condizione $f_{y'y'}(x, y, y')>0$, e ne ho poi ottenuta questa generalizzazione:

« Se T è un campo limitato e chiuso di punti (x, y, y'), ed esiste un numero positivo δ tale che, per ogni (x, y, y') di T e ogni $\bar{y}'$ soddisfacente alla $|y'-\bar{y}'|\leq\delta$, sia $E(x, y; \bar{y}', \tilde{y}')>0$ per qualunque $\tilde{y}'\neq\bar{y}'$, scelto ad arbitrio un numero $\sigma>0$, se ne possono determinare altri due ν e μ, pure >0, in modo che, per ogni numero q tale che sia $|q-f(x, y, y')|\leq\nu$, si abbia

$$f(x y \tilde{y}')-f(x, y, y')-q(\tilde{y}'-y')>\mu|\tilde{y}'-y'| \text{ [1]},$$

per tutti i punti $(x y y')$ di T e tutti gli $\tilde{y}'$ soddisfacenti alla $|y'-\tilde{y}'|\geq\sigma$ ».

Servendomi di questa generalizzazione del teorema del Levi, sono riuscito a dimostrare le due proposizioni che seguono, le quali forniscono due successive estensioni del teorema del Lindeberg:

1°) « Se C_0 è una curva di equazione $y=y_0(x)$, $(a_0\leq x\leq b_0)$, con $y_0(x)$ funzione assolutamente continua e:

a) per ogni punto $\bar{x}$ di (a_0, b_0) in cui esiste finita la $y'_0(x)$ si può determinare un numero positivo $\varrho(\bar{x})$ tale che, per tutte le terne (x, y, y') soddisfacenti alle $|x-\bar{x}|\leq\varrho(\bar{x})$, $|y-y_0(\bar{x})|\leq\varrho(\bar{x})$, $|y'-y'_0(\bar{x})|\leq\varrho(\bar{x})$, e per qualsiasi $\tilde{y}'\neq y'$, sia $E(x, y; y', \tilde{y}')>0$;

b) per ogni altro punto $\bar{\bar{x}}$ di (a_0, b_0) dove la $y'_0(x)$ non esiste o è infinita, si hanno due numeri $\bar{\bar{y}}'(\bar{\bar{x}})$, $\varrho(\bar{\bar{x}})$, il secondo dei quali positivo, in modo che soddisfatte le $|x-\bar{\bar{x}}|\leq\varrho(\bar{\bar{x}})$, $|y-y_0(\bar{\bar{x}})|\leq\varrho(\bar{\bar{x}})$, $|y'-\bar{\bar{y}}'(\bar{\bar{x}})|\leq\varrho(\bar{\bar{x}})$, e per qualsiasi $\tilde{y}'\neq y'$, sia ancora $E(x, y; y', \tilde{y}')>0$;

scelti ad arbitrio due numeri positivi σ e λ, è sempre possibile di

[1] Per $q=f(x, y, y')$, questa disuguaglianza coincide con la (2).

determinare altri due ϱ ed ε in modo che si abbia $I_c - I_{c_0} > \varepsilon$, per ogni curva C di equazione $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$, con $y(x)$ funzione assolutamente continua, la quale appartenga propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 [1] e sia tale che l'insieme dei punti dell'asse x soddisfacenti alla $|y'(x) - y'_0(x)| \geq \sigma$ risulti di misura $\geq \lambda$ ».

2°) « Se C_0 è la stessa curva del teorema precedente e su essa sono ancora verificate le condizioni a) e b); se, inoltre, esistono due numeri positivi Δ e μ, in modo che, per tutti gli $\bar{x}$ considerati nella condizione a) sia sempre $\varrho(\bar{x}) \leq \Delta$, $E(\bar{x}, y_0(\bar{x}); y'_0(\bar{x}), y'_0(\bar{x}) \pm \varrho(\bar{x})) \geq \mu$; scelto ad arbitrio un $\delta > 0$, è sempre possibile di determinare altri due numeri positivi ε e ϱ, tali che si abbia $I_c - I_{c_0} > \varepsilon$, per tutte le curve C, di cui sopra, appartenenti propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 e soddisfacenti alla $L - L_0 \leq \delta$, L e L_0 essendo le lunghezze delle C e C_0, rispettivamente ».

In questo secondo enunciato, alla disuguaglianza $L - L_0 \geq \delta$ può sostituirsi l'altra

$$\int_{a'}^{b'} |y'(x) - y'_0(x)| \, dx \geq \delta,$$

dove (a', b') rappresenta l'intervallo comune ai due (a_0, b_0), (a, b).

Tanto in 1°) che in 2°) le condizioni a) e b) possono sostituirsi con le altre due: che sia sempre $f_{y'y'}(x, y, y') > 0$ e che esista un numero positivo m tale che, in tutto un intorno della C_0 e per ogni y' in modulo maggiore di uno stesso numero positivo, sia $|y'|^3 f_{y'y'}(x\, y\, y') \geq m$. Queste due condizioni sono, in particolare, soddisfatte se la funzione f è della forma $g(xy)\sqrt{1 + y'^2}$ con $g(xy) > 0$.

Ai teoremi precedenti si può aggiungere questa nuova proposizione:
« Se

$$J_c = \int_c g(x, y, y')\, dx$$

è un altro integrale del tipo (1) e C_0 è la curva più sopra indicata, ed esiste un numero positivo m tale che, per tutti i punti (xy) di un intorno della C_0 valga sempre la $f_{y'y'}(x, y, y') \geq m g_{y'y'}(x, y, y')$, per qualsiasi y', preso ad arbitrio un numero positivo δ se ne possono determinare altri due ε e ϱ in modo che, per ogni curva $C: y = y(x)$, $(a \leq x \leq b)$, con $y(x)$ funzione assolutamente continua, la quale appartenga propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 e soddisfi alla $J_c - J_{c_0} \geq \delta$, si abbia $I_c - I_{c_0} > \varepsilon$ ».

[1] Ciò vuol dire che, per ogni x comune ai due intervalli (a_0, b_0), (a, b) è $|y(x) - y_0(x)| < \varrho$, e che i punti i quali appartengono all'uno o all'altro dei due intervalli, senza appartenere ad entrambi costituiscono (al più) due segmenti di lunghezza $< \varrho$, e ciascuno degli archi delle curve C_0 e C che corrispondono a questi segmenti è interno al cerchio di raggio ϱ avente per cento l'estremo corrispondente di C_0.

Meccanica. — *Sulla variazione dell'energia cinetica di un sistema semi-rigido ruotante attorno ad un punto fisso quando sia nullo il momento rispetto a questo punto delle forze esterne.* Nota di ORAZIO LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

In una Nota precedente [2], alla quale mi riferisco per le notazioni e per la parte bibliografica, ho stabilito con procedimento breve e semplicissimo le equazioni assolute del moto attorno ad un punto fisso di un sistema materiale costituito da un nucleo solido ricoperto da liquido viscoso incompressibile e avente nel suo interno un numero qualunque di cavità, di forma qualunque, riempite da liquidi viscosi compressibili a densità diverse e comunque variabili.

In questa Nota, supponendo sempre i liquidi interni viscosi e compressibili, mi propongo di studiare la variazione dell'energia cinetica del sistema col variare del tempo quando sia nullo il momento rispetto al punto fisso delle forze esterne.

In queste ipotesi, le equazioni intrinseche del problema, stabilite nella Nota precedente, assumono rispettivamente la forma:

$$\text{(I)} \qquad \alpha\Omega' + \Omega\wedge(\alpha\Omega + \mathbf{M}) + \mathbf{M}'_r = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \mathbf{a} = -m\mathrm{P}'_r$$

$$\text{(III)} \qquad \mathbf{F}_t = \mathbf{F}_n - \mathbf{F}_n \times \mathbf{n}\,.\,\mathbf{n} = m\mathrm{P}'_r = -\mathbf{a}$$

$$\text{(IV)} \qquad \mathrm{P}'_r \times \mathbf{n} = [\mathrm{P}' - \Omega\wedge(\mathrm{P} - 0)] \times \mathbf{n} = 0$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathrm{P}' = 0$$

$$\text{(VI)} \qquad \frac{d\mathrm{P}'}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p + \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{P}' + \nu\Delta'\mathrm{P}' = \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial t} + \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{P}}\,\mathrm{P}'$$

dove le derivate rispetto al tempo t sono indicate con apici e riferendosi sempre al punto fisso 0, α rappresenta l'omografia d'inerzia della parte rigida, Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione del sistema, $\mathbf{M}$ il momento dell'impulso relativo al moto della parte fluida, $\mathbf{M}'_r$ la velocità relativa di $\mathbf{M}$, $\mathbf{a}$ il vettore della forza di attrito in un punto qualunque di contatto, P' e P'_r i vettori della velocità assoluta e relativa di un punto generico P delle masse fluide, $\mathbf{F}_n$ il vettore della pressione per unità di superficie esercitata dal fluido, p l'intensità della pressione specifica unitaria relativa allo stato di equilibrio, $\mathbf{n}$ un vettore unitario perpendicolare nei

[1] Psesentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] O. Lazzarino, *Sulle equazioni del moto di rotazione attorno ad un punto fisso di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi a densità diverse e comunque variabili*. Questi Rend., vol. XXX, 1° sem., pag. 13.

singoli punti di contatto alle pareti σ delle cavità e diretto verso l'esterno, ϱ le densità dei fluidi, λ e μ le solite costanti di Lamé, ν il rapporto μ/ϱ.

Si noti che sulla grandezza del coefficiente m, circa la quale le varie teorie sono discordi, non è necessario fare alcuna ipotesi particolare.

1. *Variazione dell'energia cinetica del sistema.*

Moltiplicando la (I) scalarmente per Ω e tenendo presente che α è dilatazione, si ha

$$(\Omega \times \alpha\Omega)' = -2\Omega \times \mathrm{M}'_r = -2\Omega \times \mathrm{M}'. \tag{1}$$

Inoltre, ammettendo che le forze **F** agenti nei punti P delle masse fluide derivino da un potenziale e ponendo $\pi = \int \frac{dp}{\varrho}$, la (VI) può anche scriversi

$$\mathrm{P}'' = \operatorname{grad}(\pi - \mathrm{U}) + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathrm{P}' + \nu\Delta' \mathrm{P}'. \tag{VI'}$$

Ora, moltiplicando la (VI') scalarmente per P'_r e integrando rispetto a tutti gli spazi τ delle h cavità del sistema, si ottiene

$$\sum_1^h \int_\tau \mathrm{P}'' \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\tau = \sum_1^h \int_\tau \left[\operatorname{grad}(\pi - \mathrm{U}) + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right] \times \tag{2}$$
$$\times \mathrm{P}'_r \,.\, d\tau + \sum_1^h \int_\tau \nu\Delta' \mathrm{P}' \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\tau\,.$$

È facile dimostrare che la prima sommatoria di integrali del secondo membro della (2) è nulla. Infatti, per formole note ([1]), detta sommatoria può spezzarsi nel seguente modo

$$\sum_1^h \int_\sigma \left[\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right] \mathrm{n} \times \mathrm{P}'_r \,.\, d\sigma + \tag{a}$$
$$+ \sum_1^h \int_\tau \mathrm{I}_1 \left[\frac{d\mathrm{P}'_r}{d\mathrm{P}} \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right)\right] d\tau$$

dove la prima sommatoria s'intende estesa a tutte le superficie σ che racchiudono le h cavità del sistema. Ora, tenendo presente la (IV), si vede immediatamente che la prima sommatoria della (a) risulta nulla; quanto alla seconda si osserva che essa può scriversi successivamente

$$\sum_1^h \int_\tau \mathrm{I}_1 \left[\frac{d\mathrm{P}'_r}{d\mathrm{P}} \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right)\right] d\tau =$$
$$= \sum_1^h \int_\tau \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right) . \, \mathrm{I}_1 \frac{d\mathrm{P}'_r}{d\mathrm{P}} \, d\tau =$$
$$= \sum_1^h \int_\tau \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right) \operatorname{div} \mathrm{P}'_r \,.\, d\tau =$$
$$= \sum_1^h \int_\sigma \left(\pi - \mathrm{U} + \frac{\lambda+\mu}{\varrho} \operatorname{div} \mathrm{P}'\right) . \, \mathrm{P}'_r \times \mathrm{n} \,.\, d\sigma$$

([1]) Cfr. C. Burali Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* [ediz. 1912, I, pag. 111 (2)]. Questo testo sarà indicato in seguito con la sigla AVG.

e quindi, risultando anch'essa nulla per la (IV), si ha quanto si voleva dimostrare. Dopo ciò, la (2) porge

$$\sum_1^h \int_\tau P'' \times P'_r \,.\, d\tau = \sum_1^h \int_\tau \nu \Delta' P' \times P'_r \,.\, d\tau \,. \tag{3}$$

Ora dal primo membro della (3), moltiplicando per ϱ e ponendo $P'_r = P' - \Omega \wedge (P - O)$, si ha

$$\sum_1^h \int_\tau P'' \times P'_r \,.\, \varrho d\tau = \sum_1^h \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_\tau P'^2 \,.\, \varrho d\tau - \Omega \times \sum_1^h \int_\tau (P - O) \wedge P'' \,.\, \varrho d\tau =$$

$$= \sum_1^h \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_\tau P'^2 \,.\, \varrho d\tau - \Omega \times M' \,,$$

e quindi, tenendo conto della (1) e ponendo ancora

$$T = \frac{1}{2} \left[\sum_1^h \int_\tau P'^2 \,.\, \varrho d\tau + \Omega \times \alpha \Omega \right] , \tag{4}$$

si può ancora scrivere

$$\sum_1^h \int P'' \times P'_r \,.\, \varrho d\tau = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left[\sum_1^h \int_\tau P'^2 \,.\, \varrho d\tau + \Omega \times \alpha \Omega \right] = \frac{dT}{dt} \,. \tag{5}$$

Allora, osservando che la T, definita dalla (4), rappresenta l'energia cinetica di tutto il sistema e ricordando che è $\nu = \mu/\varrho$, dalle (3) e (5) si deduce immediatamente che « *la variazione nell'unità di tempo dell'energia cinetica di tutto il sistema può essere espressa dalla formola*

$$\frac{dT}{dt} = \sum_1^h \int_\tau \mu \Delta' P' \times P'_r \,.\, d\tau \text{ »}. \tag{6}$$

2. *Generalizzazione di una notevole formola di Joukovsky.*

Il signor Joukovsky [1], trattando la teoria del moto di un solido avente una cavità riempita da liquido viscoso *incompressibile*, dimostrò l'esistenza di una notevole formola che dà la variazione dell'energia cinetica col variare del tempo nell'ipotesi che le forze dell'attrito di contatto fra liquido e solido seguano la nota legge di Stokes. Il signor Stekloff [2], mantenendo l'ipotesi della *incompressibilità* del liquido, dimostrò la formola per qualunque altra ipotesi sulla grandezza delle forze di attrito. Qui, partendo dalla (6), riesco ad estendere la formola di Joukovsky al caso più generale di liquidi viscosi *compressibili* e per qualunque ipotesi sulla grandezza delle forze di attrito fra liquidi e solido.

[1] N. Joukovsky, *Sul moto di un corpo solido che ha una cavità riempita da un liquido incompressibile.* S. Pietroburgo, 1885 (in russo), pag. 137.

[2] W. Stekloff, *Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible* etc. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e serie, tom. I, a. 1909).

Infatti, per formole note [A. V. G. I, pag. 111 (2)], la (6) può scriversi

$$(6') \quad T' = \sum_1^h \int_\tau \mu \Delta' P' \times P'_r \,.\, d\tau = -\sum_1^h \int_\sigma \mu \left(\frac{dP'}{dP}\,\mathbf{n}\right) \times P'_r d\sigma - $$
$$- \sum_1^h \int_\tau \mu\, I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP}\, K\, \frac{dP'}{dP}\right) d\tau \,.$$

Ora, supponendo nel caso più generale che l'omografia β di pressione di una qualunque delle masse fluide sia espressa da

$$(7) \qquad \beta = p - 2\mu \frac{dP'}{dP} - \lambda \,.\, I_1 \frac{dP'}{dP} \,,$$

si ha

$$\mathbf{F}_n = \beta \mathbf{n} = p\mathbf{n} - 2\mu \left(\frac{dP'}{dP}\,\mathbf{n}\right) - \lambda \,.\, \left(I_1 \frac{dP'}{dP}\right) \mathbf{n}$$

e quindi, tenendo anche conto della (IV), si può scrivere

$$- \int_\sigma \mu \left(\frac{dP'}{dP}\,\mathbf{n}\right) \times P'_r \,.\, d\sigma = \frac{1}{2} \int_\sigma \left[\mathbf{F}_n - p\mathbf{n} + \lambda \left(I_1 \frac{dP'}{dP}\right) \mathbf{n} \right] \times P'_r \,.\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{2} \int_\sigma \mathbf{F}_n \times P'_r \,.\, d\sigma \,.$$

Inoltre, tenendo conto delle (II) e (III), si ricava

$$\frac{1}{2} \int_\sigma \mathbf{F}_n \times P'_r \,.\, d\sigma = \frac{1}{2} \int_\sigma [\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n \times \mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}] \times P'_r \,.\, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{2} \int_\sigma \mathbf{F}_t \times P'_r \,.\, d\sigma = -\frac{1}{2} \int_\sigma \mathbf{a} \times P'_r \,.\, d\sigma$$

e quindi, nel caso più generale, la (6') può scriversi

$$(8) \quad T' = -\frac{1}{2} \sum_1^h \int_\sigma \mathbf{a} \times P'_r \,.\, d\sigma - \sum_1^h \int_\tau \mu\, I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} \,.\, K\, \frac{dP'}{dP}\right) d\tau \,.$$

Questa è la formola cercata e sussiste evidentemente qualunque sia, nella (II), il valore del coefficiente m che caratterizza la grandezza delle forze dell'attrito di contatto fra liquidi e solido. Perciò si può concludere che « *la formola di Joukovsky, sotto la forma* (8) *ora trovata, sussiste per liquidi viscosi compressibili, qualunque sia l'ipotesi sulla grandezza delle forze dell'attrito di contatto* ». c. d. d.

Idrodinamica. — *Circuitazione superficiale.* II: *Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione.* Nota di Mario Pascal, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo [1].

1. È agevole scrivere il vettore della circuitazione superficiale che abbiamo definito nella Nota I [2]. Siano $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tre vettori fondamentali; u, v, w le componenti del vettore $\mathbf{V}$ della velocità; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i coseni direttori del vettore unitario $\mathbf{n}$ parallelo alla normale interna alla superficie σ.

Il vettore della circuitazione superficiale è allora

$$\mathbf{C} = \int_\sigma \mathbf{V} \wedge \mathbf{n}\, d\sigma . \tag{1}$$

Immaginiamo ora che la superficie σ tenda, appiattendosi, a ridursi ad una porzione piana, limitata da una curva s: il moto del fluido tenderà allora a diventare un moto piano. Ugualmente i vettori $\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}$ tendono ad essere uguali e di verso contrario per tutti i punti compresi nell'area piana limitata da s; il modulo di $\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}$ ha invece valori finiti per i punti del contorno. Per tali punti, $\mathbf{n}$ giace nello stesso piano fondamentale nel quale è contenuto $\mathbf{V}$.

In tali condizioni l'integrale doppio (1) tenderà — a meno di un fattore infinitesimo — ad un integrale semplice esteso al contorno s

D'altra parte il vettore $\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}$, per ogni punto del contorno s, è normale al piano fondamentale, e l'integrale suddetto rappresenta la risultante di tali vettori paralleli. Il modulo del vettore risultante è, sul piano, uguale all'integrale del modulo di $\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}$, esteso a s. Se $\mathbf{t}$ è un vettore unitario parallelo alla tangente a s nel punto generico P, essendo

$$\text{sen}\,(\mathbf{V}, \mathbf{n}) = \cos\,(\mathbf{V}, \mathbf{t}) ,$$

si ha

$$\begin{aligned} \text{mod}\,(\mathbf{V} \wedge \mathbf{n}) &= \text{mod}\,\mathbf{V} \cdot \text{mod}\,\mathbf{n} \cdot \text{sen}\,(\mathbf{V}, \mathbf{n}) = \\ &= \text{mod}\,\mathbf{V} \cdot \text{mod}\,\mathbf{t} \cdot \cos\,(\mathbf{V}, \mathbf{t}) = \mathbf{V} \times \mathbf{t} . \end{aligned}$$

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] M. Pascal, *Circuitazione superficiale.* I: *Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione.* Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1920, 2° sem., pag. 353.

L'integrale (1) pertanto — nelle ipotesi fatte ed a meno di un fattore infinitesimo — diventa

$$\int_s \mathbf{V} \times \mathbf{t}\, ds = \int_s \mathbf{V} \times d\mathrm{P};$$

cioè *la circuitazione superficiale, al tendere della superficie ad una porzione piana limitata dalla curva s, tende all'espressione dell'ordinaria circuitazione lungo il contorno s.*

2. Analogamente a quanto succede per l'ordinaria circuitazione, si ha che, *se esiste potenziale di moto, la circuitazione superficiale è indipendente dalla superficie chiusa lungo la quale è calcolata.*

Se infatti le velocità dipendono da un potenziale, $\varphi = \varphi(x, y, z)$, avendosi

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

per una espressione trovata nella Nota I, si ha

$$\mathrm{C}^{xy} = \int\int \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} p \right\} dx\, dy \tag{2}$$

avendo posto l'equazione della superficie σ sotto la forma $z = z(xy)$.

L'integrale (2) dovrà essere indipendente dalle variazioni di z. Ed invero, chiamando con F la quantità sotto il segno, dal calcolo delle variazioni sappiamo che deve essere soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q} = 0;$$

si ha infatti identicamente

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} q - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z} p + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial y} p - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} q = 0.$$

Il ragionamento fatto può evidentemente ripetersi per ciascuna delle altre componenti del vettore della circuitazione superficiale.

3. Con uguale facilità si dimostra la proprietà reciproca, e cioè: *se la circuitazione superficiale è nulla, il moto del fluido è irrotazionale.*

Dalla (1), per una formola nota [1], si ha

$$\mathbf{C} = \int_\sigma \mathbf{V} \wedge \mathbf{n}\, d\sigma = \int_\tau \mathrm{rot}\, \mathbf{V}\, d\tau \tag{3}$$

avendo indicato con τ il volume di fluido racchiuso dalla superficie σ.

[1] C. Burali Forti e R. Marcolongo, *Elementi di calcolo vettoriale.* Bologna, Zanichelli, 1909.

Se si suppone nulla la circuitazione, sarà

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0,$$

e quindi, per un noto teorema [1], e supponendo (ciò che si può fare senza togliere di generalità) il campo τ semplicemente connesso, il vettore $\mathbf{V}$ è il gradiente di una funzione uniforme, cioè è

$$\mathbf{V} = \operatorname{grad} \Phi$$

in cui Φ è il potenziale di velocità.

La formola (3) ci dà il modo, infine, di enunciare, nei riguardi della circuitazione superficiale, un teorema che è l'analogo di quello di Stokes per l'ordinaria circuitazione.

Ricordando infatti che $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V}$ è il vettore della velocità istantanea di rotazione delle particelle di fluido in moto, si può dire che *la circuitazione superficiale è uguale al doppio della somma delle velocità istantanee di rotazione, moltiplicate per l'elemento del volume racchiuso dalla superficie lungo la quale la circuitazione è calcolata.*

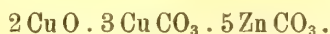
Mineralogia. — *Sulla vera natura della Rosasite.* Nota I del dott. C. Perrier [2], presentata dal Socio E. Artini [3].

Il prof. Lovisato descrisse, parecchi anni or sono [4], un nuovo minerale nettamente cristallizzato di rame e zinco, di color verde-chiaro tendente all'azzurrognolo, con lucentezza sericea nella frattura fresca, lievemente mammellonare, proveniente dalle miniere di Rosas nel Sulcis (Sardegna), al quale minerale egli, per la sua provenienza, diede il nome di Rosasite.

La composizione chimica, determinata in base all'analisi eseguita dal dott. Rimatori, che aveva ottenuto i seguenti risultati: $H_2O = 0{,}21$; PbO = tracce; $ZnO = 33{,}57$; $CuO = 36{,}34$; $CO_2 = 30{,}44$; somma $= 100{,}56$, sarebbe stata secondo Lovisato, la seguente:

$$CuO : CuCO_3 : ZnCO_3 = 1 : 1{,}157 : 2{,}33$$

corrispondente, quindi, approssimativamente ad un composto di questo tipo:

$$2\,CuO \,.\, 3\,CuCO_3 \,.\, 5\,ZnCO_3 \,.$$

[1] C. Burali Forti e R. Marcolongo, loc. cit.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino diretto dal prof. Zambonini.

[3] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

[4] D. Lovisato, *Nuovo minerale della miniera di Rosas* (*Sulcis, Sardegna*). Questi Rend. XVII, 2 (1908), pag. 723.

Il minerale era, dunque, da considerarsi come una specie nuova, non potendo per la sua omogeneità, come osservava Lovisato, essere considerato come una miscela di malachite e di Smithsonite, nè essere ricondotto alla malachite, differenziandosi da questa sia per il peso specifico, che in due determinazioni diverse era stato ottenuto eguale a 4,07, sia, e specialmente, per i risultati analitici.

Sulla vera natura della Rosasite rimasero, però, dei dubbi, sia per il tipo di composizione davvero poco comune, sia soprattutto, perchè, dato il colore del minerale, appariva verosimile che esso non fosse anidro. Delle nuove ricerche chimiche apparivano molto desiderate, onde sono veramente assai grato al prof. Zambonini, che, avendo avuto dall'ing. prof. G. Lincio [1] una piccola porzione del campione originale sul quale fu fondata la specie, campione rinvenuto nella raccolta del compianto prof Lovisato, volle affidarmi l'incarico di controllare la natura di questo minerale.

La Rosasite si presentava, come era stata descritta, o sotto forma di una sottile venuzza lievemente mammillonare, ovvero di piccoli bitorzoletti, sopra una roccia ricoperta di limonite e formata da una massa argillosa, e possedeva struttura fibroso-raggiata, con splendore sericeo e colore verde-chiaro nella frattura fresca, ed un colore lievemente più cupo alla superficie.

Circa un grammo di sostanza, sotto forma di piccoli frammentini, potei isolare dalla roccia, e con essi, dopo essermi scrupolosamente assicurato della loro purezza, osservandoli al microscopio, determinai dapprima, col metodo della boccetta, il peso specifico, che trovai eguale a 4,09, valore questo, sostanzialmente uguale a quello ottenuto precedentemente (4,07) e che quindi mi assicurava dell'identità del minerale.

La sostanza che, ridotta in polvere, aveva un colore verde-azzurrino, venne, quindi, posta entro una navicella in un fornelletto elettrico, e calcinata in corrente di aria secca e priva di CO_2, onde potere direttamente, per pesata, determinare l'eventuale acqua e l'anidride carbonica. Il residuo della calcinazione venne sciolto in acido nitrico e portato a secco per insolubilizzare l'eventuale silice, e filtrato onde eliminare tutti i residui insolubili, nel filtrato vennero, per via elettrolitica, determinati il rame ed il piombo, il primo come Cu ed il secondo come PbO_2. Nel liquido restante venne, dopo opportuna concentrazione, separato il ferro dallo zinco mediante duplice precipitazione con idrato ammonico e poi, essendosi ottenuto un lieve precipitato rosso-cristallino col reattivo di Čugaev, venne determinato il nichelio, pesandolo come sale di nichel della dimetilglionima.

[1] Compio volentieri il gradito dovere di ringraziare pubblicamente il prof. ingegnere Lincio per la cortesia con la quale ha soddisfatto il mio desiderio di far studiare nuovamente la Rosasite, ponendo a mia disposizione un materiale raro e prezioso.

F. Zambonini.

La separazione del magnesio dallo zinco venne eseguito, secondo quanto consiglia Vogt [1], precipitando il primo come fosfato ammonico-magnesiaco in soluzione fortemente ammoniacale, ed il secondo come fosfato zinco-ammonico, semplicemente scacciando l'NH_3 per concentrazione delle acque madri, e pesandolo, poi, come pirofosfato. Nè nichelio, nè magnesio erano stati osservati dal Rimatori.

I risultati analitici ottenuti furono i seguenti:

H_2O	8,58	1,038	1,038	1,04
CO_2	20,18	1,000	1,000	1,00
CuO	41,58	1,139	1,139	1,93
ZnO	28,96	0,776	0,790	
PbO	0,23	0,002		
NiO	0,04	0,001		
MgO	0,21	0,011		
Fe_2O_3	0,31			
residuo	0,18			
	100,27			

Da questi dati, e riunendo insieme i valori molecolari dègli ossidi, si deducono i seguenti rapporti:

$$H_2O : CO_2 : R^{II}O = 1,04 : 1 : 1,93$$

corrispondenti esattamente ad un composto del tipo:

$$R^{II}CO_3 . R^{II}(OH)_2 \qquad (R^{II} = Cu, Zn)$$

quale noi abbiamo nella malachite.

Si noti, poi, che per il ferro si ammise, non essendosi potuto determinare se questo esisteva totalmente o parzialmente allo stato ferrico, che esso esistesse allo stato trivalente, e provenisse, come impurezza, dalla limonite che accompagna il minerale, mentre, se esso fosse allo stato bivalente, il rapporto per quanto si riferisce agli ossidi verrebbe ancora, se anche di poco, a migliorare.

Se, ora, osserviamo i risultati dell'analisi, noi troviamo che i dubbi che venivano avanzati sulla composizione chimica della Rosasite, erano perfettamente giustificati, in quanto che la quantità di acqua in essa contenuta è assai maggiore di quella rinvenuta da Rimatori (appena il 0.21 %), salendo alla cospicua cifra di 8,58 %, il che cambia completamente la natura del minerale. E si può anche aggiungere che sia per ZnO, che per CuO fra i valori miei e quelli di Rimatori si ha una differenza di oltre il 5 %.

[1] Treadwell, *Trattato di chimica-analitica*, vol. II, pag. 123. Traduz. di A. Miolati.

Zoologia. — *Contributi alla Storia naturale degli Anofeli e alla lotta biologica contro di essi* (Campagna antimalarica di Fiumicino [Roma] diretta dal prof. B. Grassi - Annata III). Nota di E. Bora, presentata dal Socio B. Grassi [1].

1° - Spostamenti degli *A. claviger* nelle varie ore del giorno.

A - *Osservazioni.*

Stalla dello Stabilimento idrovoro di Maccarese (agosto 1920).

	giorno	ora		ANOFELI Num.	♂	♀	Condizioni
I	2	9	cattura				
		18,45	chiusura e cattura	15	4	11	
II		20,40	riapertura				
	3	9	cattura	143	♂ e ♀		
III		18,15	chiusura e cattura	35	id.		
IV	4	4,15	riapertura				
		8,45	cattura	138	31	107	3 con molto sangue e uova piccole, 1 con uova grosse, 103 vuote.
V		18,15	chiusura e cattura	4	3	1	
VI		20,40	riapertura				
	5	3,45	chiusura e cattura	6		6	tutte con molto sangue e uova piccole.
VII		6,30	riapertura				
		8,45	cattura	4	1	3	2 con molto sangue e uova piccole, 1 vuota.
VIII		18,15	chiusura e cattura	0			
IX		21,40	riapertura				
	6	3,45	chiusura e cattura	15		15	tutte con molto sangue e uova piccole.
X		6,30	riapertura				
		8,45	cattura	8		8	6 con molto sangue e uova piccole, 1 con sangue e uova medie, 1 vuota.

Nelle prime ore del giorno 5, si leva con abbassamento di temperatura, vento di libeccio che crescendo di forza, obbliga il giorno successivo ad interrompere le osservazioni, che vengon riprese il giorno:

	giorno	ora		Num.	♂	♀	Condizioni
	20	9	cattura				
XI		17	id.	23	10	13	6 con molto sangue e uova piccole, 2 con sangue mezzo digerito e uova medie, 5 vuote.
XII		21	id.	56	♂ e ♀		in differenti condizioni, anche con uova grosse.
XIII	21	3	id.	35		35	33 con molto sangue e uova piccole, 2 con sangue mezzo digerito e uova medie.
XIV		8	id.	86	♂ e ♀		tutti con molto sangue e uova piccole.

[1] Presentata nella seduta del 7 novembre 1920.

B - *Considerazioni*.

1°) Gli anofeli entrarono dunque nella stalla in grande quantità al tramonto (XII) e più specialmente di buon mattino (XIV, IV e anche II, VII, X).

2°) Cessato l'arrivo in massa al crepuscolo, una certa quantità continua ad entrare durante la notte (VI, IX, XIII e anche II).

3°) Mentre in questa stalla, in immediata vicinanza di acque ricche di larve, si raccolse durante le ore del giorno, un certo numero (con forte percentuale di maschi) di anofeli (I, III, V, XI), minore fu quello osservato in esperienze analoghe nello stesso mese, in stalle di Porto Nuovo, a maggior distanza da acque anofeliche, e nullo addirittura (agosto 1919) in porcili di Fiumicino ancora più lontani da focolai idrici. (Relazione Grassi e Sella sulla Campagna antimalarica di Fiumicino, 1919, pag. 213).

4°) Nelle ore della notte non sono entrati maschi, ma i nostri dati non sono sufficienti. Se il fatto si verificasse costantemente potrebbe forse mettersi in rapporto col tempo dell'accoppiamento.

5°) È notevole il fatto (IV) che di 107 ♀ entrate all'alba, 103 erano vuote, 3 con molto sangue e uova piccole, 1 senza sangue e con uova grosse, mentre quelle entrate di notte (VI - IX - XIII) erano tutte piene di sangue, tranne 2 sole con sangue mezzo digerito.

Conviene qui richiamare le osservazioni fatte allo stesso Stabilimento nelle ore del tramonto.

Il 12-V al tramonto stando 3 persone fuori di una casetta con protezione meccanica, furono assalite da 34 anofeli dalle ore 20.30 alle ore 21, in cui cessò l'arrivo. Guardando col lume sulla parete bianca della casa, se ne trovò circa una ventina che si erano posati senza aver punto. Si stava dentro una stanza protetta da retina alla finestra, ma con la porta aperta. Presso a poco la stessa cosa si verificò il giorno dopo allo stagno (Casa Giocondo). Si era in 4 (tra essi il prof. Grassi). Si concluse che di molti che vengono a pungere in un ambiente dove ci sono persone, solo una parte minore punge immediatamente, gli altri quasi aspettando miglior tempo per pungere. Sembra che quelle vuote che si spostano non siano tutte egualmente affamate, o evitino di pungere gente che non sia immobile.

Il 6-VI si ripeterono queste osservazioni a nord di M. Arena, presso l'estremità del fosso Coccia di Morto, in un porcile di cannuccie con 30 maiali, aperto da un lato e nel resto chiuso male, dove il mattino precedente fra le cannuccie si era veduta una grandissima quantità di anofeli, così tanti che facendoli muovere si udiva un forte ronzio. Alla sera stando in tre individui (tra essi il prof. Grassi) nel porcile seduti a terra, si osserva che ne entrano e ne escono molti. Pochi vengono a pungere; non pochi entrano dall'alto e vanno direttamente a posarsi sulle cannuccie; anche di quelli che

entrano dal basso, alcuni vanno a posarsi senza pungere. Di 15 per es. che si poterono contare, 3 soli vengono a pungere.

Conseguentemente degli anofeli vuoti e con uova pochissimo sviluppate, che entrano, solo una piccola parte punge immediatamente; tutti o quasi tutti gli altri pungono dopo qualche ora che sono entrati. Si accordano così tutte le osservazioni riferite in proposito.

2° – I Pesci e le Anitre nella distruzione delle larve.

Pesci. – Nel luglio c. a. nel canale Coccia di Morto all'altezza dei tubi di comunicazione col lago omonimo, per un tratto di savanella di circa metri cento, si trovarono per tutta la durata del mese sino ai primi di agosto, numerose ed in alcuni punti numerosissime larve di *A. Claviger* di ogni grandezza. In questo periodo di tempo e nello stesso tratto di savanella, si pescavano pure numerosissimi « nonni » (*Ciprinodon calaritanus*), anche in misura di 6, 7 per pescata con una piccola bacinella.

In progresso di tempo, nella prima quindicina di agosto, mutarono le condizioni dell'ambiente, scomparvero i pesci e si fecero scarse le larve.

Anitre. – Per la durata di circa un mese (6-IX-9-X) vennero tenute per nove ore al giorno, diciotto anitre, in un tratto di 250 metri del canale Coccia di Morto, largo metri 5, in condizioni normali, cioè da molto tempo non diserbato, nè altrimenti alterato. Un tratto vicino dello stesso canale di ugual lunghezza ed in analoghe condizioni, anche per quantità di larve, servì di controllo.

Osservazioni accurate ogni 5 o 6 giorni, non fecero mai rilevare qualsiasi differenza nel numero delle larve di *A. claviger* (sempre numerosissime e d'ogni misura), tra l'uno e l'altro tratto, nè diversa proporzione tra piccole e grandi, neppure nei punti, dove moltissime penne sparse, facevan presumere le anitre maggiormente si fossero trattenute a diguazzare.

Una volta sola, dopo circa venti giorni, parve di notare nel tratto delle anitre, una differenza in meno nel numero delle larve grandi. Ma da più accurati esami, fatti qualche giorno appresso ed alla fine dell'esperimento, tale presunta differenza, dovuta probabilmente ad insufficienza di pescate, risultò inesistente.

Il 12-X poi, in un mastello pieno d'acqua del diametro d'un metro approfondato a livello del terreno e circondato di rete metallica, si immisero con un po' di *Myriophyllum*, più di 350 larve di *A. claviger*, di ogni grandezza e numerose ninfe, e constatato che quello stava alla superficie e queste erano in buone condizioni, vi si tennero, per più di un'ora, due anitre, tenute a digiuno dalla sera innanzi.

Durante questo tempo, passato dalle anitre per lo più sull'acqua per la ristrettezza che appositamente s'era data al margine di terreno tra i bordi del mastello e la rete di chiusura, si osservò che beccavano alla superficie dell'acqua, parve anzi una volta che beccassero precisamente le larve.

Ammazzatele quindi subito e apertele, non si trovarono traccie di larve, nè nella bocca, nè nell'esofago, nè nell'ingluvie, nè nello stomaco.

Nell'ingluvie vi era, specialmente in una, un po' di granoturco in parte spezzettato, frammenti di *Myriophyllum* e qualche lumaca; nell'altra anche una spoglia di un dittero e un emittero, nessuna traccia di larve. Nel ventriglio un po' di granoturco e nessun altro nutrimento.

Nel mastello l'erba tutta spezzettata era in gran parte andata a fondo e più non sussisteva che uno scarso numero di larve piccole. Evidentemente col diguazzare delle anitre per oltre un'ora, in una superficie relativamente così ristretta, le larve grosse e le ninfe erano morte, senza che fossero inghiottite.

Pur troppo i fatti qui riferiti non depongono in favore dell'efficacia di quella lotta biologica contro gli anofeli, sia a mezzo dei pesci, sia a mezzo delle anitre, della quale si è tanto parlato negli ultimi anni.

Fisica. — *L'audizione biauricolare dei suoni puri.* Nota del prof. A. Lo Surdo, presentata dal Socio sen. Volterra [1].

Una prova sperimentale che la percezione della direzione di provenienza dei suoni di frequenza bassa e dei rumori è dovuta alla differenza di tempo colla quale i movimenti vibratori arrivano agli orecchi [2], si può dare facilmente mediante l'apparecchio per l'interferenza dei suoni.

La sorgente sonora si colloca davanti l'imboccatura del tubo A (fig. 1) dal quale partono le due vie S e D; a queste si attaccano i due tubi di gomma F e G che portano separatamente il suono ai due orecchi. In questo apparecchio generalmente uno dei due tubi, S, è di lunghezza invariabile, mentre l'altro, D, si può allungare. Per la nostra esperienza occorre però poter fare più lungo ora l'uno ora l'altro dei due cammini, e perciò è bene che il tubo F sia alquanto più lungo dell'altro tubo G, cosicchè l'eguaglianza dei cammini si ha quando il tubo D è opportunamente allungato.

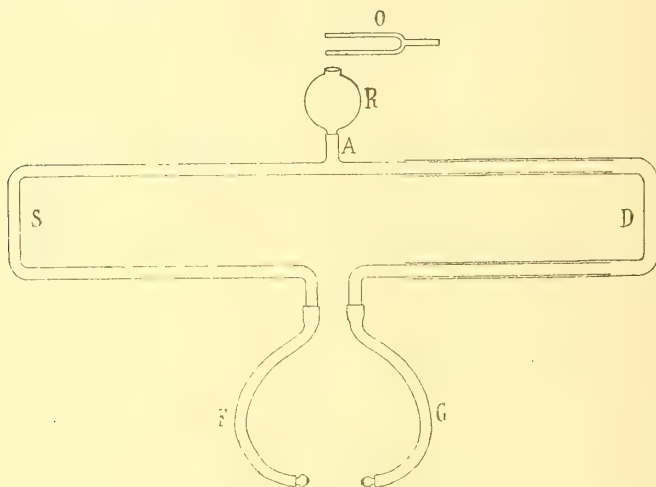
Colleghiamo la via S coll'orecchio sinistro e la D col destro [3]. Quando i due cammini che il suono deve percorrere per giungere ai due orecchi sono eguali noi abbiamo la sensazione che la sorgente si trovi perfettamente di fronte o alle spalle. In queste condizioni noi non abbiamo alcun elemento per decidere delle due posizioni.

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] Lord Rayleigh, *On our Perception of Sound Direction.* Phil. Mag., vol. VIII, 1907, pag. 214.

[3] È necessario che gli estremi dei tubi F e G siano infilati a tenuta negli orecchi: perciò è bene far terminare i due tubi, come si vede nella figura, cogli speciali cannelli di ebanite che si usano in alcuni apparecchi di ascoltazione per uso medico.

Se la via D è più lunga, si sente che la sorgente sta a sinistra, mentre se è più corta, si sente la sorgente alla destra. Anche in questo caso si possono sentire due posizioni della sorgente simmetriche rispetto alla retta che passa per i due orecchi, poichè per entrambe gli orecchi, nelle condizioni naturali di ascoltazione, ricevono il suono collo stesso ritardo.

A dire il vero, nella determinazione della posizione della sorgente noi ci aiutiamo istintivamente cogli altri sensi e anche colla memoria ; perciò,

quando eseguiamo l'esperienza tenendo davanti l'apparecchio e il diapason, delle due posizioni corrispondenti a ciascuna differenza di cammino percepiamo quasi sempre quella anteriore.

Quando si ascolta ad orecchi liberi, cioè nelle condizioni naturali, si elimina istintivamente questa incertezza ruotando la testa: allora si sente spostarsi la sorgente verso l'orecchio per il quale il cammino va diventando minore e si percepisce la sua vera posizione.

Per la esperienza si può adoperare una sorgente qualunque, purchè non dia suoni acuti puri di frequenza superiore al limite oltre il quale cessa la percezione per differenza di fase [1], che è di poco superiore a 512 secondo Lord Rayleigh [2] e circa 600 secondo Stewart [3].

Ciò posto, modifichiamo l'esperienza nel seguente modo: come sorgente adoperiamo un diapason O che vibra davanti alla bocca di un risonatore R il cui tubo posteriore è infilato nell'estremo di A: così entra nell'apparec-

[1] Quando i suoni sono più acuti, la percezione della posizione della sorgente è dovuta alla differenza fra le intensità ai due orecchi.

[2] Lord Rayleigh, loc. cit.; Scient. Pap., vol. V, pag. 352.

[3] Stewart, Phys. Rev., IX, 1917, pag. 502.

chio un suono puro. E stabiliamo inizialmente la differenza di cammino di una intera lunghezza d'onda λ, per esempio allungando opportunamente la via D [1]. In queste condizioni abbiamo la netta percezione che la sorgente stia di fronte, come quando i due cammini sono eguali. E difatti noi non abbiamo la possibilità di riconoscere, se il suono non è molto smorzato, una vibrazione dalla successiva, ed è quindi come se i due cammini fossero uguali.

Questa seconda esperienza elimina la obiezione che può essere fatta alla prima, e cioè che non si possa escludere l'effetto della intensità poichè allungando il cammino, oltre a produrre un ritardo, si produce insieme un indebolimento del suono.

Partiamo ora dalla differenza di cammino di una intera lunghezza d'onda λ, ottenuta per esempio con una maggiore lunghezza del tubo di destra D. Se allunghiamo ulteriormente il tubo D, allora sentiamo che la sorgente dalla posizione frontale si sposta verso l'orecchio sinistro e, se accorciamo, sentiamo invece che la sorgente si sposta verso l'orecchio destro, nonostante che in queste condizioni il cammino di destra sia notevolmente più lungo di quello di sinistra, e quindi l'intensità minore.

Il risultato è a tutta prima sorprendente; poichè se il suono è puro, ai due orecchi arrivano due treni d'onda dello stesso periodo e della stessa ampiezza, nei quali nulla ci permette di distinguere una vibrazione dalle successive: quindi non dovremmo essere in grado di giudicare, quando i suoni, come ora, non arrivano più in fase, se la differenza è dovuta ad un minor cammino l da una parte o ad un maggior cammino $\lambda - l$ dalla stessa parte.

La percezione della direzione di provenienza dei suoni è l'effetto di una educazione che noi acquistiamo istintivamente da bambini mettendo in relazione la posizione della sorgente sonora quale la vediamo, o la riconosciamo altrimenti, con la corrispondente sensazione biauricolare. Ebbene, noi manchiamo assolutamente di questa educazione per differenze di tempo superiori a quella massima che si può produrre nelle condizioni naturali, cioè quella che si ha quando la sorgente sta di fronte ad un orecchio.

Ciò posto, noi possiamo spiegarci il risultato dell'ultima esperienza. Le due differenze di cammino l e $\lambda - l$ non possono essere entrambe inferiori alla distanza acustica fra i due orecchi, poichè la percezione biauricolare si ha per lunghezze d'onda maggiori del doppio di quella distanza: quindi noi giudichiamo istintivamente e senza esitazione in relazione alla differenza di tempo alla quale nell'aria libera corrisponderebbe una reale posizione della sorgente, cioè quella dovuta alla minore delle due differenze di cammino,

[1] Se l'apparecchio non consente un allungamento λ, questa differenza di cammino si può ottenere sostituendo il tubo G con un altro opportunamente più lungo del tubo F.

che è l. E se noi aumentiamo l in modo da superare la distanza biauricolare che è minore di $\frac{\lambda}{2}$, ci confondiamo facilmente.

La stessa origine ha probabilmente il fatto che per i suoni molto acuti la percezione della provenienza del suono non è più dovuta alla differenza di fase. Difatti, per frequenze alquanto superiori al limite di quelle colle quali si ha la percezione per differenza di fase, la differenza di cammino tra i due orecchi nell'aria supera la mezza lunghezza d'onda e quindi ad ogni differenza di fase non corrisponde più una sola posizione della sorgente. E per questi suoni evidentemente noi non possiamo formarci l'educazione accennata.

È prevedibile che il limite superiore delle frequenze che danno l'effetto di fase non sia lo stesso per tutti gli individui, e sarebbe interessante vedere se negli animali, per i quali è lecito supporre un effetto di fase, questo limite sia più alto quando la distanza auricolare è minore di quella dell'uomo.

CONCORSI A PREMI

Elenco dei lavori presentati ai concorsi ai premi
del Ministero della Publica Istruzione per le *Scienze fisiche e chimiche.*

(Scadenza 31 dicembre 1920. — Due premi di L. 2000 ciascuno).

1. Bernini Arciero. 1) « Nozioni sui sistemi ottici dei congegni di puntamento » (st.). — 2) « Istruzione per goniometristi » (st.). — 3) « Sui telemetri a larga base » (st.). — 4) « Istruzione sul servizio d'ascoltazione per la difesa aerea ». I, II, III parte (st.). — 5) « Norme per la postazione di batterie contro aerei e dei mezzi ausiliari per la difesa aerea » (st.). — 6) « Su di un dispositivo acustico per riconoscimento di velivoli e per telegrafia acustica fra aerei e la terra » (ms.). — 7) « Su di un nuovo metodo di impiego telemetro monostatico per l'inseguimento e la misura della distanza degli aerei in volo » (ms.) — 8) « Sulla parallasse del suono nel puntamento acustico di un aereo in volo « (ms.).

2. Calcagni Luigi Gennaro. 1) « L'industria del vetro e le sue condizioni in Italia » (st.). — 2) « Azione del calore sull'acido ossalico e gli ossalati » (st.). — 3) « I combustibili » (st.). — 3) « Solubilità del solfo negli alcali caustici a freddo » (bozze di stampa). — 5) « Lezioni di chimica-fisica applicata » (ms.). — 6) « Trattato di chimica generale e inorganica » (st.).

3. Coppadoro Angelo. 1) Sulla determinazione dell'acido tartarico per via polarimetrica » (st.) — 2) « Gli scisti bituminosi della Valle di Non nel Trentino » (ms.). — 3) « L'industria chimica italiana alla prima Fiera di campioni » (st.). — 4) « Conferenza dell'Unione Internazionale di Chimica pura ed applicata » (st.).

4. Crestani Giuseppe. 1) « Meteorologia aeronautica » (st.). — 2) « Questione di altimetria barometrica » (st.). — 3) « Le cappe » (st.). — 4) « Dell'osservazione delle nubi » (st.). — 5) « Le nubi temporalesche » (st.). — 6) « Della definizione e segnalazione di 'temporale' » (st.). — 7) « Il vento su terreni montuosi » (st.). — 8) « Per la

previsione del vento » (st.). — 9) « Le variazioni del vento » (st.). — 10) « Dell'interpolazione e dell'estrapolazione nell'elaborazione statistica della velocità del vento alle varie quote » (st.). — 11) « Dell'estrapolazione lungo la verticale delle frequenze del vento » (st.). — 12) « Sui limiti dell'altezza dell'esplorazione dell'atmosfera col palloncino pilota » (st.). — 13) « Le condizioni atmosferiche predominanti nelle regioni attraversate col raid Roma-Tokio » (st.). — 14) « Temporali e groppi in Italia » (st.). — 15) « Della nomenclatura e classificazione delle nubi » (ms.). — 16) Sulla fronte del groppo » (ms.).

5. Drago Ernesto. 1) « Nuove ricerche sulla depolarizzazione della luce (st.). — 2) « In memoria di Giovan Pietro Grimaldi » (st.). — 3) « Osservazioni sulla depolarizzazione della luce » (st.). — 4) « Sull'attrito interno del cobalto in campo magnetico variabile » (st.). — 5) « Sull'attrito interno del ferro-nichel nel campo magnetico » (st.). — 6) « Influenza del campo magnetico sull'attrito interno del cobalto nel periodo d'accomodazione » (st.). — 7) « Un'esperienza da lezione sulla tensione elettrostatica » (st.). — 8) « Azione delle onde elettriche sull'isteresi dielettrica (ms.).

6. Perrucca Eligio. 1) « Nuove osservazioni e misure in cristalli otticamente attivi ($NaClO_3$) » (st.). — 2) « Sul modo di ottenere un ' quarto d'onda ' acromatico. Due sferometri sensibilissimi » (st.). — 3) « Sur les ondes latéralement indéfinies, à vibrations pendulaires, que les réflexions associent à un ou deux systèmes analogues donnés d'ondes incidentes » (st.). — 4) « Sulla elettrizzazione del mercurio detta per strofinio. I » (st.). — 5) « Id. Id. II-III » (ms.). — 6) « Sulle differenze di potenziale al contatto » (ms.).

7. Salvadori Roberto. 1) « La lignite di S. Gemignano e la sua utilizzazione in Cok e Gas combustibili » (st.). — 2) « Il ' fattore a ' come termine di classificazione delle ligniti » (st.). — 3) « L'ittiolo Petri di Sassoferrato » (st.). — 4) « Atomi e nuclei atomici » (ms.).

8. Stefanini Annibale. 1) « Sui mezzi atti a svelare le simulazioni di sordità » (st.) — 2) « Sui movimenti degli occhi per stimoli acustici » (st.). — 3) « Sul potere risolutivo dell'orecchio » (st.). — 4) « Sul modo di eseguire la prova di Rinne » (bozze di st.). — 5) « Modo di usare un solo diapason per la ricerca della simulazione di sordità unilaterale » (bozze di st.). — 6) « Sulla percezione dei rumori » (bozze di st.). — 7) « Sulla percezione della direzione del suono » (ms.). — 8) « Dinamo a nucleo fisso o rotante per disposizioni didattiche » (ms.). — 9) « Rotazione di un polo magnetico attraverso un circuito chiuso » (ms.). — 10) « Sulla induzione unipolare » (ms.).

9. Talamo Francesco Luigi. 1) « Un semplice apparecchio da lezione per la caduta dei gravi » (st.). — 2) « Per l'insegnamento della Cosmografia » (st.). — 3) « Le deformazioni scolastiche d'una scienza » (st.).

10. Tenani Mario. 1) « Una questione fondamentale di navigazione aerea: relazione tra l'angolo di deriva e l'angolo di pilotaggio ». (st.). — 2) « Meteorology in relation to aeronautics ». (st.). — 3) « Calcolo della densità dell'aria alle varie altezze fino a 10.000 metri, in base alle osservazioni italiane » (st.). — 4) « Sul collaudo e sul confronto degli apparecchi aerei: riduzione delle prove alle condizioni atmosferiche normali ». (st.). — 5) « Studio sull'indicatore di velocità ». (st.). — 6) « Correzioni ai tiri delle artiglierie relative alla densità dell'aria e al vento » (st.). — 7) « Lezioni elementari di aerologia ». (ms.). — 8) « Sulla preparazione dei grandi voli. (Abaco pei calcoli) ». (st.). — 9) « Sulla determinazione delle proprietà di un apparecchio aereo durante il volo, in funzione della densità attuale dell'aria ». (st.). — 10) « Intorno all'opportunità di convenzioni internazionali per la definizione delle quote ». (st.). — 11) « Nuove tabelle per la determinazione delle altezze per mezzo del barometro ». (Litografate). — 12) « Ricerche sulla oscillazione diurna della velocità del vento a diverse altezze sul suolo ». (st.). — 13) « Traduzione

italiana delle: Note elementari sui minimi quadrati, sulle teorie della statistica e della correlazione per la meteorologia e per l'agricoltura ». (st.). — 14) « Abaco per la riduzione delle misure inglesi in misure metriche e viceversa ». (st.). — 15) « Sull'utilizzazione del vento come forza motrice ». [In corso di stampa] (ms.).

Elenco dei concorrenti alla fondazione « Carpi » per il 1919-1920.

(Premio L. 900).

Carano Enrico. « Nuove ricerche sulla embriologia delle *Asteraceae* » (ms.).

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXX. (1892-1921). Fasc. 3°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 7°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 5.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Rendiconto del 20 febbraio 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

CONCORSI A PREMI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile.*

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Sull'energia disponibile del vento.* Nota del Corrispondente Col. G. ARTURO CROCCO.

La mancanza di un vasto e metodico tentativo per utilizzare l'energia del vento si deve indubbiamente alla incostanza di questa forza naturale. Se esaminiamo infatti le velocità del vento in una data regione troviamo per esempio che per una media annua di 25 km. all'ora la intensità del vento passa frequentemente a bufere di 80 km. all'ora e ricade ancor più frequentemente in calme piatte. Sono le *piene* e le *magre* del vento, con cicli annuali, mensili, diurni: normalmente irregolari. Il rapporto delle energie è ancor più elevato poichè le energie variano coi cubi della intensità onde nel citato esempio risulterebbe nei giorni di vento forte una energia pari a venticinque o trenta volte la media. Il che, se eleva da un lato la media annua *efficace*, cioè la radice cubica della media dei cubi, impone d'altra parte a chi voglia utilizzarla la predisposizione di apparecchi utilizzatori di capacità di gran lunga superiore a quelli occorrenti per la media energia annua.

È quanto avviene — in proporzioni minori — nella utilizzazione dell'energia idraulica; colla differenza tuttavia che, non essendo possibile accumulare immediatamente il vento, come si fa coll'acqua esuberante nei bacini di compensazione, bisogna ricorrere nel caso dell'energia atmosferica all'accumulazione *mediata*, cioè di un prodotto di trasformazione: e questa accumulazione, elettrica o meccanica, si è presentata sino ad oggi troppo costosa per competere con altre sorgenti di energia nel campo industriale.

Ora recenti ricerche sul pratico uso di accumulatori termici lasciano pensare che le cose possano spostarsi in vantaggio dell'energia atmosferica, se si tiene soprattutto di mira una sua finale utilizzazione sotto forma di calore [1].

Si son potute nel fatto fabbricare sostanze accumulatrici capaci di assorbire integralmente e restituire con alto rendimento oltre cento calorie per chilogrammo, col vantaggio pratico di un costo non eccessivo. Queste sostanze che assorbirebbero perciò cinque volte circa l'energia che è capace di assorbire a parità di peso una comune lastra di accumulatore elettrico con un costo unitario circa dieci volte minore di quello del piombo, porterebbero il costo dell'accumulazione termica a cifre già comparabili a quelle dell'accumulazione idraulica: e lascerebbero preconizzare — col progresso della tecnica — la possibilità economica di tale accumulazione, purchè ripeto l'energia così disponibile venga poi principalmente utilizzata sotto forma calorifica.

È del resto il problema del giorno: e poichè alcune sostanze sinora sperimentate sembrano consentire anche l'accumulazione ad elevate temperature si prevede nel fatto possibile di utilizzare il calore in varie applicazioni per le quali oggi si deve ricorrere al carbone. Accanto al carbone bianco degli idraulici si potrebbe quindi avere il carbone trasparente, ricavato dall'atmosfera.

Trovato comunque il modo di accumulare in serbatoi di calore (sia meccanicamente che elettricamente) l'energia esuberante delle giornate ventose per utilizzarla nelle giornate di calma, assume interesse il conoscere l'entità dell'energia totale ricavabile dal vento in una data regione: per poter procedere, sia pure da un punto di vista ideale, a una specie di censimento valutativo dell'energia disponibile nel nostro paese.

A questo scopo è infatti da osservare come la configurazione montagnosa del nostro suolo si presti a disciplinare i venti sotto direzioni prevalenti in determinate località le quali si presentano ai movimenti della massa atmosferica sia come dighe sia come canali. Le prime costituendo alla corrente aerea sezioni ristrette, ne accrescono l' intensità, raccogliendo soprattutto i venti elevati; le altre, offrendo vie di minor resistenza, ricevono e indirizzano lungo valli o gole i venti di determinati quadranti. Esistono pertanto, e in Italia specialmente, numerose località nelle quali la media efficace annua del vento si mantiene elevata e nelle quali il vento si presenta come una vasta corrente d'aria di dimensioni abbastanza determinabili.

Premesso ciò immaginiamo di trovarci in una regione ideale ove il suolo sia ovunque accessibile e che venga battuta in una determinata dire-

[1] Cfr. Durando, *L'accumulazione termica dell'energia*. L'Elettrotecnica del 15 febbraio 1921.

zione da un vento dominante del quale si conoscano i limiti laterali, per esempio i fianchi di due catene di monti, e l'altezza approssimativa sino alla quale la velocità si mantiene all'incirca costante. Per utilizzare l'energia di una simile corrente atmosferica bisogna evidentemente raccoglierla in utilizzatori multipli la cui ubicazione si estenda quanto più è possibile sia in larghezza sia in altezza: e sorge spontaneo il concetto di connettere opportunamente tra loro questi utilizzatori istallandoli su una costruzione reticolare che costituisca nel suo insieme una specie di *sbarramento* alla corrente dell'aria sopra individuata. Da un punto di vista ideale un simile sbarramento potrebbe occupare in larghezza tutta l'estensione della corrente aerea; e, pur limitandosi forzosamente in altezza a venti o trentà metri, potrebbe raccogliere già notevoli quantità di energia, sufficienti ad imprese industriali.

Una semplice osservazione consente però di andare oltre in questo concetto.

È nozione comune che il vento si ricostituisce dietro gli ostacoli, a spese della quantità di moto ambiente. Nel caso di un disco alla distanza di otto diametri sottovento la velocità della corrente ha già superato i nove decimi di quella ambiente.

Nel caso che ci interessa il suolo preclude all'aria una via, aumentando la distanza necessaria alla ricostituzione. ma d'altra parte l'ostacolo in questione non assorbe che una frazione dell'energia, e quindi consente distanze praticamente minori. Cosicchè riterremo che si possa utilmente impiantare a distanze non eccessive un secondo sbarramento dietro il primo; e così un terzo ed un quarto, moltiplicando in serie, sin che il rendimento lo consenta, i gruppi di utilizzatori del vento e costituendo una specie di bacino atmosferico capace di raccogliere ingenti quantità di energia. Vi è naturalmente un limite teorico: proveniente dal fatto che nel caso in questione la ricostituzione del vento dietro i varî sbarramenti avviene a spese della corrente superiore; e l'energia massima utilizzabile è precisamente quella che si ottiene valutando la forza viva di tutta la massa aerea in azione, sia in larghezza che in altezza; ma da questo limite siamo purtroppo lontani. Il ragionamento precedente mette però in luce che una frazione dell'energia delle zone superiori, che sembra a primo esame inaccessibile, può venire raccolta — da un punto di vista teorico — con costruzioni di limitata altezza sul suolo: e ci insegna un modo semplice di valutare l'energia del vento, complessivamente disponibile in una data regione.

Qual sia la frazione praticamente utilizzabile di questa energia non ci è ancora consentito di preconizzare con cifre; onde ci proponiamo di approfondire l'indagine sui termini aerodinamici ed aerologici della questione. Neanco è lecito pensare ad una utilizzazione intensiva che non potrebbe rimanere senza ripercussione sulla intensità stessa del vento e sulle sue cause.

È però agevole riconoscere — malgrado tante restrizioni — l'importanza dell'energia che annualmente circola e si disperde per la nostra atmosfera: e l'opportunità di rivolgere anche nel nostro paese l'attenzione degli studiosi e dei pratici verso uno sfruttamento razionale e metodico — in determinate favorevoli località — di questa permanente ricchezza naturale.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul potenziale di doppio strato superficiale* (1). Nota di M. Picone, presentata dal Socio T. Levi-Civita (2).

. . . . nelle esposizioni che ho potuto leggere della teoria del potenziale, quando addirittura non la si ometta, non si dà, d'ordinario, un adeguato rilievo alla dimostrazione che *il potenziale di doppio strato superficiale*

$$W(P) = \int_S \mu \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\sigma, \tag{1}$$

ha sempre un valore determinato e finito anche quando il punto potenziato P *sta sulla superficie potenziante* S.

Taluni autori dànno di ciò un'affrettata dimostrazione, nella quale però è tacitamente supposto, in più della regolarità della superficie S, che se

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v),$$

sono le equazioni parametriche della superficie, le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ devono possedere le derivate parziali del secondo ordine limitate in un conveniente intorno di ogni punto di S. Un'esauriente dimostrazione, in tale ipotesi, si può subito ricavare dall'accurata analisi che si trova svolta nelle pagine 42 e 43 della *Teorica delle forze Newtoniane* del Betti. Dal punto di vista dello stretto rigore analitico non sono poi accettabili quelle dimostrazioni, che si trovano in parecchi trattati di fisica-matematica, nelle quali si fa ricorso a intuitive affermazioni sull'angolo visuale relativo ad una superficie.

Mi permetto di sottoporre al Suo giudizio una semplicissima dimostrazione del fatto sopradetto, la quale è un'immediata conseguenza di un'espressione del potenziale di doppio strato che mi pare non sia stata notata, mentre sussiste in ipotesi molto larghe nelle quali non viene fatta menzione alcuna delle derivate seconde delle funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Sup-

(1) Da una lettera al prof. Levi-Civita.

(2) Presentata nella seduta del 19 dicembre 1920.

pongo che, per ogni punto P dello spazio, di coordinate a, b, c, le equazioni parametriche della superficie regolare S si possano porre nella forma

$$(2) \qquad x = a + \varrho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \ , \ y = b + \varrho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \ , \ z = c + \varrho \cos \varphi,$$

ove ϱ, θ, φ sono tre funzioni di P e dei parametri u e v, funzioni definite nel dominio regolare D, del piano (u, v), base della superficie, ivi limitate, con le loro derivate parziali del primo ordine, e continue, con queste derivate, entro ciascuno di certi dominii regolari $D_1, D_2, \dots, D_\nu$, in numero finito ν, secondo i quali risulta decomposto il dominio D. I dominii $D, D_1, D_2, \dots, D_\nu$ dipenderanno, in generale, pur essi dal punto P.

In forza delle (2), l'integrale (1) si scrive

$$W(P) = \int_{D(P)} \mu(u, v) \frac{\cos(r, n)}{\varrho^2} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

col solito significato di E, F, G.

Si ha, d'altra parte, entro ciascuno dei dominii $D_1, D_2, \dots, D_\nu$,

$$\cos(r, n) \sqrt{EF - F^2} =$$

$$= - \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \frac{d(y, z)}{d(u, v)} - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \frac{d(z . x)}{d(u, v)} - \cos \varphi \frac{d(x, y)}{d(u, v)} =$$

$$= - \varrho^2 \operatorname{sen} \varphi \frac{d(\varphi, \theta)}{d(u, v)};$$

ne segue, sia P situato o no sulla superficie S,

$$(3) \qquad W(P) = - \int_{D(P)} \mu(u, v) \operatorname{sen} \varphi \frac{d(\varphi, \theta)}{d(u, v)} du\, dv.$$

È questa l'accennata espressione del potenziale di doppio strato, sotto la quale risulta ben evidente ch'esso ha sempre un valore determinato e finito anche quando il punto potenziato P sta sulla superficie potenziante S e la funzione $\mu(u, v)$ è limitata e integrabile in D(P).

Si faccia variare P sulla S. Si indichi con $D_i(P, P')$ il dominio comune ai dominii $D_i(P)$ e $D_i(P')$ $(i = 1, 2, \dots, \nu)$. Se, come accadrà d'ordinario entro ogni porzione di S priva di punti singolari, al tendere del punto P' di S al punto P di S, le misure dei dominii $D_i(P) - D_i(P, P')$, $D_i(P') - D_i(P, P')$ $(i = 1, 2, \dots, \nu)$ tendono a zero e se, posto

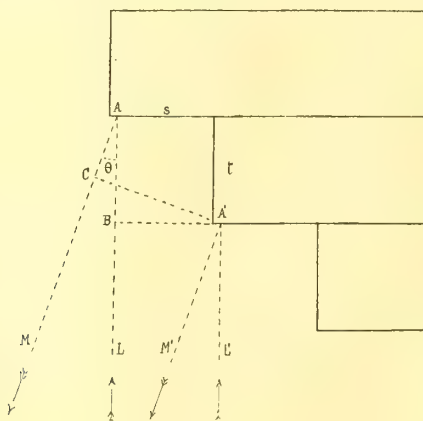
$$\mu \operatorname{sen} \varphi \frac{d(\varphi, \theta)}{d(u, v)} = F(P, u, v),$$

la differenza $F(P, u, v) - F(P', u, v)$ tende uniformemente a zero in $D_i(P, P')$, dalla (3) si deduce subito che *il potenziale di doppio strato* W(P) *è funzione continua di* P, *quando si tenga il punto* P *sulla* S *ed entro ciascuna sua porzione priva di punti singolari per* S.

A questa conclusione, *nella ulteriore ipotesi della continuità di* μ, si giunge anche osservando, con Painlévé, che se $W_1(P)$ indica il limite di $W(Q)$ quando il punto potenziato Q, mantenendosi sempre fuori di S e da una sua medesima parte, tende al punto P di S, la funzione $W_1(P)$ risulta continua sulla S, e ricordando che, entro ogni porzione di S priva di punti singolari, è sempre $W(P) = W_1(P) \pm 2\pi\mu(P)$.

Alle ipotesi sopradette non è certo possibile soddisfare quando il punto P varia attraversando la superficie S.

Fisica. — *Spettroscopio a gradinata catottrica.* Nota del prof. A. Lo Surdo, presentata dal Corrisp. A. Garbasso [1].

Supponiamo che una gradinata come quella che costituisce lo spettroscopio di Michelson, sia formata da lamine speculari anzichè trasparenti. Facciamo cadere sul fronte degli scalini un fascio di raggi paralleli, diretti normalmente alle lamine, e raccogliamo col cannocchiale di osservazione i raggi diffratti per riflessione.

Il comportamento di questo spettroscopio a gradinata catottrica si può prevedere colla teoria della gradinata trasparente, opportunamente modificata.

Siano s l'altezza e t lo spessore di uno scalino (fig. 1), θ l'angolo per il quale due raggi corrispondenti di due scalini successivi, LAM e L'A'M', abbiano cammini che differiscono di $m\lambda$, indicando con λ la lunghezza d'onda e con m un numero intero.

Si ha:

$$m\lambda = BA + AC = t + t\cos\theta - s \operatorname{sen}\theta$$

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

e supponendo θ piccolo

(1) $$m\lambda = 2t - s\theta .$$

Da questa relazione otteniamo la dispersione derivando e sostituendo ad m il suo valore approssimato $m = \frac{2t}{\lambda}$:

(2) $$\frac{d\theta}{d\lambda} = - \frac{2t}{\lambda s}$$

Per trovare il potere risolutivo introduciamo nella (2) il valore dell'angolo tra il massimo principale e il primo minimo che, come risulta dalla teoria dei reticoli, è $d\theta = \pm \frac{\lambda}{ns}$, dove n indica il numero totale degli scalini. Si ha:

(3) $$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2tn} .$$

In questa relazione $d\lambda$ indica la differenza di lunghezza d'onda minima necessaria per la risoluzione.

L'angolo compreso fra due spettri di ordine successivo si può ottenere differenziando la (1) rispetto ad m e ponendo $dm = \pm 1$. Si ha, come nel caso della trasparenza:

$$d\theta_1 = \mp \frac{\lambda}{s}.$$

A questo angolo corrisponde una variazione di lunghezza d'onda $d\lambda$, per la quale lo spettro di ordine m della radiazione $\lambda + d\lambda$ coincide con lo spettro di ordine $m + 1$ della radiazione λ. Questa differenza $d\lambda$ si ottiene quindi sostituendo nella (2) a $d\theta$ il valore dato dalla (4). Si ha:

(5) $$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{2t}$$

Anche qui il limite della risoluzione è $\frac{1}{n}$ dell'intervallo fra due spettri successivi, ed è facile vedere che la distribuzione dell'intensità rimane la stessa.

Le espressioni (2), (3), (5), trovate ora hanno la stessa forma di quelle che si ottengono nel caso della trasparenza [1]: però al posto del coefficiente 2, che compare qui a numeratore nella (2) e a denominatore nella (3) e nella (5), in quelle di Michelson c'è una funzione b di λ:

(6) $$b = \left[(\mu - 1) - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} \right],$$

dove μ indica l'indice di rifrazione.

[1] Michelson, Journ. de Phys., III, S., 8, 1899, p. 305.

Per il vetro che si suole adoperare nella costruzione degli spettroscopi di Michelson, i valori di b per le lunghezze d'onda delle radiazioni visibili differiscono poco dalla terza parte di 2.

Quindi, colla gradinata catottrica:

1) la dispersione risulta quasi tre volte maggiore [1].

2) il potere risolutivo è quasi triplicato, cioè con questa gradinata si possono risolvere due righe la cui differenza di lunghezza d'onda è circa la terza parte di quella che occorre per una gradinata trasparente, delle stesse dimensioni.

3) la differenza di lunghezza d'onda compresa tra due spettri successivi è circa la terza parte.

Una conferma sperimentale l'ho ottenuta con un piccolo spettroscopio a gradinata costruito da Hilger di Londra, che trovasi nel Gabinetto di Fisica del R. Istituto di Studi Superiori in Firenze [2]. L'ho adoperato come una gradinata riflettente accontentandomi di raccogliere la luce riflessa parzialmente dal vetro sulle facce degli scalini.

I primi tentativi furono poco fortunati, poichè, dovendo mettermi dalla stessa parte del prisma dello spettroscopio col quale è necessario separare le radiazioni, avevo collocato la gradinata a breve distanza dal prisma ed il cannocchiale al disopra di questo, e quindi ricevevo i raggi sotto un angolo troppo forte. Tale inconveniente può essere tolto disponendo fra il prisma e la gradinata una lamina semi argentata a 45° in modo da ricevere i raggi a 90° da quelli incidenti: ma io disponevo di troppa poca luce, a causa della debole riflessione parziale delle lamine, per diminuirla ancora con questo artifizio.

Per ridurre piccolo l'angolo θ ho collocato la gradinata a circa due metri di distanza dal prisma, ed ho messo il cannocchiale immediatamente al disopra del prisma, quasi appoggiato ad esso. Si presentavano altri inconvenienti, che non eran però tali da impedirmi di fare l'osservazione.

Ho osservato una delle due righe gialle del mercurio, quella di lunghezza d'onda minore, $\lambda = 5770$. Essa appariva decomposta nel modo indicato da Michelson [3]. Con la stessa gradinata usata per trasparenza, la medesima riga appariva invece senza satelliti. E ciò conformemente al calcolo.

Con uno spettroscopio a gradinata di maggiore potere risolutivo (40 lamine da 1 cm.) usato per trasparenza, la riga appariva sdoppiata come col piccolo usato per riflessione.

[1] Essa ha segno opposto: con questa gradinata allontanandosi dalla normale si va verso il violetto.

[2] Esso è costituito da 12 lamine dello spessore di cm. 0,99; l'indice di rifrazione per la D ha il valore: 1,57493. Il calcolo dà i seguenti valori per la funzione:

$$b_C = 0{,}605 \quad , \quad b_D = 0{,}617 \quad , \quad b_F = 0{,}648.$$

[3] Michelson, Phil. Mag., 5ª S., vol. 34, 1892, p. 292.

Io ritengo che cogli spettroscopi a gradinata costruiti con lamine di vetro a facce argentate, o con lamine metalliche o forse anche tracciando gli scalini su pezzi di metallo come si fa per i reticoli *échelettes* di Wood [1], si potrebbe ottenere un notevole vantaggio nelle indagini spettroscopiche, sia per l'accrescimento del potere risolutivo, sia per l'applicazione, che sembra possibile, all'ultravioletto.

Il Michelson aveva pensato alla gradinata riflettente prima che alla gradinata trasparente [2]; ma aveva abbandonato l'idea per la difficoltà di disporre parallele le lamine, poichè nel caso della riflessione occorre una maggiore precisione. Egli non fa cenno del vantaggio della riflessione, qui mostrato, tanto più notevole in quanto la limitazione del numero delle lamine trasparenti rappresenta un ostacolo insormontabile all'accrescimento del potere risolutivo. L'esperienza da me fatta mostra che col perfezionarsi della tecnica nella costruzione delle gradinate si è raggiunta una precisione sufficiente per tentare la costruzione di gradinate riflettenti.

L'esperienza avanti descritta venne da me eseguita nel Laboratorio di Fisica del R. Istituto di Studî Superiori in Firenze: ringrazio quindi il Direttore prof. Garbasso per l'ospitalità accordatami.

Fisica terrestre. — *La Missione italiana per l'esplorazione dei mari di Levante.* Relazione preliminare del prof. Giovanni Magrini [3].

Nel 1914 si riunì a Roma, precisamente in questa sede dei Lincei, la Commissione internazionale per l'esplorazione scientifica del Mediterraneo, sorta in seguito ad una deliberazione del Congresso internazionale di geografia di Ginevra, nel 1908.

La Commissione potè però iniziare il suo lavoro solo dopo cessata la terribile guerra di questi ultimi anni, quando nel 1919, a Madrid, nella Conferenza ivi tenutasi sotto la presidenza di S. A. il principe di Monaco, benemerito mecenate dell'oceanografia, furono presi gli accordi definitivi fra i diversi paesi rivieraschi e gettate le basi del necessario lavoro internazionale.

All'Italia, che al suo attivo aveva la poderosa organizzazione del Comitato talassografico, invidiataci dagli stranieri, fu affidato il còmpito importantissimo

(1) Wood, Phil. Mag., 20, 1910, p. 775 In questi reticoli con uno speciale tracciamento a denti di sega si riesce a concentrare la luce in un gruppo di spettri al di fuori dell'immagine centrale.

(2) Journ. de Phys., III S., 8, 1899, p. 305.

(3) Lettura fatta dall'Autore, per invito del Presidente e coll'assenso della Classe.

di provvedere all'esplorazione dei mari di Levante ed in un primo periodo all'esplorazione degli Stretti di Costantinopoli e dell'Egeo fino alla linea Creta, Rodi, Sette Capi.

Tale mandato fu accettato, a nome del Governo italiano, dalla nostra Delegazione, presieduta dal sen. Leonardi Cattolica.

Una prima campagna fu svolta nel 1920, campagna che ho avuto l'onore di dirigere. Ad essa fu destinata la R. Nave talassografica *Tremiti*, allestita con cura e molto adatta allo scopo. Mi sia permessa, a nome degli studiosi, una viva parola di riconoscenza a S. E. Sechi, ministro della Marina, presidente del Comitato talassografico italiano, che personalmente si interessò dell'organizzazione della campagna, risolvendo ogni difficoltà col suo autorevole intervento e col suo consiglio, come pure al direttore ed agli ufficiali dell'Istituto Idrografico della R. Marina di Genova, le cui illustri tradizioni sono note (e basti ricordare i nomi di Magnaghi e di Leonardi Cattolica) che agevolarono l'opera di preparazione e curarono con intelletto d'amore, l'allestimento della nave.

La *Tremiti* ha 500 tonnellate, con una potenza di circa 1000 cavalli; lunga circa 40 metri è molto docile e tiene benissimo il mare. Ciò rende possibile ricerche anche con mare agitato; generalmente difficili o impossibili, quando la nave sia costretta per il cattivo tempo a riparare nei porti.

A bordo ha gli impianti necessarî per le ricerche idrografiche, fisiche, chimiche e biologiche. Due laboratorî, uno per la biologia ed uno per la chimica permettono lo studio immediato dei materiali raccolti.

La Missione imbarcata a bordo della *Tremiti* era così composta:

Prof. Magrini, idrografo e capo della Missione.
Dott. Manuelli, chimico capo.
Dott. Norsa, chimico-fisico aggiunto.
Prof. Sanzo, biologo capo.
Dott. Rizzo, biologo aggiunto.
Sig. Bernardi, meccanico capo.
Sig. Arena, pescatore capo.

I lavori d'esplorazione cominciarono il 28 aprile con alcune stazioni eseguite nel Mar Nero e furono proseguiti fino al 5 novembre con le ultime stazioni eseguite in Egeo.

Lo studio delle correnti del Bosforo, dei Dardanelli e delle loro variazioni fu sviluppato con cura particolare mediante osservazioni continuate nel medesimo punto di stazione per oltre 24 ore consecutive. Tale metodo di ricerca permise di ottenere risultati concreti ed interessanti.

In totale furono eseguite 124 stazioni complete e 14 stazioni di 24 ore consecutive. Parecchi giorni furono inoltre dedicati esclusivamente all'esplorazione biologica.

A Costantinopoli fu impiantato inoltre un Istituto collo scopo di servire di base alle ricerche da eseguirsi in mare. In tale Istituto funziona un Osservatorio meteorologico con carattere permanente.

All'Istituto è anche affidata la sorveglianza e la manutenzione delle stazioni mareografiche da noi impiantate per lo studio del problema degli Stretti.

* * *

Il problema fondamentale che ci siamo proposti di studiare dal punto di vista dell'oceanografia fisica, in tale crociera, è il seguente:

Quale è il regime e quali sono le cause delle correnti che si verificano nel Bosforo e nei Dardanelli?

Schematicamente abbiamo considerato il sistema degli Stretti di Costantinopoli come costituito da due bacini terminali (Mar Nero e Mar Egeo) messi in comunicazione da un canale unico che si allarga in un bacino intermedio di espansione (Mar di Marmara).

Il problema fu così posto idraulicamente. Esso si presta anche ad una elegante trattazione teorica.

Le ricerche da svolgersi furono riunite in tre gruppi:

a) Ricerche fisiche e mareografiche:

b) Ricerche chimiche;

c) Ricerche meteorologiche.

Si è visto subito, come era da prevedersi, che il fenomeno della corrente, sia nel Bosforo che nei Dardanelli è estremamente variabile, e impossibile a studiarsi con misure ed osservazioni saltuarie.

I principali fatti che fu possibile accertare in questa prima campagna sono i seguenti:

Per quanto riguarda le proprietà intrinseche della massa d'acqua, durante l'intero periodo primavera-estate 1920 si è constatato che il minimo di temperatura (lungo la linea Mar Nero, Bosforo, Mar di Marmara, Dardanelli) si trovava, con il valore di 8 gradi, ad una profondità variabile da 50 a 90 metri nel Mar Nero, profondità che andava diminuendo rapidamente lungo il Bosforo per arrivare a circa 20 metri in Marmara, con un valore di 10 gradi. Al disotto di questo strato di minimo abbiamo trovato che in Mar Nero la temperatura andava lentissimamente aumentando fino al fondo, raggiungendo solo i 9 gradi o poco più; mentre lungo il Bosforo ed il Mar di Marmara la temperatura andava rapidamente aumentando fino a raggiungere i 16 gradi circa, per poi nuovamente diminuire di poco in Marmara.

Lungo i Dardanelli lo strato d'acqua fredda superficiale del Mar Nero va attenuandosi fino a sparire verso la foce, dove solo in qualche giorno si trova. Normalmente già alla foce dei Dardanelli troviamo le condizioni solite dell'Egeo, con l'ordinaria stratificazione termica del Mediterraneo orientale.

Per la salsedine troviamo un andamento abbastanza concordante con quello della temperatura. La salsedine va sempre aumentando dalla superficie al fondo, e il valore del minimo superficiale che è di 17 grammi per mille in Mar Nero, arriva fino a 26 alla foce dei Dardanelli ed a 38 nell'Egeo.

Il massimo al fondo è di 22 grammi in Mar Nero; ma già nel Bosforo lo troviamo di 35 e 36 e già di 38 nel Mar di Marmara, come nel Mediterraneo orientale.

È risultato evidente il fenomeno, del resto già noto, della circolazione di due correnti principali: una superficiale dal Mar Nero all'Egeo, una profonda o controcorrente dal Mar Egeo al Mar Nero.

Da un primo esame dei dati appare subito come l'influenza reciproca delle due correnti, di cui la prevalenza di una sull'altra varia continuamente, sia molto più rapida per quanto riguarda la salsedine, che per quanto riguarda la temperatura, fatto del resto che le leggi della fisica chimica danno a prevedere.

Per quanto riguarda le condizioni di movimento furono anzitutto studiate le variazioni del livello dell'acqua. Con tale ricerca ci proponemmo di stabilire:

α) se esistono variazioni del livello legate ai fenomeni astronomici (attrazione lunisolare);

β) la natura delle variazioni del livello dovute a cause meteorologiche.

Fra queste ultime furono considerate prevalentemente: la pressione atmosferica e le sue variazioni, il vento nei suoi due elementi: velocità e direzione.

γ) la natura delle variazioni del livello dovute a cause idrografiche, fra le quali furono esaminati prevalentemente gli afflussi al mare delle masse d'acque fluviali, e l'evaporazione.

δ) le variazioni di livello dovute a movimenti ondulatori (onde stazionarie, ondulazioni secondarie).

Furono impiantati per questa ricerca alcuni mareografi, ed i risultati ottenuti furono quanto mai interessanti. La marea del Mar Nero fu riconosciuta ed è evidente l'onda diurna e l'onda semidiurna; all'imboccatura del Bosforo in Mar Nero l'ampiezza media è di circa 20 cm. Questo fatto è importante perchè finora non mi risulta che la marea del Mar Nero fosse stata accertata dagli idrografi, da molti anzi è tassativamente negata.

È vero bensì che la marea vi è spesso mascherata e deformata da variazioni di livello dovute ad altre cause.

Lungo il Bosforo la marea si verifica, propagazione evidente della marea del Mar Nero.

Nell'Egeo, a Scalanova la marea, con una ampiezza media di 30 cm., mostra molto più accentuata l'onda semidiurna, in confronto della diurna; e

tale caratteristica la troviamo pure nei Dardanelli, dove la marea è molto regolare, con un'ampiezza media di 50 cm.

Nel Mar di Marmara ad Antigone la marea si verifica; ma risulta, in certo qual modo, dalla composizione delle due onde di marea propagantesi dal Mar Nero attraverso il Bosforo e dal Mar Egeo attraverso i Dardanelli. Il fenomeno vi è molto complicato, perchè è legato anche alle variazioni di livello dovute a cause meteorologiche.

Per quanto riguarda le osservazioni sul regime delle correnti nel Bosforo e nei Dardanelli, lo studio del materiale raccolto non è ancora ultimato. Occorre inoltre per arrivare a risultati concreti, raccogliere ulteriore materiale d'osservazione.

Alcuni fatti però possono fin d'ora essere precisati:

I) l'influenza delle variazioni della pressione atmosferica è molto più notevole di quella del vento;

II) esistono delle onde profonde assai caratteristiche, con periodi diversi ma individuabili;

III) si trovano spesso strati alternati di corrente e di controcorrente;

IV) la velocità della controcorrente è generalmente minore della velocità della corrente, ma qualche volta la supera;

V) variano con continuità le profondità degli strati di separazione fra la corrente e la controcorrente, e di massima velocità sia della corrente, sia della controcorrente;

VI) qualche volta la controcorrente diminuisce in velocità in modo da non essere più individuabile;

VII) furono misurate velocità tanto della corrente quanto della controcorrente di oltre 4 miglia orarie.

Mineralogia. — *Sulla vera natura della Rosasite.* Nota II del dott. C. Perrier [1], presentata dal Socio E. Artini [2].

Se si schiacciano fra due vetrini dei globuletti di Rosasite e si osservano al microscopio si nota la formazione di esili laminucce rettangolari, provenienti da una perfetta sfaldatura di cui non fu possibile determinare la posizione, non presentandosi mai questo minerale in cristalli isolati e distinti. Tali laminucce presentano un sensibile pleocroismo con le seguenti tinte:

verde	azzurrino	chiarissimo	nella direzione d'allungamento
id.	id.	ben marcato	normalmente ad essa.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Zambonini.

[2] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

Esaminate a nicols incrociati e luce parallela, esse mostrano sempre estinzione rigorosamente parallela alla direzione di allungamento che è otticamente *negativa*: soltanto qualche raro elemento, pur possedendo sempre estinzione parallela, mostra per l'allungamento un carattere ottico opposto.

In luce convergente, data la piccolezza degli elementi, non ebbi alcuna figura di interferenza.

Dati questi caratteri, è molto probabile che il minerale cristallizzi nel sistema rombico, pur non potendo assolutamente escludere che la Rosasite sia monoclina, con sfaldatura secondo facce della zona [010].

Nelle lamine ad allungamento ottico negativo, si ha che gli indici di rifrazione, determinati col metodo della linea di Becke, hanno, per la luce del sodio, un valore di 1,71 nella direzione di allungamento ed uno $>1,745$ in quella ad essa normale.

Contrariamente all'opinione di Lovisato, la rosasite non si distingue dalla malachite per il peso specifico, che ha, in realtà, nei due minerali lo stesso valore [4,09 (Perrier), 4,07 (Lovisato)]: 4,07-4,06 rispettivamente per le malachiti di Eiserfeld (Haege) (¹) e Phoenixville-Pensilvania (Smith) (²). Anche la differenza di durezza (4,5- Rosasite e 3,5-4- Malachite), sulla quale si basa il Lovisato, è di poco momento, data la difficoltà di determinarla esattamente nella Rosasite.

I caratteri diagnostici più sicuri per differenziare questo minerale dalla malachite, sono invece da ricercarsi nella composizione chimica, per la forte abbondanza dello zinco, e, poi, nelle proprietà ottiche (estinzione sempre parallela alla direzione di allungamento nella Rosasite-pleocroismo nettamente diverso) e, si può aggiungere, anche nell'assenza dei caratteristici geminati secondo {100} che si hanno nella malachite.

Anche un altro idrocarbonato di rame e zinco esistente in natura, l'auricalcite potrebbe venire, con un semplice saggio qualitativo, confuso con la Rosasite, tanto più perchè nelle lamine di auricalcite a contorno rettangolare ben definito si ha estinzione parallela alla direzione di allungamento. A differenziare la Rosasite da quest'ultimo minerale può servire già assai bene il pleocroismo che nell'auricalcite è:

verde azzurrino non molto intenso	normalmente alla direzione di allungamento
id. id. quasi incoloro	parallelamente ad esso

(sicchè le direzioni di massimo assorbimento sono perpendicolari tra loro nei

(¹) Cfr. Doelter, *Handbuch d. Mineralchemie*, I, 1, pag. 159. Articolo *Malachit* di A. Himmelbauer.

(²) Id. id. Valori più bassi, come quello di 3,9 dato da Gawalowski [*Malachit im Banat*. Ausz. Zeit. f. Kryst. XLIX (1911) 308] per la malachite del Banato sono stati ottenuti con materiale molto impuro.

due minerali), inoltre, rilevabile solo in individui sufficientemente spessi. Ma anche le altre proprietà ottiche sono nell'auricalcite nettamente diverse da quelle della Rosasite.

Se, infatti, come osservai, si prendono dei cristallini di auricalcite e si esaminano al microscopio, si notano molto facilmente delle laminette con estinzione sensibilmente parallela, con direzione *positiva* di allungamento ottico, dalle quali, a nicols incrociati e luce convergente, esce, proprio normalmente alla faccia, la bisettrice negativa di un grande angolo degli assi ottici. Queste lamine presentano i seguenti indici di rifrazione (determinate col metodo della linea di Becke):

1,675 normalmente alla direzione di allungamento
1,745 parallelamente " " "

Da quanto è stato esposto precedentemente si può concludere che la Rosasite deve essere considerata come una specie mineralogica definita, corrispondente ad un sale basico del tipo della malachite, dalla quale va, però, nettamente distinta, sia, probabilmente, per il sistema cristallino, sia per la profonda sostituzione dello zinco col rame. Essa, infatti, può rappresentare o semplicemente la fase rombica del composto della malachite $CuCO_3 . Cu(OH)_2$ nella quale una gran parte del rame è sostituito isomorficamente dallo zinco, oppure un sale doppio di idrato ramico e carbonato di zinco, con una parte di quest'ultimo sostituita isomorficamente dal rame, cioè $(Zn, Cu)CO_3 . Cu(OH_2)$, ammettendosi in questa seconda ipotesi, dato il colore verde corrispondente ad altri sali basici di rame, che il metallo legato all'ossidrile sia esclusivamente, o quasi, il rame. Per quest'ultima ipotesi starebbe in favore il fatto, che il rapporto degli atomi di rame a quelli dello zinco è poco diverso da 1 : 1.

La formola indicata, secondo le idee werneriane, potrebbe, perciò, mettersi sotto la forma $\left[Cu{}^{CO_3}_{(OH)_2}\right](Zn, Cu)$.

La formola di struttura proposta da Tschermack e Groth per la malachite $CO_2(Cu . OH)_2$ è meno plausibile, perchè nel nostro caso diverrebbe $CO_2[(Cu, Zn) . OH]_2$ e per un minerale contenente tanto zinco, parrebbe che il colore dovesse essere più chiaro.

Una più profonda conoscenza del comportamento di questa sostanza, per ora limitata dalla scarsezza del materiale, potrebbe, forse, gettare una notevole luce sulla costituzione di molti sali basici e specialmente di quelli del rame, così frequenti in natura.

Geologia. — *Sulla costituzione geologica della Cirenaica. I: Terreni eocenici.* Nota di GIUSEPPE STEFANINI, presentata dal Socio C. DE STEFANI [1].

Ebbi già occasione di riassumere diffusamente la bibliografia geologica della Cirenaica [2]. Coordinando quei dati coi risultati di uno studio paleontologico da me condotto su copiosi materiali di varie provenienze e con le notizie fornitemi da taluni dei raccoglitori, quali il cap. A. Bruzzo, il prof. O. Marinelli e il top. A. Sgrilli, posso oggi tracciare della geologia di quella regione un rapido schizzo, che in parte completa, in parte modifica le conclusioni cui era giunto il Gregory [3].

Oltre che dai precedenti, i materiali esaminati furono raccolti dal cap. med. Pellegrini, dal col. Caputo e dal dott. Maugini. A tutti debbo la mia più viva riconoscenza.

EOCENE INFERIORE. — Il Gregory attribuiva a questo piano due livelli: il « pre-Apollonia Limestone », che corrisponderebbe al piano libico inferiore di Egitto, e i « calcari di Apollonia », litologicamente caratterizzati da abbondanti noduli di selce. Qualunque documentazione paleontologica mancava, se non si consideri come tale la presenza di *Numm. planulata* D'Orb., segnalata poi dal Prever [4] in un arnione di selce proveniente dall'ospedale turco di Derna.

Ora il Marinelli mi avverte, che noduli e liste di selce si trovano anche nei calcari dell'Eocene medio; tuttavia pare prevalgano nei livelli più bassi della serie.

Per parte mia, nei calcari bianchi, compatti, basali di Apollonia (Ridotta Filtro; loc. anon. a 3 km. ad ovest di Marsa Susa ecc.) ho riscontrato soltanto *N. globulus* Leym., specie del Luteziano inferiore, almeno in Europa, e *Plecanium niloticum* Schwag., comune nel piano libico e raro nel mokattamico in Egitto. Ma siccome gran parte delle foraminifere eonummulitiche africane corrispondono notoriamente a tipi mesonummulitici europei, e in particolare *N. globulus* apparisce in Egitto nel piano libico, non sembra

[1] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

[2] Cfr. Arch. bibliogr. colon. I, 1, maggio 1915, pp. 19-31; III, 3-4, febbraio 1920, pp. 81-89; IV, 1-2 (in corso di stampa),

[3] Gregory J. W., *The geology of Cyrenaica.* Quart. Journ. Geol. Soc., 67, 1911,.

[4] Prever P. L., *Nummuliti ed Orbitoidi dei dint. di Derna.* Boll. Soc. geol. ital., 33, 2, 1914, pag. 261.

improbabile, che almeno la parte inferiore di questi calcari compatti selciferi della Cirenaica, possa veramente corrispondere ai calcari con selce della parte alta dei « libysche stufe ».

La questione ha interesse anche pratico, poichè, se una speranza ci può essere d'incontrare fosfati, sarà appunto alla base di questo livello, dato che in Tunisia i fosfati sono suessoniani e in Egitto maestrichtiani.

Il livello supposto eonummulitico si estende al piede della scarpata dell'altipiano intorno a Derna, presso Marsa Susa e probabilmente in quasi tutta la zona strettamente litorale; nonchè (Gregory) nella regione a nord-ovest di Merg e di Silene.

Eocene medio. — Sull'esistenza di questo piano in Cirenaica tutti sono concordi. Ritengo che esso cominci con una breccia di trasgressione, che il Gregory avrebbe osservata ad Apollonia, appunto al sommo dei calcari con selce, e a Smuta. Io vi ascrivo un conglomerato compatto con ciottoli neri e cemento roseo, calcareo, di Derna ed un conglomerato con ciottoli di calcare grigio, di Marsa Susa. Nei ciottoli di ambedue ho osservato *N. globulus*: essi sono dunque più recenti del calcare compatto già descritto come eonummulitico, che contiene la stessa specie in giacimento primario.

La formazione dell'Eocene medio è però essenzialmente costituita di calcari teneri bianchi o crema, e corrisponde ai « calcari di Derna » del G. Il Chapman e il Prever vi indicarono una ricca fauna di foraminifere, ma di altri fossili non vi era stata segnalata che * *Thagastea Luciani* (Lor.) e un'ostrica indeterminabile. Io vi ho riscontrato: **Nummulites gizehensis* A e B, **N. discorbinus* A e B, **N. atacicus* A e B, *Ortophragmina Pratti* Mich., *Operculina Pyramidum* Ehr., *O. libyca* Ehr., **Porocidaris Schmideli* (Münst.), **Schizaster Batheri* Fourt., *Chlamys subdiscors* (D'Arch.), *Chl. subtripartita* (D'Arch.), *Lucina thebaica* Zitt., *L. pharaonis* Bell., **L. Cuvieri* Bayan., *L. Blanckenhorni* Oppenh.. **L. mokattamensis* Oppenh., *L.* sp. ind., *Axinus Schweinfurthi* Oppenh., *Pholadomya Puschi* Goldf., *Tellina Zitteli* M.-E., *Delphinula* sp. ind., **Mesalia hofana* M.-E., *Natica* sp., *Ampullina* cfr. *rustica* Desh., *Cerithium* sp., *Rostellaria* sp., *Cassidaria nodosa* Sol., *C.* aff. *praetiosa* Desh., **Cassidea nilotica* Bell., *C.* sp. ind., *Sconsia* sp., *Fusus* cfr. *Malcolmsoni* d'Arch., *F. aegyptiacus* Bell., *Volutilites depauperata* Sow.

Le maggiori affinità di questo piano sono con gli strati bassi del Mokattam, coi quali, oltre alla *facies* litologica identica, esso ha in comune parecchie specie, che ho segnalate con asterisco. Come è noto, questo livello corrisponde a sua volta a quello di S. Giovanni Ilarione, di Kressenberg, La Mortola, La Gourèpe e al *calcaire grossier* del Bacino di Parigi

Giova però notare, che il mio modo d'intendere questo piano in Cirenaica differisce in parte da quello del G. Come Fabiani ed io facemmo notare

altra volta [1], la fauna dei così detti « calcari di Slonta » del G. consta di specie luteziane e di specie oligoceniche, con qualche forma confrontata ma non identificata con forme priaboniane. Un esame minuzioso del modo di associazione di queste forme, quale resulta dal lavoro stesso del G., mi ha ora dimostrato, che le specie di età diversa non si trovano già associate nelle stesse località, ma compaiono in località diverse. Solo il *Pecten arcuatus* (Br.) compare spesso insieme a *N. gizehensis*, a *N. discorbinus*, a *Gisortia gigantea* ecc.

Ora a parer mio la *N. gizehensis* e le specie che sogliono accompagnarla in tutti i giacimenti europei e africani dell'Eocene medio, rimangono anche qui caratteristiche di questo periodo, al quale ascrivo *tutte* le località onde esse provengono; preferisco infatti supporre che il *P. arcuatus*, finora ritenuto priaboniano ed oligocenico, abbia avuto inizio, forse con una sua mutazione ascendente, fin dall'Eocene medio, anzichè ammettere che tutta una fauna di nummuliti e conchiglie luteziane sopravviva in Cirenaica — e in Cirenaica soltanto — fino alla fine dell'Eocene!

Aggiungerò, che personalmente non ho mai riscontrato nei fossili studiati da me associazioni consimili, neppure per quanto riguarda il *P. arcuatus*.

Ciò premesso, questi strati dell'Eocene medio resultano largamente estesi nella Cirenaica litorale e sublitorale, dove formano il grosso delle scarpate dell'altipiano a Derna, a Ras el Hilal, a Marsa Susa, alla necropoli di Cirene, nella zona di Tolmetta specialmente a Sidi Dachil, a Tocra. Essi s'insinuano nelle valli che gli *uidian* scavarono profondamente entro la massa dell'altipiano stesso, e affiorano nelle depressioni o in corrispondenza di ondulazioni tettoniche alla superficie di questo: Uadi Geraib e U. Khumas; Sidi Sebàc, Zauia el Gasserein, Reg. tra Er Règima ed El Abiar, Maraua, Tecnis ecc In condizioni analoghe suppongo trovarsi le località di Bigrata, Merg e Messa, ove le nummuliti luteziane sono citate dal G. insieme al *P. arcuatus* e a qualche specie comparabile, secondo il Newton, a forme priaboniane (*Trachycardium* cfr. *granconense* Opp., *Mactra* cfr. *Fourtani* Cossm., *Euspira* cfr. *possagnensis* Opp.).

Eocene superiore. — Il Priaboniano di Gregory trovasi dunque ad essere scisso in due parti: da un lato le località con nummuliti gigantesche e *P. arcuatus* (?), che per me sono dell'Eocene medio; dall'altra le altre località, le quali, come vedremo, somministrano una fauna schiettamente oligocenica.

Esiste dunque in Cirenaica una lacuna in corrispondenza del Priaboniano? Non mi sembra affatto probabile o verosimile. Le lumachelle con

[1] Fabiani R. e Stefanini G., *Sopra alc. foss. di Derna e sull'età dei calc. di Slonta*. Atti Acc. scient. ven. trent. istr., 6, Padova, 1913.

Tellina Zitteli e *Chl. subdiscors*, che a Derna sormontano i calcari a grosse nummuliti, si avvicinano per la fauna agli strati più elevati del Mokattam, ordinariamente ascritti all'Auversiano o al Priaboniano. Nè è del tutto escluso, che i calcari candidi, teneri, a nullipore, con *Chlamys cyrenaica* e piccole nummuliti striate, che attribuisco alla base dell'Oligocene, possano invece corrispondere alla sommità dell'Eocene; ma i dati di cui posso disporre non mi consentono di risolvere questi problemi.

PERSONALE ACCADEMICO

Commemorazione del Corrisp. prof. P. A. SACCARDO, letta dal Socio O. MATTIROLO nella seduta del 6 febbraio 1921.

(1) *Signore, Illustri Consoci,*

Con sentimento di gratitudine vivissima ringrazio la Presidenza della nostra Accademia perchè volle accordarmi l'incarico di ricordare oggi, nella ricorrenza del 1° anniversario della sua morte, le benemerenze scientifiche di PIETRO ANDREA SACCARDO. concedendomi l'onore di rievocare davanti a voi, Illustri consoci, la nobilissima figura del micologo sommo, scomparso quando molto avrebbe potuto ancora operare per assolvere la missiome che natura pareva gli avesse affidato, come al più perfetto conoscitore delle forme fungine.

Altri, con maggiore competenza, potrà trattare della complessa opera scientifica di P. A. Saccardo; ma nessuno, forse, potrà dire di lui con più sincero sentimento di amicizia e di ammirazione.

Le mie parole vogliono essere l'espressione del desiderio intensissimo che mi è rimasto di lui; la testimonianza del dolore che mi ha afflitto per la sua morte; l'omaggio riverente alla sua memoria.

La vita di Saccardo assurge all'altezza di un nobile esempio; essa ci dimostra quanto può valere, quanto può conchiudere l'assiduità al lavoro, la costanza nei propositi, l'amore alla scienza, associati alla potenza dell'ingegno.

Tale esempio, che è soprattutto esempio di fede, io sono lieto di rievocare, augurandomi che lo seguano i giovani, e lo fecondino, imparando che la vita non è godimento, ma lavoro, e che l'uomo vale quanto produce. Dire di lui e dell'opera sua non è solo un dovere, ma è un conforto nei tristissimi momenti che attraversiamo.

(1) Alla Commemorazione assistevano il figlio e la famiglia del compianto Professore P. A. Saccardo.

***

Come un Santo delle cronache religiose, P. A. Saccardo seguì la « *vocazione* ». Per un caso che egli stesso soleva narrare, e che farebbe pensare alla influenza del destino, al Kismet degli orientali, che ineluttabilmente regolerebbe il corso della vita umana, egli, giovanissimo, divenne naturalista e si mise per la via della Botanica descrittiva, seguendo un sistema di vedute del quale mantenne inalterato l'orientamento nel lungo corso della sua vita scientifica.

La « *vocazione* » di studiare sistematicamente le piante, diceva egli, gli apparve davanti agli occhi della mente, di colpo, quando, appena varcate undici primavere, in un giorno del 1857, ebbe ad osservare presso lo zio Alessandro, apprezzato storico veneto, i cartellini, che in un suo frutteto portavano scritti in latino i nomi delle piante ivi coltivate. Questa semplicissima visione doveva suscitare in lui il desiderio ardente di dare i nomi latini alle piante che egli andava via via raccogliendo; e questa fu la causa determinante, perchè egli si volgesse anima e corpo alla sistematica, provando un bisogno irresistibile di ordinare, di « casellare », di dare posizione conveniente ad ogni cosa; egli è così che Saccardo divenne sacerdote dell'Ordine, convinto come egli era, che *ordo est anima rerum* e che senza ordine non vi è bellezza.

L'ordine col quale egli attendeva alle sue ricerche seguiva regole fisse e costanti.

La sua vita, appena dopo il periodo della gioventù, fu sempre uguale; e, come quella dei certosini, obbediente ad una « *Regola* »; dalla quale mai, tranne in casi eccezionalissimi, si dipartiva, tanto che io mi ero indotto a chiamarlo scherzevolmente il *Padre generale dei Miceti Osservanti*, nome che, rimasto gradito al mio diletto amico, usò egli poi sempre nella corrispondenza nostra.

Sensibilissimo alle vicissitudini atmosferiche, quando i primi freddi autunnali preludiavano ai rigori dell'inverno, egli più non abbandonava l'ambiente del Laboratorio e in esso, dirò così, si « *incistidava* » per tutta quanta la durata dell'inverno; e però egli stesso soleva paragonarsi ad una *Orchidea* di serra calda.

In questo genere di vita laboriosissima e metodicamente ordinata è il segreto della stupefacente produttività del Saccardo.

Ordine e metodo, erano parte integrante del suo essere, erano le direttive dei suoi lavori, che rispecchiano tutti queste particolari attitudini.

Appena sedicenne, nel maggio del 1861 P. A. Saccardo iniziò la serie delle sue pubblicazioni.

Gli Atti dell'I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ad Arti (1) accolsero la sua prima Memoria, dal titolo:

(1) Atti dell'I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, nov. 1860, ottobre 1861, Venezia, tom. VI, serie III, pp. 237, 341, 490.

Calalogo indicante le specie e varietà degti Entomostracei contenuti nei vaselli, con brevi osservazioni sul colorito, sulle dimensioni, sui movimenti e in fine sulle località in cui furono ritrovati i medesimi.

Memoria di poche pagine, ma frutto di pazienti ricerche, le quali, iniziate nell'anno 1860, dovevano essere il preludio di quella ininterrotta, febbrile attività che durò in lui per tutta la vita.

Ma prima ancora di questo lavoro, aveva Gian Domenico Nardo, l'insigne medico e naturalista veneto, già presentato allo stesso illustre consesso, nel nome di un *giovane naturalista di belle speranze,* alcuni: *Cenni illustranti cinque specie di invertebrati.*

E che il Nardo avesse allora giustamente intuite le « *speranze* » che si dovevano riporre nella attività del Saccardo, lo seppe egli luminosamente dimostrare in seguito, perchè le pubblicazioni sue, iniziate, come si è detto nell'anno 1861, non sostarono che un anno solo, come si rileva da una Nota scritta il 9 febbraio 1917, comunicatami dal figlio, e che io trascrivo:

« *Nel 1862 nulla pubblicai*; *ma dal 1863, in cui cominciò a pubblicarsi il mio*: « *Prospetto della Flora Trevigiana* » *al 1917 (54 anni), fatto ora il controllo, non risulta passato un anno senza la pubblicazione di qualche lavoro; del che ringrazio la Provvidenza della salute accordatami !* ».

Quando si pensi che dal 1861 il Saccardo non rubò più un'ora sola al lavoro; quando si consideri la mole della sua opera maggiore, la *Sylloge fungorum omnium hucusque cognitorum,* durata già lo spazio di trent'un anno, comprendente 22 volumi di complessive 23451 pagine (e due volumi ancora inediti); quando, infine, si faccia anche un censimento, sia pure sommario, delle sue pubblicazioni, che raggiungono, in numero, parecchie centinaia, di cui una sola è ricca di più che 1500 figure colorate, disegnate dallo stesso Autore, si rimane sbalorditi di fronte a tanta somma di lavoro, e la mente ricorre alla favolosa produttività aldrovandiana; alla leggendaria attività enciclopedica dell'Ermete Trismegisto! e nello stesso tempo alla ininterrotta produttività degli alluminatori medioevali, coi lavori dei quali anche il lavoro saccardiano ha molti punti di contatto.

A Venezia, studente nel Seminario Patriarcale, tra il 1855 e il 1861 pose il Saccardo le basi di quella meravigliosa biblioteca micologica (che sarà presto lustro e decoro dell'Istituto botanico di Padova); e che per la quantità di Memorie e di opuscoli pubblicati in ogni parte del globo, può ritenersi unica al mondo [1].

[1] La biblioteca micologica saccardiana risulta di 210 grossi volumi di miscellanee, contenenti circa 4500 opuscoli e volumi; 600 circa sono le opere di micologia, tra le quali tutte le più importanti opere iconografiche. I più interessanti giornali micologici vi esistono in serie complete; l'erbario micologico in un centinaio di pacchi, di grossa mole, rinserra dai 70 agli 80000 esemplari di miceti!

Quante volte ne ricordava Egli le umili origini! compiacendosi di ritornare col pensiero ai tempi nei quali Egli, giovanissimo, a prezzo delle lucenti *zwanzighe* che i genitori parcamente gli largivano per i suoi minuti piaceri, gioiva dei primi sudati acquisti sui banchetti ambulanti dei campielli veneziani!

La biblioteca non tardò però presto a crescere con ritmo accelerato, per omaggi e per acquisti, dei quali fu largo il Saccardo; curata, ordinata in ogni particolare, essa fu l'istrumento perfetto che gli rese possibile di raggiungere la ricchezza documentaria per la quale è meritatamente da tutti ammirata ed apprezzata la *Sylloge*; l'opera colossale che compendia ed illustra le aspirazioni, gli ideali, e i metodi di studio del micologo insigne.

La *Sylloge* è l'opera massima del Saccardo, monumento grandioso che, *da solo*, sarebbe stato sufficiente ad immortalarne il nome, ancorachè Egli non avesse prodotto gli altri 300 suoi lavori!

Il piano dell'opera è imponente, così che si stenta quasi a concepire come un uomo solo (sia pure colla collaborazione di alcuni allievi), abbia potuto portare a termine una massa così grande di lavoro in un periodo relativamente breve di tempo (31 anni), come quello che corre dal 1882, anno di pubblicazione del primo volume, all'anno 1913, nel quale comparve l'ultimo volume, il 22°, che sarà seguito da due altri volumi già da lui condotti a termine, ma fatalmente rimasti inediti.

Io certo non esagero ritenendo che forse nessun altro micologo avrà ancora l'ardire, la costanza, la conoscenza morfologica, la coltura bibliografica, la ferrea memoria, l'ingegno, le facoltà di ordine, delle quali die' prova il Saccardo, per descrivere, elencare, classificare tutti i funghi, *omnes hucusque cogniti*, in numero di 72,000 circa, che i micologi di tutto il mondo, e lui per primo, avevano fatto conoscere sino a questi ultimissimi anni!

Dell'opera principale del Saccardo dirò quindi prima di accennare, sia pure di volo, alle altre sue, perchè l'influenza che esercitò, e che eserciterà, per chi sa quanti anni ancora la *Sylloge*, è tale da aver accordato a Saccardo il primato fra i micologi descrittori.

Tentare una analisi particolareggiata della *Sylloge* è cosa al certo impossibile. L'immenso campo delle descrizioni non concede d'altronde adito a discussioni, ma induce ammirazione per chi ha saputo raccogliere e presentare il gran tutto; onde io mi limiterò ad esaminare il piano che regola l'opera, ancorchè io non possa accettare, senza discutere, le vedute del Maestro.

L'interesse scientifico della *Sylloge* e delle Opere che la commentano e la completano deve ricercarsi nel sistema tassonomico adottato; e la *Sylloge* non sarebbe ciò che è, se il materiale di cui si compone, non fosse stato disciplinato e regolato da fili conduttori che il Saccardo ha saputo mirabilmente ordire.

L'idea fondamentale della classificazione adottata dal Saccardo, deriva dalle concezioni esposte (fino dal 1841 e 44) da Giuseppe De Notaris [1]: *doversi nella distinzione dei generi e delle specie delle Sferiacee, attribuire il primo valore ai caratteri che si possono trarre dalla forma e struttura dei loro sporidii.*

Saccardo cresciuto nelle idee e nei metodi di ricerca di De Notaris e di Vincenzo Cesati, pur non essendo mai stato loro allievo, estese le loro vedute, dapprima nel: « *Conspectus Generum Pyrenomycetum italicorum* », edito nell'anno 1875; quindi nei: « *Genera Pyrenomycetum Schematice delineata* », apparsi a Padova nel 1883, un anno dopo la pubblicazione del primo volume della *Sylloge*; e infine nei: « *Prevedibili funghi futuri* », che videro la luce nel 1896.

Senza discutere, nei particolari, il valore del così detto *Sistema sporologico*; ammettendone la praticità; io credo che il Saccardo dovette soverchiamente generalizzare per forzare in certo modo i Miceti ad acconciarsi nei « *casellarii* » che egli aveva loro preparati in base alla forma, alla settazione, al colore delle spore.

Tale sistema, se ha egregiamente servito per dare ordine al materiale di cui si compone la *Sylloge*; se ha giovato e giova praticamente a tutti quelli che della *Sylloge* si servono « per determinare », non rispecchia, secondo il mio parere, il concetto scientifico e filosofico sul quale devono basarsi le classificazioni naturali; le quali devono tendere a stabilire « *seriazioni* » *veramente naturali* delle varie forme; fondare unità tassonomiche omogenee; di uguale valore, di uguale dignità, le quali in ultima analisi, inducano a ritenere le singole specie che le compongono, come discendenti da un solo capo stipite.

Egli è per tale ordinamento troppo esclusivamente sporologico, che la *Sylloge*, se conserverà immutato nel tempo il carattere di indiscutibile utilità pratica, non potrà essere in avvenire ugualmente fattrice di progresso reale, se la consideriamo dal punto di vista al quale tendono le speculazioni della scienza moderna, fondate, più che sulla forma di un solo stadio per quanto elevato, come è quello della riproduzione, sulla intima conoscenza dell'intero ciclo di sviluppo di ogni singola specie, e sulle relazioni che ogni specie contrae colle sue vicine, durante i periodi di sviluppo e di accrescimento.

L'opera maggiore di Saccardo è quindi essenzialmente opera di statistica o, dirò meglio, di « statica », delle forme; base indispensabile a qua-

[1] V. De Notaris, *Osservazioni su alcuni generi e specie della Tribù dei Pirenomiceti Sferiacei.* Firenze, 1845; V. De Notaris e Cesati, *Schema di classificazione degli Sferiacei italici aschigeri,* Commentarî alla Società Crittogamica. Genova, 1863, pag. 177.

lunque ulteriore studio di micologia; ed è in questo senso ammirabile e prodigiosa, così che nessuno raggiungerà l'altezza alla quale egli è assurto, presentando il censimento completo delle forme rivelatesi ai micologi di tutto il mondo, sino al momento in cui egli pubblicava l'opera sua.

Per ciò che si riferisce alla conoscenza delle forme dei funghi, il Saccardo non ebbe chi lo superasse, e lo dimostrò colla *Sylloge*, nè credo che alcuno potrà superarlo.

Tanta era in lui innata la conoscenza delle forme dei funghi, tale l'intuito delle affinità e delle analogie che regolano la loro correlazione nel tempo e nello spazio, che egli, non solo, giunse a descrivere un numero colossale di miceti; ma riuscì a « *divinare* » molti di quelli che ancora non si erano rivelati agli osservatori!

« *Con elementi relativamente scarsi la natura produce complessi morfologici svariatissimi. È la teoria matematica delle combinazioni che viene posta in atto* ». Queste parole scrisse Saccardo nel curioso lavoro: *I prevedibili funghi futuri secondo la legge d'analogia* (1896), nel quale, meglio che nella *Sylloge*, espone il concetto e gli scopi della sua classificazione, illustrandoli con quadri e con numeri; ed Egli, secondo me, avrebbe avuto ragione se invece di esseri organici sottoposti alle più svariate influenze, avesse dovuto trattare con esseri inorganici obbedienti a leggi fisse e costanti; e se infine fosse vero e generale l'asserto suo che: « *nei funghi, meglio che in molti altri gruppi di organismi, osserviamo delle serie nettamente parallele di « Tipi » generici, nei quali, pur mantenendosi quasi uniformi i caratteri dei ricettacoli e dei micelii, variano in modo quasi determinato le spore, per forma, settazione e colore.*

Checchè si sia voluto ritenere ([1]), la classificazione di Saccardo nulla ha da vedere con le concezioni del Mendeleiew; perchè la Legge periodica degli elementi chimici dell'illustre scienziato siberiano, è basata su rapporti fissi e costanti, derivati dalla grandezza dei pesi atomici; Egli ha lavorato sui numeri e non sulle idee, nè sulle fallaci parvenze di semplici analogie di forma, di cui le modalità di sviluppo ci sono ignote ancora.

L'idea della legge di analogia è sbocciata nella mente del Saccardo, secondo il mio modo di vedere, non come conseguenza di ragionamenti matematici, ma come sorgono le idee nei cervelli dei compositori di musica, dei poeti, dei pittori, che compongono, scrivono, dipingono, animati da un sentimento che essi stessi non possono definire; ma che li sospinge a creare melodie nuove, a raggiungere effetti di luce e di colore non prima sognati, ad evocare col ritmo delle parole o della musica, sensazioni che agitano il cuore.

([1]) V. A. N. Berlese, *La classificazione dei Pirenomiceti e il Saggio « sui prevedibili funghi futuri »* del prof. P. A. Saccardo. Rivista di Patalogia vegetale, vol. V, 1896, pag. 361.

Saccardo, che sentiva nell'anima l'arcana potenza armonica che regola le forme in natura, intuì che relazioni di analogia esistono fra le varie forme degli esseri organici; presiedono al loro sviluppo, variando in relazione ai mezzi in cui vivono e alle influenze alle quali sono sottoposti; ma invece di studiare l'essenza e la ragione intima di tale legge sovrana, si lasciò forse troppo sedurre dalla semplicità di un sistema tassonomico, che soddisfacendo le sue aspirazioni di morfologo « *principe* », gli concedeva nello stesso tempo il mezzo di ordinare il materiale che Egli doveva classificare.

Saccardo ha ridotto a 10 i tipi principali delle spore, stabilendo, per la massima parte delle Famiglie naturali dei Miceti, le 10 sezioni seguenti:

1) *Allantospore.* Spore allantoidee, cilindraceo-curve.
2) *Ialospore.* » globose, ovoidee od oblunghe, continue, ialine.
3) *Feospore.* » » » » » » brune.
4) *Jalodidime.* » » » » » 1 settate, ialine.
5) *Feodidime.* » » » » » » brune.
6) *Jalofragmie.* » oblunghe 2 plurisettate ialine.
7) *Feofragmie.* » » » » brune.
8) *Jalodictiee.* » ovoidee od oblunghe, clatrate ialine.
9) *Feodictiee.* » » » » » brune.
10) *Scolecospore,* » filiformi o vermiculate, subialine.

A queste sezioni sporologiche principali aggiunse ancora le due seguenti assai rare, cioè:

Elicospore, a spore cilindriche avvolte a spira.
Staurospore, » raggiato-stellate.

Disponendo con questi criterii il gruppo dei Pirenomiceti (che Egli così intimamente conosceva) nelle 10 sezioni sporologiche parallele, controdistinse con numeri progressivi le « *caselle* » delle quali non erano ancora noti i rappresentanti, ottenne così un totale di n. 1680 « caselle ».

Ora, di queste, n. 450, sono occupate da Generi già noti, e n. 1230 il Saccardo lasciò preparate per accogliere i Generi, che, secondo il suo modo di vedere, si dovranno scoprire, ammettendo Egli che là ove, ad esempio, esistono Generi occupanti le caselle estreme delle serie sporologiche, debbano, necessariamente esistere anche i Generi intermedi, se non scoperti ancora, esistiti ed ora scomparsi.

Ed è strano che i fatti, in molti casi, abbiano dato ragione a queste vedute; perchè molti sono i Generi da lui previsti, che già andarono a riempire le « caselle » che il « *divinatore* » aveva preventivamente loro preparate fra i Generi parallelamente affini preesistenti nelle altre serie.

Il sistema « *lineare* » imperniato sopra il solo carattere delle spore, se pare adattarsi alla classificazione dei Pirenomiceti, meglio di qualsiasi altro,

non è ugualmente adatto per i Gasteromiceti, per gli Imenomiceti ecc. per tutti i Funghi insomma nei quali le spore dimostrano una desolante uniformità di conformazione.

* * *

Non è cosa possibile (dati i limiti imposti dalle necessità del momento) ricordare le altre innumerevoli Memorie di argomento micologico pubblicate dal Saccardo.

La enumerazione delle contribuzioni micologiche, troverà il lettore nella completa bibliografia, cronologicamente ordinata dal suo diletto figlio dottor Domenico, la quale sarà pubblicata nel « Nuovo Giornale Botanico », come omaggio di figliale devozione.

Essa, meglio di ogni commento, lumeggia la versatilità dell'ingegno, e l'attività prodigiosa dell'eminente micologo italiano, il cui nome, a buon diritto, figurerà nella storia della nostra Scienza fulgido di quella gloria e di quella luce che illumina i grandi nomi di Persoon, di Elia Fries.

L'opera del Saccardo interessa la micologia di tutto il mondo, perchè a lui da ogni parte affluivano le collezioni di miceti per lo studio; ed è così che, fra le parecchie decine di migliaia di funghi da lui determinati, oltre che dell'Italia, figurano funghi di: Abissinia - Africa occid. - Alaska - Algeria - Antille - Australia - Austria - Belgio - Boemia - Brasile - Canadà - Caroline (Isole) - Congo - Dakota - Dalmazia - Eritrea - Filippine (Isole) - Francia - Germania - Giappone - Giava - Guinea - India - Libia - Malacca - Malta - Messico - Moravia - Portogallo - Rodi - Siberia - Singapore - Spagna - Stati Uniti - Tahiti, - Uruguay ecc. ecc.

Argomenti di Micologia, determinazioni di Funghi ecc. interessano il giornale la « *Michelia* » da lui fondato (1877-1882). Gli *Imenomiceti italiani* sono lo scopo delle 1400 pagine del volume « *Hymeniales* » (1915-1916) che è parte precipua della *Flora Italica Cryptogama.*

I « *Funghi italici autographice delineati* » (1877-1886) presentano la illustrazione di 1500 funghi italiani, la maggior parte dei quali egli pubblicò nelle classiche *Centurie* della *Mycotheca veneta.* Per dare un'idea dell'attività saccardiana, sia pure soltanto nel campo della Micologia veneta, io ricordo che: se erano 245 i funghi noti per la regione veneta, secondo il censimento del barone De Hohenbuehl Heufleur, elencati nella *Enumeratio Crypt. Italiae Venetae*, edita nel 1871 (prima cioè dei lavori di Saccardo), 4600 divennero quelli da lui enumerati e studiati nella stessa regione; mentre di essi 3000 furono raccolti nella sola provincia di Treviso. Cifre eloquenti che lumeggiano l'importanza dell'opera sistematica compiuta, che pone il Veneto fra le regioni meglio note della Penisola dal punto di vista micologico. E per finire, noterò ancora che molte iniziative che onorano la micologia italiana furono da lui patrocinate e sussidiate dalla sua collabo-

razione: così la « *Mycotheca italica* » del suo figlio Domenico; i « *Funghi Javanici* » illustrati e descritti in collaborazione con Otto Penzig; il *Catalogo dei funghi italiani* compilato col Berlese; la *Bibliografia della Micologia italiana* con Pirotta e con Penzig.

***

Ma non a questo solo campo di studi applicò il Saccardo le doti speciali del suo ingegno organizzatore, la straordinaria sua cultura bibliografica, sussidiata dalle innate facoltà di ordine; chè egli ci lasciò pure un numero grande di lavori che si riferiscono alla storia della Botanica in Italia e a quella degli antichi erbari nostri, riuscendo a riassumere, ordinare, elencare, in mirabile modo, la immensa varietà dei lavori dei botanici che lo precedettero. Così la sua *Botanica in Italia* e la sua *Cronologia della Flora italiana* e tanti altri lavori suoi, sono repertorii, miniere di nozioni, di dati, e di date che formano e formeranno, chi sa per quanti anni ancora, il *substratum* degli studii che si riferiscono alla Storia della nostra scienza.

Il Saccardo innamoratosi di questo mirabile campo di studii, ebbe il merito di contemplarvi non solo l'opera dei grandi ingegni ma, con cura meticolosa, seppe rievocare anche i più umili che dimostrarono vere competenze scientifiche e contribuirono al progresso della botanica nostra. Il suo *Primato degli italiani nella botanica*, e tanti altri lavori suoi, sono, nel loro complesso, un inno vibrante di ardore patriottico che attrae e soddisfa; e che dovrebbe essere meditato da quanti purtroppo non apprezzano che ciò che viene d'oltralpe, malvezzo che ha pure cooperato alle tristezze del momento presente, alla svalutazione della più gloriosa vittoria che la Storia registri, interamente dovuta alla virtù, alla energia miracolosa del popolo nostro.

Con questi studii Saccardo ha bene meritato della Patria, perchè essi, sia pure nel campo limitato della botanica; hanno dimostrata l'importanza e il valore del pensiero italico nella evoluzione scientifica.

A quest'opera di rievocazione si connette una istituzione saccardiana che riveste un fascino tutto speciale; la *Iconotheca Botanicorum* che è oggi decoro dell'Orto botanico di Padova.

La collezione, forse unica al mondo, che comprende più di 1200 ritratti (incisioni, disegni; quadri, fotografie ecc.), fra i quali più di 600 rappresentano botanici italiani di tutti i tempi; messa insieme con indefessa costanza di propositi, ordinata cronologicamente, fatta conoscere per mezzo di elenchi speciali, rispecchia l'ammirazione, il culto del Nostro per la scienza e per i suoi ministri.

La *Cronologia della Flora italiana* è forse, a mio giudizio, l'opera che, dopo la « *Sylloge* », meglio dimostra le tendenze dell'ingegno, i metodi, le facoltà di ordine, la ferrea memoria, la pazienza certosina e la mirabile

costanza del compianto scienziato. Anche in questo caso, come per la « *Sylloge* », l'impresa avrebbe spaventato chiunque e richiesti anni ed anni di lavoro. Saccardo invece ha saputo, in poco più di due anni, condurla a termine! Le sue pazienti ricerche ci rivelano le prime date, i primi Autori della scoperta e della constatazione delle 3676 specie di piante, che formano il complesso della Flora italiana, comprendendovi non solo le piante indigene, ma anche le naturalizzate e le avventizie. Questo lavoro utilissimo che appare degno complemento dei suoi studii storici sui botanici italiani, egli licenziò nell'anno 1908, modestamente battezzandolo come: *un saggio, un tentativo da essere emendato ed accresciuto*; ma chi lo studia, rimane colpito dalla somma di dati, severamente controllati alle fonti più pure, che il Saccardo ha saputo scoprire, mettere insieme, comporre in un tutto utile e pratico.

Anche da questo, come già dagli altri suoi studii di Storia della scienza, emana l'ideale generoso che ha guidato l'Autore, assillato dal desiderio di rievocare, in ogni campo della botanica, i meriti degli italiani e segnatamente di quelli che andarono via via accrescendo il patrimonio floristico nostro, dal periodo romano, sù sù fino all'epoca presente. Nessuna nazione possiede un tale tesoro, perchè gli analoghi tentativi di Dierbach per la Germania, e di Clarke per l'Inghilterra, quantunque per molti riguardi importantissimi, non presentano la sintesi completa dell'argomento, che invece ha saputo darci il Saccardo.

* * *

Nè il Saccardò limitò la sua produzione scientifica ai soli argomenti di Micologia, e di Storia della botanica, chè, oltre alla traduzione delle opere botaniche di Darwin, si occupò delle *Pteridofite*, e dei *Muschi* delle Provincie venete; scrisse sopra argomenti di Fisiologia, di Anatomia, di Istologia; trattò con competenza somma la sistematica delle piante superiori, erborizzando indefessamente, raccogliendo quantità di materiali per comporre quelle « *Exiccatae* » che attestano la sua splendida attività di botanico peripatetico, durata purtroppo nel solo periodo della giovinezza, prima cioè che egli si chiudesse nel laboratorio, per dedicarsi allo studio, sia dei materiali da lui raccolti, sia di quelli che d'ogni parte del mondo affluivano a lui, perchè fossero da lui studiati e classificati.

Tra i lavori più utili, oltre a quello sui « *funghi mangerecci più comuni del veneto* », condotto colla collaborazione del D'Ancona, illustrato da tavole colorate, non tralascierò certo di far menzione di un opuscolo, al quale ogni naturalista ad ogni momento ricorre. La « *Chromotaxia* », seu « *Nomenclator colorum polyglottum* », ha colmato una lacuna che tanti Autori avevano invano tentato di colmare. Guidato dal suo finissimo senso pratico, abituato da una lunga consuetudine fitografica, riconobbe la necessità di dare in poche pagine un codice breve, succoso, pratico, destinato a regolare la nomenclatura dei colori, accompagnandola con tavole, le quali

illustrano con l'esempio i varii tipi di colorazioni. L'opera ebbe l'accoglienza che si meritava; tanto che in breve ne furono tre edizioni esaurite.

Ma prima di porre termine alla affrettata rievocazione dell'opera del compianto amico, io mi voglio ancora compiacere di segnalare la sua *Flora Tarvisina Renovata* pubblicata sul finire della guerra, ossia *Enumerazione critica delle piante vascolari finora note nella provincia di Treviso*, « come quella che gli ricordava tante miserie ma anche tanti eroismi! », illustrando essa le gloriose regioni dal Grappa, del Montello, di Vittorio Veneto.

In questo suo lavoro, l'illustre Autore si compiace di far rivivere i tempi della sua feconda attività giovanile, quando, incoraggiato dai tre insigni naturalisti veneti, Nardo, Zanardini, De Visiani (che fu suo maestro), indefessamente andava erborizzando nei luoghi i cui nomi oggi sintetizzano le più fulgide glorie d'Italia.

L'antica prima edizione, ossia il *Prospetto della Flora trevigiana*, fu la causa decisiva, perchè, sono sue parole « *la Botanica divenisse il suo studio prediletto e professionale* ».

Tredicenne appena iniziava il *Prospetto*, e lo conduceva a termine nell'anno 1863, ottenendo di pubblicarlo negli « *Atti dell' Istituto Veneto* », quando egli era entrato nel diciottesimo anno dell'età sua!

I risultati delle successive conquiste botaniche in quella regione che gli fu culla e che egli con orgoglio di italiano seguì palpitante nelle tristi e nelle liete vicende, culminate poi nella riscossa di Vittorio Veneto, si possono qui riassumere con due soli numeri: mentre 1387 erano le piante elencate nel prospetto del 1863; 1717 sono invece quelle raccolte nella *Flora Tarvisina Renovata* del 1917.

* * *

La vita di Pier Andrea Saccardo, non fu notevole nè per straordinari eventi, nè varia per vicende; essa trascorse quieta, serena, regolata, non scevra purtroppo da eventi tristi; ma conforme agli scopi che egli si era preposti dedicando ogni sua attività alla famiglia e al lavoro.

Visse per la famiglia, per il suo Orto, per il Laboratorio, fra le raccolte e i libri. Non uscì mai dalla cerchia segnata dalle Alpi e dal mare; pago di spaziare (specialmente negli anni giovanili) fra le bellezze affascinanti del paesaggio veneto, fra i monti, fra i piani e le lagune che lor fanno corona.

Per la Patria sentì ardore di passione, e per la sua regione nativa ebbe palpiti di amore e di fede. Italiano di mente, di cuore e di propositi, si conservò veneto negli affetti e nel culto per le gloriose memorie del passato che egli da pari suo illustrò e difese.

* * *

Pier Andrea Saccardo che, dopo Caporetto, vide la sua diletta Vittorio calpestata, rovinata dalle orde barbariche; che pianse amaramente, non di

sgomento per la perdita di ogni avere, ma per la rovina temuta dei suoi ideali, ebbe il supremo ineffabile conforto di assistere al trionfo e alla liberazione dei fratelli da tanto tempo schiavi dello straniero.

Nel suo ritiro di Avellino, presso il genero prof. Trotter, gli giunse la notizia degli eventi gloriosi; esultante di entusiasmo potè quindi far ritorno con animo sereno alla sua Padova (così duramente provata durante la guerra), dove lo aveva colpito una irreparabile sciagura, la perdita della sua adorata e fedele Compagna. Egli allora si racccolse in sè stesso e, con rinnovato ardore, tutto si consacrò al lavoro, nel quale cercò conforto e oblio. Intensificò ancora la sua già eccezionale attività scientifica, serenamente spegnendosi il 12 febbraio ora scorso fra le collezioni, fra i libri, che erano stati lo scopo della sua esistenza, il sospiro della sua anima.

Scienziato di Laboratorio non fu egli solamente; ma come insegnante valoroso ed efficace fu lustro e decoro dell'antichissima gloriosa Cattedra di Botanica dell'Ateneo Padovano. Dalla sua Scuola uscì tutta una schiera di valorosissimi sistematici, che oggi degnamente onorano il Maestro e la scienza e ne seguono l'esempio e le tradizioni.

Carlo Spegazzini, Otto Penzig, Giacomo Bizzozero, Piero Voglino, Augusto Napoleone Berlese, G. B. De Toni, Francesco Saccardo, Alessandro Trotter, Adriano Fiori, C. B. Traverso, Giulio Paoletti, Augusto Béguinot, Migliardi, Peyronel, Domenico Saccardo, alcuni dei quali collaborarono alla « *Sylloge* », sono personalità scientifiche note, nel campo specialmente della sistematica, sono i riflessi luminosi dell'efficacia e dei meriti del Maestro.

Per tutta la vita il Saccardo, che seguiva l'ideale prefissosi da giovanetto, non conobbe nemici; modesto, timido, semplice, austero, dotato di memoria prodigiosa, esimio conoscitore della lingua latina e delle lingue moderne, dimostrò, come anche disponendo di mezzi esigui (come sono quelli concessi dalle magre dotazioni dei nostri Istituti) possa un uomo, dotato di ingegno, sorretto dalla volontà e dalla tenacia di lavoro, vincere gli ostacoli e conquistare nel mondo fama e gloria; imperocchè la fama e le gloria di P. A. Saccardo più ancora che nella Patria sua, sono celebrate ovunque la scienza ha rispetto e onore.

L'Accademia nostra che lo ebbe Socio Corrispondente fino dal 1904, e che l'avrebbe così volentieri avuto Socio Nazionale, ove le fosse stato concesso dal numero dei posti; che si onorò di decretargli, con G. B. Grassi, il Premio Reale nell'anno 1888, ne piange oggi dolorosamente la perdita associandosi riverente al dolore della famiglia.

I suffragi, i premi, gli onori che le più insigni Accademie del mondo decretarono a Pietro Andrea Saccardo, additano la sua nobile figura alla riconoscenza nostra; la sua è pura e nobile gloria d'Italia!

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CASTELNUOVO presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste l'edizione, curata ed accresciuta di un'appendice dal Socio SILVESTRI, dell'opera postuma di G. LEONARDI: *Monografia delle Cocciniglie italiane*. Richiama anche l'attenzione dei Colleghi su di una Commemorazione del defunto accademico P. BACCARINI, dettata dal Socio PIROTTA; e su alcuni lavori del Corrispondente LONGO e del Socio straniero H. S. WASHINGTON.

Il PRESIDENTE presenta il volume III del *Cours de Physique mathématique de la Faculté des sciences* del Socio straniero J. BOUSSINESQ; della importanza di questa opera dà conto alla Classe, rilevando la genialità e la larghezza delle questioni che nel volume vengono trattate.

Il prof. MAGRINI, come direttore dell'Ufficio Idrografico del R. Magistrato alle acque di Venezia presenta, anche a nome del Presidente, il R. Magistrato RAIMONDO RAVÀ, il primo volume degli « Antichi scrittori d'idraulica veneta », pubblicazione edita dall'Ufficio Idrografico. È nota la sapienza degli antichi idraulici veneti, che seppe salvare Venezia dall'azione nemica del mare e dei fiumi. Il primo volume contiene le scritture sulla laguna di Marco Cornaro che fu il precursore del celebre Sabbadino; esso fu curato e commentato dal prof. PAVANELLO. Furono anche riprodotte alcune carte antiche, preposte per l'interpretazione dell'antica idrografia veneta.

COMUNICAZIONI VARIE

Il PRESIDENTE presenta un piego suggellato inviato dal dott. UGO PESTALOZZA, perchè venga conservato negli Archivi dell'Accademia.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 febbraio 1921.

BERLESE A. — Nuove specie del gen. *Erythraeus* (Estr. dal « Redia », vol. XII). Firenze, 1920. 8°, pp. 1-2.

FIGARI F. — Come deve ritenersi cimentato un solido teso o compresso in considerazione dei piani di scorrimento della materia (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », anno LVIII). Roma, 1920. 8°, pp. 1-25.

GATTO M. — Notizie sul bacino solfifero delle miniere Trabia-Tallarita e regime delle acque sotterranee (Estr. dalla « Rivista del servizio minerario », 1918). Roma, 1920. 8°, pp. 1-19.

JUNGERSEN H. — Mindeskrift i Anledning af Hundredaaret for Japetus Steenstrups Fodsel (voll. I, II) Kobenhaun, 1914. 8°.

LANZA M. — La flora della valle di Valprato. Torino. 1920. 8°, pp. 1-64.

LOCKYER N. — Obituary Notice (Repr. from « Nature »). London, 1920. 12°, pp. 1-59.

LOCKYER W. J. S. — Spectroscopic and Magnitude Observations of nova Cygni III, 1920 (Plate I) (Repr. from the « Monthly notices of the Royal Astronomical Society », vol. LXXXI, pp. 37-50). Edinburgh, 1920. 8°,

LOCKYER W. J. S. — The Hill Observatory, Salcombe Regis (Repr. from the « Transactions of the Devonshire Association for the Advancement of Science, Literature, and Art », 1920). Edinburgh, 1920. 8°, pp. 1-4.

PEYRONEL B. — Svernamento di Marsonia Juglandis sui rami e polloni del noce (Estr. dalle « Stazioni sperimentali agrarie italiane », volume LIII, pp. 168-171). Modena, 1920. 8°.

PEYRONEL B. M. — Un Hyphomycète singulier: *Eriomenella tortuosa* (Corda) (Extr. du « Bulletin de la Société mycologique de France », tome XXXV). Paris, 1920. 8°, pp. 1-18.

PAOLI G. — Considerazioni sui rapporti biologici fra le cavallette e i loro parassiti oofagi (Estr. dalla « Rivista di Biologia », vol. II). Roma, 1920. 8°, pp. 1-13.

PAOLI G. — La lotta contro le cavallette in Capitanata nel 1917-18 (Estr. dal « Bollettino dei Ministeri per l'agricoltura, industria, commercio e lavoro », vol. II). Firenze, 1919. 8° pp. 1-11.

REYNAUD P. — Étude sur le système solaire. Paris, 1919, 8°, pp. I-XIV 1-81.

SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza dei parassiti delle ova del Grilletto canterino (*Oecanthus pellucens* Scop., *Orthoptera. Achetidae*) (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XIV, pp. 220-250). Portici, 1920. 8°.

SILVESTRI F. — Contribuzione alla conoscenza dei Termitidi e Termitofili dell'Africa occidentale (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale agraria della R. Scuola superiore di agricoltura in Portici », vol. XIII, pp. 265-319). Portici, 1920, 8°.

SILVESTRI F. — Descriptions of some Oriental Diplopoda Polydesmoidea of the Subfamily Pyrgodesminae (Repr. of the « Records of the Indian Museum », vol. XIX, pp. 117-135). Calcutta, 1920. 8°.

STRAMPELLI N. — Altre varietà di frumento ottenute nella stazione di granicoltura di Rieti. Piacenza. 1920, pp. 1-10. 8°.

WARMING E. — Mindeskrift i Anledning af Hundredaaret for Japetus Steenstrups Fodsel (voll. I, II). Kobenhaun, 1914. 8°.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXX. (1892-1921). Fasc. 3°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 7°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

RENDICONTI — Marzo 1921.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

COMUNICAZIONI VARIE

ERRATA CORRIGE

A pag. 96 le righe 15-16 devono essere così modificate: « richiamando l'attenzione della Classe su quelle dei Soci Fano e Silvestri e del prof. Berlese ».

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile*

Pubblicazione bimensile. **N. 6.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXX.° — Fascicolo 6°

Seduta del 20 marzo 1921.

1° Semestre.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCAD. NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 marzo 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota I del Corrispondente Francesco Severi.

In questa ed in alcune Note successive esporrò una dimostrazione del teorema concernente il numero degli integrali semplici indipendenti di 1ª specie, appartenenti ad una superficie algebrica F, quale risulta dalla fusione e da un rimaneggiamento profondo del metodo da me seguito per la dimostrazione originaria del teorema (1) e di quello esposto da Poincaré in uno de' suoi ultimi lavori (2). Il concetto della dimostrazione cui alludo è il seguente:

Indicata con $q = p_g - p_a$ l'irregolarità della superficie $F[f(x, y, z) = 0]$, d'ordine m, e con p il genere della sua sezione piana generica, si possono scegliere q superficie linearmente indipendenti d'ordine $m-2$:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \ldots, \varphi_q(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

aggiunte ad F, le cui equazioni sieno di grado $m-3$ in x, z, e $p-q$ superficie aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m-3$:

$$\varphi_{q+1}(x, y, z) = 0 \ldots, \varphi_p(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

(1) Com'è noto i fondamenti della teoria degl'integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica furon posti dalle classiche ricerche di Picard. Il teorema cui si allude nel testo, concernente il numero degli integrali semplici di 1ª (e di 2ª) specie ed il numero dei loro periodi, è il risultato complessivo di ricerche (in ordine cronologico) mie, di Enriques e di Castelnuovo.

(2) Annales de l'école normale supérieure, 1910.

per guisa che le (1), (2) stacchino sopra un generico piano $y = \text{cost.}$ le p curve d'ordine $m - 3$ linearmente indipendenti, aggiunte alla curva sezione di F con quel piano. Queste p curve divengono dipendenti solo per un numero finito di *valori critici* del parametro y. Vi è poi un numero finito di *valori singolari* di y in corrispondenza a ciascuno dei quali la sezione piana $y = \text{cost.}$ si abbassa di genere.

Le (1) posson inoltre essere scelte in modo che non esista alcun valore di y critico pel loro sistema (cioè in modo che esse stacchino sopra *ogni* piano $y = \text{cost.}$ q curve indipendenti).

Ciò premesso, pongasi

$$u_i = \int \frac{\varphi_i}{f'_z}\, dx \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{3}$$

cosicchè, per un valore generico di y, l'integrale (3) è un integrale abeliano di 1ª specie della curva $f(x, y, z) = 0$ (integrale che può diventare di 3ª specie soltanto in corrispondenza ai valori singolari di y).

Fissato uno, O, degli m punti d'intersezione di F colla retta all'infinito comune ai piani $y = \text{cost.}$ (punti base del fascio di sezioni prodotte su F da questi piani), poniamo in O l'origine dei cammini d'integrazione per gl'integrali (3). Designamo inoltre con $x_1\,(x_1, y, z_1), \ldots, x_p\,(x_p, y, z_p)$ p punti variabili sulla curva $f(x, y, z) = 0$, corrispondente a un dato valor generico di y, e scriviamo le equazioni:

$$u_i(x_1) + \ldots + u_i(x_p) \equiv c_i \ \text{[modd. periodi degli integrali (3)]}, \tag{4}$$

ove le c_i sono costanti arbitrarie ed i cammini d'integrazione conducenti allo stesso punto x_j sono i medesimi per tutti gl'integrali. In base al teorema d'inversione di Jacobi, le (4) saranno soddisfatte da un gruppo ben determinato di p punti della sezione considerata.

Al variare del parametro y, questo gruppo di punti descrive una *curva analitica* C. Quali sono le condizioni affinchè questa curva sia *algebrica*?

La curva C sega una sezione piana generica $y = \text{cost.}$ in p punti diversi dai punti base del fascio $y = \text{cost.}$; ma non è escluso ch'essa possa passare con molteplicità infinita per qualcuno di tali punti. Quando ciò accada, C non è algebrica. Ebbene si prova che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva analitica* C *sia algebrica, è che le costanti* $c_{q+1}, \ldots, c_p$ *abbiano valori nulli* (*mentre le prime* q *costanti* $c_1, \ldots, c_q$ *posson avere valori arbitrari*).

La dimostrazione di questo teorema fondamentale si svolge qui in modo assai più semplice e spedito che nella Memoria di Poincaré, anche per la eliminazione di taluni concetti superflui (valori critici di prima e di seconda specie, valori critici effettivi ed apparenti ecc.), che sono collegati a particolarità proiettive della superficie e non alle sole proprietà invarianti per

trasformazioni birazionali; e per la maniera più elementare con cui si usufruisce delle funzioni theta.

Ognuna delle coordinate di un punto variabile sulla curva C è una certa funzione del parametro y e si dimostra, in primo luogo, ch'essa non può presentare che singolarità di tipo polare, per ogni valore, anche singolare, di y, diverso dai valori critici; mentre essa presenta singolarità essenziali in corrispondenza ai valori critici, ogni qualvolta le $c_{q+1}, \ldots, c_p$ sieno diverse da zero. Quando invece le $c_{q+1}, \ldots, c_p$ sieno nulle, le singolarità essenziali spariscono e la C diviene pertanto algebrica.

Prendendo $c_{q+1} = \cdots = c_p = 0$, e facendo variare comunque le $c_1, \ldots, c_q$, si ottiene su F un sistema continuo ∞^q di curve algebriche C, a due e due non equivalenti linearmente, e da ciò si trae, come nella mia Memoria sul teorema d'Abel per le superficie ([1]), che gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad F sono in numero di q con $2q$ periodi.

Il metodo di Poincaré conduce a stabilire l'esistenza su F di un numero finito di *curve primitive*, la cui nozione equivale sostanzialmente a quella della *base* cui pervenni nel 1905.

La odierna rielaborazione getta un ponte di passaggio semplice fra l'una e l'altra nozione, attraverso ad un criterio di equivalenza algebrica tra curve della superficie F. Varî sono i criteri di equivalenza che ho esposto in precedenti lavori; ma si tratta in generale di criteri di equivalenza lineare per curve che già si sappia essere equivalenti algebricamente (appartenenti cioè ad un medesimo sistema algebrico). Per l'equivalenza algebrica ho dato in passato un criterio geometrico ed un criterio trascendente in cui intervengono gl'integrali semplici di 3ª specie ([2]).

Il criterio cui pervengo alla fine di questo lavoro richiede invece l'intervento dei soli integrali semplici di 1ª specie.

1. Com'è lecito, quando si tratta di proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, supponiamo la superficie F dotata di una sola linea doppia nodale e punti tripli ordinari. Sia $\varphi(x, y, z) = 0$ un'aggiunta d'ordine $m-2$ (superficie passante per la linea doppia di F), la quale contenga la retta impropria r dei piani $y = \text{cost.}$ e seghi fuori di r sopra un particolare piano $y = y_0$, una curva d'ordine $m-3$, per cui passi pure una superficie aggiunta $\psi(x, y, z) = 0$, d'ordine $m-3$. Avrà allora luogo, per ogni x, z, l'identità:

$$\varphi(x, y_0, z) \equiv \psi(x, y_0, z),$$

donde:

$$\varphi(x, y, z) - \psi(x, y, z) \equiv (y - y_0)\, \eta(x, y, z),$$

([1]) Annali di Matematica, 1905.
([2]) Mathematische Annalen, 1906.

$\eta(x, y, z) = 0$ essendo una superficie aggiunta d'ordine $m-3$; e questa prova che la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$ stacca su ogni piano $y = \text{cost.}$ una curva appartenente al sistema ivi segnato dalle superficie d'ordine $m-3$ aggiunte ad F.

L'ipotesi e la conclusione possono evidentemente riferirsi anche al piano $y = \infty$, in quanto questo può trattarsi come un piano proprio introducendo l'omogeneità nelle coordinate, oppure operando su F colla trasformazione omografica $x' = \frac{x}{y}, y' = \frac{1}{y}, z' = \frac{z}{y}$.

Se una superficie d'ordine $m-2$ aggiunta ad F e passante per una retta r, taglia fuori di r, sopra un particolar piano passante per r, una curva appartenente al sistema lineare h segato su quel piano dalle superficie aggiunte d'ordine $m-3$, lo stesso accade sopra ogni altro piano del fascio.

2. Ciò posto, contiamo da quanti parametri dipendono le superficie aggiunte φ d'ordine $m-2$, passanti per r, che staccano sui piani $y = \text{cost.}$ curve del sistema lineare h.

Per ogni curva di h passano ∞^{p+p_a} superficie φ (essendo p_a il genere aritmetico di F e $p+p_a-1$ la dimensione del sistema lineare Σ delle aggiunte d'ordine $m-3$); al variare del piano $y = \text{cost.}$ le curve dei sistemi h dipendono da $p-q$ parametri (ove $q = p_g - p_a$ è l'irregolarità di F e $p-q-1$ la dimensione di h sopra un particolare piano $y = \text{cost.}$) ([1]); ma ogni φ contiene ∞^1 curve dei sistemi h; dunque le φ dipendono da $(p+p_a)+(p-q)-1 = 2p+p_a-1-q$ parametri.

Ora le φ che passano per r dipendono da $2p+p_a-1$ parametri (perchè esse staccano sopra un piano $y = \text{cost.}$ un sistema lineare completo di dimensione $p-1$) e costituiscono una varietà lineare V, di dimensione $2p+p_a-1$, cui appartiene la varietà algebrica W, di dimensione $2p+p_a-1-q$, delle φ passanti per r e seganti i piani $y = \text{cost.}$ secondo curve dei sistemi h.

Si può pertanto scegliere entro V un sistema lineare di dimensione $q-1$ che non abbia in comune alcun elemento colla varietà W. Dunque:

È possibile scegliere q aggiunte ad F d'ordine $m-2$, linearmente indipendenti, e passanti per la retta r:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \ldots, \varphi_q(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

([1]) Che il sistema lineare Σ abbia la dimensione $\varrho = p+p_a-1$, e quindi che la dimensione del sistema h segato da Σ sopra un piano $y = \text{cost.}$ sia $p-q-1$ risulta da un bel teorema di Picard (ved. ad es. una mia Nota in questi Rendiconti, 1908). Qui però non occorre d'invocare questo teorema. Basta invece ricordare (Enriques) che fra le trasformate birazionali della data superficie se ne può sempre scegliere una F (dotata di linea doppia), per la quale il sistema aggiunto al sistema delle sezioni piane sia regolare, cioè di dimensione ϱ. Una volta costruita la teoria degl'integrali semplici di 1ª specie sul particolare modello F, risulterà, a posteriori, alla maniera di Picard, che per ogni superficie quel sistema aggiunto è regolare.

tali che una superficie qualunque del sistema lineare

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q = 0\,, \tag{6}$$

non stacchi MAI *fuori di r, sopra alcun piano del fascio r, una curva ivi segata da una superficie aggiunta d'ordine m — 3.*

Ne deriva che *su* OGNI *piano del fascio r il sistema lineare* (6) *stacca q curve linearmente indipendenti*, perchè se sopra un piano $y = y_0$ le curve (5) fossero linearmente dipendenti, cioè se esistessero valori $\lambda_1^{(o)}, \ldots, \lambda_q^{(o)}$ non tutti nulli delle λ, tali che:

$$\lambda_1^{(o)} \varphi_1(x\,, y_o\,, z) + \cdots + \lambda_q^{(o)} \varphi_q(x\,, y_o\,, z) \equiv 0\,,$$

risulterebbe:

$$\lambda_1^{(o)} \varphi_1(x\,, y\,, z) + \cdots + \lambda_q^{(o)} \varphi_q(x\,, y\,, z) \equiv (y - y_o)\, \psi(x\,, y\,, z)\,,$$

$\psi = 0$ essendo un'aggiunta d'ordine $m - 3$; e la superficie $\lambda_1^{(o)} \varphi_1(x\, y\, z) + \cdots + \lambda_q^{(o)} \varphi_q(x\, y\, z) = 0$ staccherebbe sopra ogni piano $y =$ cost. una curva dei sistemi lineari h, il che contrasta col modo come è stato scelto il sistema (6).

Paleontologia — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio CARLO DE STEFANI.

V.

Mulino di San Giovanni.

Nella roccia schistosa scura, assai scarsamente calcarea sovrastante al Calcare scuro probabilmente eocenico che termina a Sud la serie Triassica del Gazo, sul Cantarena, al Mulino di San Giovanni ed in luoghi vicini lungo la via del Gazo, trovansi tracce di *Hexasterophora* probabilmente *Lychniscosa*.

La roccia (Quarzo anche in granuli derivanti da sabbia estranea come qualche granulo di Plagioclasio, Sericite abbondante, Clorite talora in grossi fasci, Limonite, Magnetite, Ematite, Rutilo spesso abbondante in groviglio di microscopici aghetti, Apatite, Calcite scarsissima) è costituita alternativamente da sottili noduletti e lenti quarzose chiare rispondenti allo Spongiario, con piccole geodi di Quarzo, e da straterelli argillosi scuri con tritumi minori apparentemente della stessa specie. L'intreccio dictyonale a maglie quadrate si vede solo in pochi tratti, al solito con *Ostia* puntiformi di *Epirhize* con intreccio a losanga intorno, ed altre aperture circolari con intreccio raggiato.

All'intorno di questi canali verticali verificai che in senso longitudinale secondante i medesimi l'intreccio è in serie parallele longitudinali e

radiali regolarmente alternanti con serie di successivi canaletti che irradiano nell'interno dello Spongiario.

L'interno delle maglie è riempito da Sericite, Limonite, Magnetite o Quarzo; nel qual caso, per la diversa orientazione dei cristalletti che hanno sostituito le maglie e di quelli che successivamente le hanno riempite, al Polariscopio, a Nicols incrociati, apparisce discretamente il reticolo, parte chiaro e parte scuro. Le Macrosclere sono in genere avviluppate ed ingrossate dal Quarzo: le Spicole non sono spinose; le Lychnische eccezionali derivano forse da altra specie. Vi sono *Hexactiniae* e *Diactiniae*. Sono inclusi nello Spongiario *Amphioxe* di Monaxoni e microscopici frammenti di organismi, fra i quali meno minuti ne è uno di *Nummulites* con inizio di 5 piccole camere.

Avendo esaminato varî pezzi di roccia di luoghi vicini non ho trovato differenze apprezzabili. La specie ricorda le *Sporadoscinidae* e specialmente per l'intreccio irregolare la *Leiostracosia punctata* Schrammen della Creta. S'intende che questi paragoni sono fatti solo in modo generale e, direi, come punti approssimativi di ritrovo.

Biscazza.

Presso a poco allo stesso livello stratigrafico, cioè sopra il *grezzone* del Gazo nel suo lato orientale, sulla sinistra del Chiaravagna, alla Biscazza presso il Panigaro, sono un calcare siliceo screziato ed un concomitante scisto calcifero carbonioso, nero. Tali rocce avrebbero potuto credersi anche Infraliassiche; ma per le analogie litologiche e per gli stretti rapporti coi terreni Eocenici superiori li pongo alla base dell'Eocene locale.

I. Nel calcare (Calcite, Quarzo, Opale gialliccio ferruginoso, Limonite, Rutilo, particelle carboniose) la *Hexactinellide* fu, in gran parte, convertita in Calcite e scompare negli acidi. Il reticolo hexactinico dictyonale di 3 o 4 ordini è diretto a ventaglio in tutti i sensi in serie irregolari con maglie esagone, circolari, come in certe *Sporadoscinidae* e *Leptophragmidae* ecc. Solo a tratti è quadrato o rettangolare, e disposto con una certa regolarità intorno a canali acquiferi con grandi *Postica* probabilmente di *Aporhize* esalanti, come in alcune *Leptopragma*, *Leiostracosia* cui per alcuni caratteri assomiglierebbe. Vi sono pure *Ostia* di canali più piccoli.

Le Spicole maggiori paiono al più con rarissimi aculei e fornite di *Lychnische*, ma non sempre nè in tratti contigui, come avviene nella vivente *Aulocystis Grayi* Marshall.

Le *Lychnische* si espandono, sovente, ben più che nella specie di S. Martino più antica, formando intorno ai punti d'incrocio espansioni e reticoli perforati da buchi cilindrici o ellittici, ovvero assai regolarmente poligonali: potrebbero così paragonarsi più che a qualunque altro genere agli *Oncothecus* Schrammen della Creta superiore: credo si tratti di tessuto interno oltre

che dermale. Parenchimali sono *Hexactiniae* anche dilophe: non *Scopulae* o *Clavulae*.

Piccoli canaletti serpeggianti, diramati e confluenti, per lo più riempiti da Calcite cristallina, sebbene talora vi rimanga qualche parte d'intreccio, furono probabilmente prodotti da animali estranei, piuttosto che da *Tallophyte* da escludersi trattandosi di terreni di mare profondo.

Nella compagine della *Hexasterophora Lychniseosa* sono rare *Triaene* di *Tetracladina* e qualche *Rhizoclone*.

Vi sono pure perfettamente conservate delle foraminifere *Quinqueloculinae* isolate, non a gruppi.

II. Lo Schisto calcitico carbonioso (Calcite, Quarzo, Limonite, Rutilo, materia carboniosa) della stessa località, presenta frammenti di Spongiario, che mi paiono attribuibili alla stessa specie, visibili nelle sezioni come un mosaico. Qualche carattere vi si palesa più completo. Le Macrosclere incrostate di Quarzo sono cubiche e fornite di *Lychnische*. Attorno alle piccole *Ostia* delle *Epirhize* l'intreccio forma al solito qualche losanga, per effetto di schiacciamento. Intorno alle *Aporhize* circolari il reticolo periferico minutissimo è talora raggiante e anche spirale. I detti canali inalanti ed esalanti si vedono talora terminare cechi.

Del resto l'intreccio di varî ordini, come nel calcare, è piuttosto irregolare e diretto in tutti i sensi. Vi è qualche placca interna o dermale forata. Tra i parenchimali sono *Diactiniae* e qualche *Oxyhexactiniae*: ho pur veduta una *geminula* o *sfera* ed ho trovato alcuni rabdi di *Rhizomorina*.

Casa Buzzano.

Presso a poco allo stesso livello stratigrafico della località precedente, a sud e sopra il *Grezzone* Triassico della ellissoide d'Isoverde fra Casa Buzzano e Casa Nonscian sulla destra dell'Iso è un calcare ceruleo (con Calcite, Quarzo. Sericite, Limonite, microliti di Rutilo aggrovigliati nelle parti più schistose, e Apatite), una specie di *Bardiglio* molto siliceo, con vene di Calcite. Lo Spongiario, in parte calcificato, alterna con le sottili lenti schistose. È diverso dal precedente. Ha reticolo abbastanza regolare con maglie grandi o piccole quadrate o rettangolari: megasclere con *Lychnische* evidenti: microsclere e parenchimali sono *Hexactiniae* e *Diactiniae*. In qualche placca di Quarzo ialino sono minute *Hexactiniae* e *Tylopentactiniae*.

Piccole aperture puntiformi ed altre probabilmente di *Epirhize*, più grandi, circolari, in parte schiacciate trasversalmente. In qualche caso ho notato, come nella specie della Biscazza e di Mele, che l'intreccio forma una breve spirale intorno alle *Ostia*. Trattando con acido cloridrico rimane la sfiorituca quarzosa riproducente in modo grossolano l'intreccio dictyonale ed i canali verticali (*Aporhize*) circolari. Nel Quarzo ho osservato una *Amphioxe* di *Monaxonia*.

Caffarella.

Da S. Martino salendo alla Caffarella sopra le rocce ritenute Infraliassiche di S. Martino, incontrasi la zona schistosa esterna attribuita all'Eocene superiore. Fra le altre rocce vi sono Calceschisti ceroidi, puri, più schistosi e silicei che calcarei con Calcite, Opale, Sericite, Rutilo, Limonite pseudomorfa di Pirite, materia carboniosa. Vi è una compagine di varî frammenti di *Dictyonina*, talora abbastanza integri, talora minuti. Saggiando con gli acidi, si discioglie in molta parte l'intreccio trasformato in Calcite, ma restano minute parti silicee intatte, piatte, bianche, ialine. Il reticolo dictyonale minutissimo in serie longitudinali regolari, è radiale, e circolare, in tal caso spesso intricato, a maglie di vario ordine quadrate, rettangolari, rotonde, esagone, triangolari, perciò a volte irregolarmente disposte.

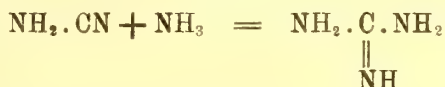
Con ingrandimento di 400 D. nell'intreccio maggiore appaiono *Lichnische*, ma non sempre; perciò la specie è diversa dalla *Hexasterosa* più antica di S. Martino; mentre somiglia a quella di Palazzo Doria e luoghi vicini. Compaiono pure placche dermali o gastrali con forellini rotondi. Vi sono piccole *Ostia* in serie irregolari con rari tubi sporgenti forse di Epirhize.

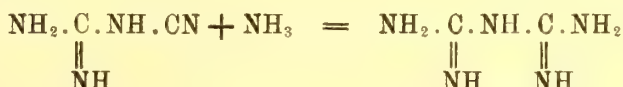
Vi sono piccoli canali acquiferi inalanti ed esalanti verticali od obliqui che traversano lo Spongiario in vario senso, riempiti talora da Limonite: hanno all'intorno un intreccio radiale. Nell'interno sono *Hexactiniae* isolate e nel residuo siliceo dopo il trattamento con gli acidi appaiono piccole *Pentactiniae* dermali, *Diactiniae*, e pare qualche *Clavula*, nel qual caso si tratterebbe di *Uncinataria* e tra le forme conosciute come tali si potrebbe avvicinare alle *Tetracalycidae* F. E. Schulze con canali irregolari che traversano la Spugna in diverse direzioni, con *Epi* ed *Aporhize* tubiformi, con *Scopulae*. Però la presente specie pare sia una *Lychniscosa*, ed i parenchimali delle *Lychn.* fossili ed in generale delle *Hexasterophora incertae sedis*, che sono la quasi totalità delle *Silicospongiae* fossili, non si conoscono, ma probabilmente in parte queste sono *Uncinataria*.

In certi tratti in mezzo all'intreccio compaiono Rhabdi di *Helomorinidae* tipo noto solo nella Creta.

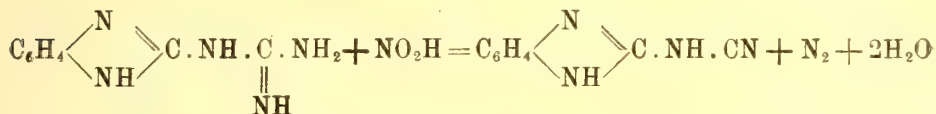
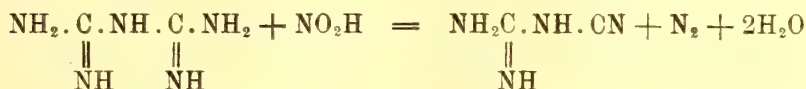
Chimica. — *Passaggio dalla guanidina alla cianamide e dalla biguanide alla diciandiamide* [1]. Nota del Corrisp. GUIDO PELLIZZARI.

Come è noto Erlenmeyer per l'addizione di una molecola di ammoniaca alla cianamide ottenne la guanidina [2].

$$NH_2.CN + NH_3 = NH_2.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH_2$$

Similmente la diciandiamide con una molecola di ammoniaca si trasforma in biguanide

$$NH_2.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH.CN + NH_3 = NH_2.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH_2$$

La reazione inversa non era ancora stata ottenuta, cioè non si era riusciti a togliere direttamente da un composto guanidico gli elementi di una molecola di ammoniaca per trasformarlo in un derivato della cianamide.

Il primo caso di una tale reazione l'ho avuto colla *o*-fenilenbiguanide, la quale con acido nitroso, invece di dare la fenilenguanilurea come si poteva supporre, dette la fenilencianguanidina (*o*-fenilendiciandiamide) [3].

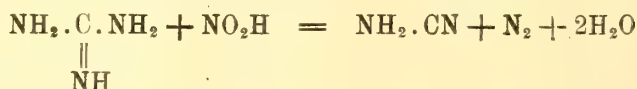
$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C.NH.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH_2 + NO_2H = C_6H_4\left\langle\begin{matrix}N\\NH\end{matrix}\right\rangle C.NH.CN + N_2 + 2H_2O$$

Ho voluto ora vedere se questa nuova reazione rappresentava un caso isolato, oppure aveva un qualche carattere di generalità: colla biguanide e acido nitroso ebbi analogamente alla reazione sopra citata, produzione di cianguanidina o diciandiamide

$$NH_2.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH.\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH_2 + NO_2H = NH_2\underset{\underset{NH}{\|}}{C}.NH.CN + N_2 + 2H_2O$$

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica farmaceutica del R. Istituto Superiore di Firenze.

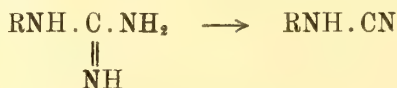
[2] Ann: 146, 259 (1868).

[3] Rend. Acc. Lincei, vol. XXX, 1° sem., pag. 39 (1921).

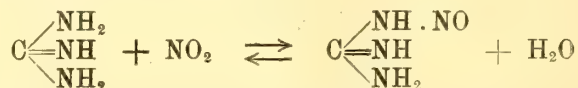
In seguito a questo resultato positivo feci agire l'acido nitroso sulla guanidina e potei constatare in modo positivo la formazione di un poco di cianamide.

$$\underset{\underset{NH}{\|}}{NH_2.C.NH_2} + NO_2H = NH_2.CN + N_2 + 2H_2O$$

Il rendimento in cianamide fu dapprima molto piccolo, mentre quello della diciandiamide fu del 71 % del calcolato e quella della *o*-fenilencianguanidina dell'81 %. Il maggior rendimento di quest'ultimo prodotto può spiegarsi colla sua pochissima solubilità a freddo per cui sfugge ad un'ulteriore azione dell'acido nitroso. Per la diciandiamide, come dirò nella parte descrittiva, avevo dapprima scarso rendimento facendo la reazione con solfato di biguanide, nitrito sodico e acido solforico diluito, perchè la reazione era troppo vivace; ma sostituendo l'acido acetico la reazione si svolse più lentamente e il rendimento si fece assai buono. Per la guanidina riuscii soltanto cambiando in altro modo le condizioni dell'esperienza, come dirò dopo, ad avere quantità discrete di cianamide.

In ogni modo rimaneva così stabilito che il gruppo guanidico può coll'acido nitroso trasformarsi in un gruppo della cianamide

$$\underset{\underset{NH}{\|}}{RNH.C.NH_2} \longrightarrow RNH.CN$$

L'ammoniaca si elimina come azoto ed acqua, che sono i prodotti di decomposizione del nitrito di ammonio, ma da certi indizî mi parve che l'acido nitroso non staccasse direttamente una molecola di ammoniaca ma che si formasse un prodotto intermedio: per il caso della guanidina potei in realtà identificarlo per la nitrosoguanidina che J. Thiele ebbe per cauta riduzione della nitroguanidina [1]. Egli però dice che *la nitrosoguanidina in liquido acido si decompone in guanidina ed acido nitroso ed è perciò che non si può formare direttamente da queste due sostanze.*

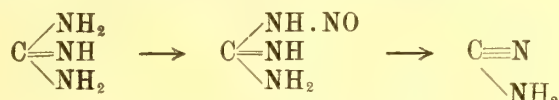
Ma secondo le mie esperienze quest'ultima affermazione non risulta vera: il fatto è che invece ci troviamo di fronte a una reazione reversibile che può raggiungere uno stato di equilibrio

$$C\begin{cases}NH_2\\ =NH\\ NH_2\end{cases} + NO_2 \rightleftarrows C\begin{cases}NH.NO\\ =NH\\ NH_2\end{cases} + H_2O$$

Perciò determinai un incremento nella formazione della nitrosoguanidina

[1] La nitroguanidina fu descritta da me nel 1891; Jousselin aveva avuto la stessa sostanza nel 1877, ma credette che fosse la nitrosoguanidina. Quest'ultima sostanza la ebbe Thiele nel 1903. — Ann: 273, 133.

aumentando la concentrazione dell'acido nitroso. Ma siccome il prodotto in liquido acido rimane disciolto, si neutralizza con soda a freddo e in quel breve tempo che occorre la reazione praticamente non retrocede e la nitrosoguanidina così stabilizzata può anche separarsi per concentrazione a temperatura poco elevata. Per avere invece direttamente la cianamide il liquido neutralizzato si scalda e così la nitrosoguanidina, come già aveva osservato Thiele, si scompone in azoto, acqua e cianamide.

Lo schema quindi della reazione è il seguente:

$$C\begin{cases}NH_2\\=NH\\NH_2\end{cases} \longrightarrow C\begin{cases}NH.NO\\=NH\\NH_2\end{cases} \longrightarrow C\begin{cases}\equiv N\\NH_2\end{cases}$$

È probabile che il meccanismo della reazione sia lo stesso anche per gli altri due casi: per la biguanide l'indizio della formazione della nitrosobiguanide è dato dal fatto che al principio della reazione il liquido è giallo e questa colorazione sparisce mano a mano che l'azoto si sviluppa e si forma la diciandiamide; inoltre il liquido giallo col solfato ferroso e potassa dà una colorazione rosso sangue simile a quello che dà la nitrosoguanidina.

Azione dell'acido nitroso sulla biguanide [1].

Gr. 2 di solfato di biguanide e gr. 1 di nitrito sodico furono sciolti in 10 c. c. di acqua, poi a freddo si aggiunse 1 c. c. di acido acetico glaciale: la reazione così è poco vivace, non si hanno vapori rossi che in minima quantità, lo sviluppo gassoso è lento e il liquido diventa giallino. Mettendo in un vetrino una goccia di soluzione di solfato ferroso, poi una goccia di idrato sodico e mescolando e quindi lasciando cadere nel mezzo una goccia della soluzione gialla, si ha una colorazione rosso sangue al centro con sfumatura viola bleu ai bordi. Il giorno dopo (temp. 10°) si erano separati gr. 0,5 di diciandiamide ben cristallizzata che fondeva a 205°. Alle acque madri si aggiunsero gr. 0,5 di nitrito sodico, ma non si depositò altro e allora il giorno dopo si alcalinizzò il liquido con ammoniaca, si tirò a secco a b. m. e si riprese il residuo con alcool dal quale si ricavarono ancora gr. 0,8 di diciandiamide un po' colorata ma abbastanza pura. Il rendimento fu il 71 % del teorico. Il prodotto purificato si presentava con tutte le caratteristiche della diciandiamide. Gr. 0,0631 di sostanza dettero 35,3 c. c. di azoto a 12° e 759 mm.

trovato % N = 66,90 calcolato per $C_2H_4N_4$ 66.66.

[1] Bamberger, Ber. 25, 545, prepara la biguanide fondendo la diciandiamide col cloruro ammonico ed ottiene un rendimento del 40-50 % in biguanide ramica: con questa preparazione non mi riuscì ad avere che rendimenti assai più bassi e perciò feci la reazione in soluzione acquosa così: gr. 10 di diciandiamide e gr. 16 di cloruro di ammonio furono sciolti in 30 c. c. di acqua e la soluzione si fece bollire a ricadere per 8-10 ore. Il liquido diluito e filtrato dette gr. 5,2 di composto ramico.

Una reazione fatta colle stesse quantità di sopra, ma usando acido solforico invece che acetico, dette subito vapori rossi, molto sviluppo gassoso e scarso rendimento in diciandiamide: sembrerebbe da ciò che il supposto nitroso derivato sia poco stabile in presenza di acidi minerali e in maggior copia si formi coll'acido acetico, eppoi sviluppando azoto e acqua si trasformi in diciandiamide.

Azione dell'acido nitroso sulla guanidina.

Furono fatte diverse prove sempre partendo dal carbonato di guanidina, nitrito sodico ed aggiungendo acidi differenti, e si vide che con l'acido acetico come col tartarico la reazione è lentissima. Migliore risultato si ebbe coll'acido solforico sviluppando un eccesso di acido nitroso in liquido concentrato come dimostrano i risultati di queste quattro esperienze:

		I	II	III	IV
Carbonato di guanidina . .	gr.	1	1	1	1
Nitrito sodico.	gr.	0,77	0,77	1,5	1,5
Acqua	gr.	15,—	10,—	15,—	10,—
Acido solforico al 25 % . .	cc.	5	5	7,5	7,5
Cianamide argentica ottenuta	gr.	0,07	0,11	0,15	0,37

Le esperienze I e II furono fatte sviluppando la quantità calcolata di acido nitroso e le III e IV colla quantità doppia. Il miglior rendimento si ebbe con la quantità doppia di acido nitroso in poco liquido. L'esperienza, che può farsi anche in lezione, si eseguisce mettendo in una piccola bevuta tenuta nell'acqua fresca, le sostanze nell'ordine soprascritto. Si ottiene così un liquido giallo dal quale si sviluppano delle bollicine gassose; dopo poco tempo, al massimo mezz'ora, si neutralizza con idrato sodico al 20 % e si fa bollire procurando di mantenere il liquido neutro o leggermente acido con qualche goccia di acido acetico molto diluito; si sviluppa l'azoto e quando il liquido è incoloro col nitrato d'argento ammoniacale si precipita la cianamide argentica. Non facendo la neutralizzazione e lasciando il liquido alla temperatura dell'ambiente, il liquido si scolora ma si trova pochissima cianamide. Essa fu identificata coll'analisi del composto argentico e di quello ramico e colla trasformazione in diciandiamide.

Per separare la nitrosoguanidina si fece questa esperienza: gr. 3 di carbonato di guanidina e gr. 4,5 di nitrito sodico con 15 c. c. di acqua furono trattati con 21,5 c. c. di acido solforico al 25 %. Il liquido ottenuto dà nettamente la reazione caratteristica della nitrosoguanidina e cioè una colorazione rossa intensa col solfato ferroso e soda e un precipitato rosso cinabro con un sale di nichel e idrato sodico. Per separarla si neutralizzò con soda al 20 % e raffreddando si separò molto solfato sodico che si tolse dal liquido, il quale fu concentrato a 40-50° e a freddo si ebbe la nitrosoguanidina in

aghetti minuti gialli e cristalli di solfato di soda. I primi agitando si portano facilmente sul filtro e così si raccolgono. Le acque madri si tirarono quasi a secco sempre a bassa temperatura; quindi si riprese con qualche goccia di idrato sodico, si filtrò e con anidride carbonica precipitò ancora un poco di nitrosoguanidina che fu purificata

gr. 0,434 di sostanza dettero 23 c. c. di azoto a 10° e 755 mm.
trovato % N = 63,51 calcolato per CH_4N_4O = 63,64

Sto ora facendo ricerche con alcune biguanidi sostituite.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui numeri reali e le grandezze.* Nota I di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo (*).

Ritorno sull'argomento, già ampiamente trattato (1), dei *numeri reali* e delle *grandezze*, per introdurre alcune modificazioni che hanno notevole interesse scientifico e pratico, ma che non portano alterazione al contenuto generale di L. M. e dei lavori precedenti (2).

1. Se $x \, \varepsilon$ grd − Zero [pag. 381, (6), (7)] la frase « Grandezza omogenea con x » (3), ovvero il simbolo equivalente [pag. 416] $Q_0 \, x$, abbreviazione di $(ax) \,|\, a \, ` Q_0$, non indica una classe ben determinata, perchè la definizione di Grd [pag. 381, (5)] non implica (4) la esistenza di una sola Grd cui appartenga x.

(*) Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

(1) Cfr. specialmente i lavori miei e di S. Catania citati nella mia *Logica Matematica* (Manuali Hoepli, 2ª ediz. 1919), alla quale si riferiscono le citazioni entro parentesi quadre e che citerò con la abbreviazione L. M. — In particolare cfr. mia Nota *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze* (Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem., pp. 489-496, 1915).

(2) Ho trovato e introdotto tali modificazioni in seguito ad alcune osservazioni ed esempî, che saranno citati volta per volta che occorrono, comunicatimi dal sig. G. Bertelli di Spezia. — Il sig. Bertelli suggerisce pure di cambiare, nella definizione della *coppia* particolare $(a\,;a)$ [pag. 136, (1)], $fx = \iota a$ in $fx = \iota a \cup \iota x$, perchè altrimenti si ha $(a\,;a\,;\iota b) = (b\,;b\,;\iota a)$ anche quando $a - = b$. Infatti la *dimostrazione* della *condizione di eguaglianza* di due terne [pp. 138-140, (2')] sussiste quando $(a\,;b)\,x\,, (a'\,;b')\,x$ dipendono realmente da x, il che avviene [pag. 136, (1)] solo quando $a - = b$ e $a' - = b'$; mentre si ha sempre tale dipendenza con l'indicato cambiamento di fx, le altre definizioni di *coppia, terna,...* [pag. 37] restando invariate.

(3) G. Peano, *Aritmetica generale* .... (Paravia, 1902), pag. 136, ove trovasi anche la notazione $Q_0 \, x$.

(4) Ciò risulta dai seguenti esempi nei quali: $h\,,k$ sono simboli *fissi* di Oper; $f\,,g$ sono Ops [pag. 113, (1)] *fissi*; Lung è l'ordinaria classe delle *lunghezze*; m è una par-

Se $u \varepsilon$ Grd [pag. 381, (5)] allora $u \varepsilon$ Grand h [pag. 378, (1)] essendo h una operazione, ma di tali operazioni h non ne esiste una sola [5] [contrariamente a quanto è erroneamente affermato a pag. 406].

Dalla definizione dei Q_0 assoluti [pag. 388 e pag. 404] e della somma, $+$, per essi, risulta che $Q_0 \varepsilon$ Grd. Segue pure che se a, b sono dei Q_0 anche ab (che è contemporaneamente *prodotto algebrico* e *funzionale* di b per a) è un Q_0; quindi i Q_0 sono, ad un tempo, Ops e Opd per se stessi, il che contradice (cfr. [2]) alla definizione di Ops e Opd [pag. 113, (1), (1')], definizione che non può essere, in generale cambiata a causa dell'assurdo che si presenterebbe per i simboli di *operazione* [pag. 118] qualora un operatore potesse esserlo a destra o a sinistra indifferentemente [6].

Gli inconvenienti formali ora citati si tolgono facilmente come è indicato nei numeri seguenti.

2. Per comodo del lettore riporto qui, con alcune modificazioni formali, quanto è esposto nella mia Nota del 1915 (cfr. [1]) e che riguarda i Q_0, N_0, R_0

---

ticolare lunghezza non nulla, ad es., il *metro*; ${}_1C$, C_1, F, G sono classi particolari di grandezze

(A) (cfr. [2]). ${}_1C . \equiv . (1 ; x) \mid x \text{‘} Q_0$, $C_1 . \equiv . (x : 1 \mid x \text{‘} Q_0$, $x, y \varepsilon Q_0 \therefore \supset_{x,y} \therefore (1 ; x)$ $h (1 ; y) . \equiv . (1 ; x + y) : (x ; 1) \, k \, (y ; 1) . \equiv (x + y ; 1)$; si deduce [pag. 378 (1)]; ${}_1C \, \varepsilon$ Grand h, $C_1 \, \varepsilon$ Grand k, $(1 ; 1) \, \varepsilon \, ({}_1C \cap C_1)$, ${}_1C - = C_1$.

(B) (cfr. [2]). $x \, \varepsilon \, \text{Lung} - \iota m . \supset_x . f(x ; m) \equiv (x ; m)$, $f(m ; m) \equiv m$, $F \equiv f(x ; m) \mid x \text{‘Lung}$, $x, y \, \varepsilon$ Lung. $\supset_{x,y} . f(x ; m) \, h \, f(y ; m) \equiv f(x + y ; m)$; si deduce; $F \, \varepsilon$ Grand h, $m \, \varepsilon$ (F $\cap$ Lung), F $- =$ Lung.

(C). $x \, \varepsilon \, \text{Lung} - \iota m . \supset_x . g(x ; m) \equiv x / m$, $g(m ; m) \equiv m$, $G \equiv g(x ; m) \mid x \text{‘ Lung}$, $x, y \, \varepsilon$ Lung, $\supset_{x,y} . g(x ; m) \, h \, g(y ; m) \equiv g(x + y ; m)$; si deduce: G ε Grand h, $m \, \varepsilon$ (G $\cap$ Lung), G $- =$ Lung.

(5) Se, ad es., (cfr. [2]) m è un intero non nullo e si definisce la operazione $+_m$ per i Q_0 ponendo

$$x, y \, \varepsilon \, Q_0 : \supset_{x,y} : x +_m y . \equiv . (x^m + y^m)^{1/m}$$

si ha che $Q_0 \, \varepsilon$ Grand $+_m$. Analogamente per x, y appartenenti ad altre classi ordinarie di grandezze; ad es., se x, y sono lunghezze si può chiamare **somma** di x con y la lunghezza della *ipotenusa* del triangolo rettangolo (proprio o pur no) che ha per *cateti* dei segmenti di lunghezze x, y (cfr. [2]).

(6) Volendo, il che non è conveniente, lasciare ai Q_0 la proprietà ora indicata, si può, sempre eliminando l'indicato assurdo, dare di Ops (e analogamente di Opd) la definizione seguente:

$$\text{Ops} . \equiv . \Omega - \Omega^\star \cap f \ni [\exists \{ \text{Cls}' \cap u \ni (x \varepsilon u . \supset_x . fx \varepsilon \text{ Elem}) \}]$$

dando insieme il significato di Ω e $\Omega^\star$ [pag. 156]. In tal modo ogni Ops può anche essere Opd e viceversa e occorre escludere *praticamente* la contemporaneità in generale. — Ma è preferibile la soluzione che indichiamo in queste Note, ritornando a forme già introdotte (cfr. [1], 1915, e lavori di S. Catania) definendo la classe assoluta Q_0, sempre dipendentemente dalle grandezze, ma in modo che i Q_0 non siano operatori per se stessi.

relativi ad una classe omogenea di grandezze. Tutte le proposizioni di questo numero hanno come ipotesi comune. sottintesa [pag. 378]

$$h \varepsilon \text{ Oper. } u \varepsilon \text{ Grand } h.$$

La classe dei *numeri reali* relativa ad u ed h resta definita ponendo

(1) $$Q_0(u, h) . = . \iota [\text{Cls'Ops}(u . u) \frown w \ni \{A . B . C . D\}]$$

avendo A, B, C, D il significato stabilito a pag. 388 di L. M.

La somma, $+_{u,h}$, per i $Q_0(u, h)$ è definita da

(2) $$x, y \varepsilon Q_0(u, h) : \supset_{h, u, x, y} : x +_{u,h} y . = .$$
$$\iota [Q_0(u, h) \frown z \ni \{a \varepsilon u . \supset_a . za = (xa)\, h\, (ya)\}]$$

e risulta subito [pag. 378, (1)]

(3) $$Q_0(u, h) \varepsilon \text{ Grand } +_{u,h}.$$

Della classe $Q_0(u, h)$ se ne può definire l'elemento nullo, $0'_{u,h}$ [pag. 379, (2)], e l'*unità*, $1_{u,h}$, relativi ad u ed h, ponendo

(4) $$0'_{u,h} . = . 0_{Q_0(u,h), +_{u,h}}$$

(5) $$1_{u,h} . = . \iota [Q_0(u, h) \frown x \ni \{a \varepsilon u . \supset_a . xa = a\}].$$

Si ottiene la classe $N_0(u, h)$, poi $R_0(u, h)$, degli *interi* e *razionali* relativi ad u ed h, come nella Nota del 1915 (cfr. [1]) con tutte le ordinarie loro proprietà. Il *prodotto algebrico*, $\times_{u,h}$, per i $Q_0(u, h)$ coincide col loro *prodotto funzionale* [pag. 196].

Per il *rapporto*, rispetto ad h, di due elementi di u si ha

(6) $$a, b \varepsilon u . b -= 0_{u,h} : \supset_{h, u, a, b} : a /_{u,h} b . = .$$
$$\iota [Q_0(u, h) \frown x \ni \{x b = a\}]$$

e risulta

(7) $$a \varepsilon u - \iota 0_{u,h} . \supset_{h,u,a} . u = (x a) \mid x \text{'} Q_0(u, h)$$

(8) $$Q_0(u, h) = u /_{u,h} (u - \iota 0_{u,h}).$$

In virtù della (3), come caso particolare per i $Q_0(u, h)$,

(9) $$x, y \varepsilon Q_0(u, h) . y -= 0'_{u,h} : \supset_{h, u, x, y} : x /_{u,h} y . = . x /_{Q_0(u,h), +_{u,h}} y$$

e si ha

(10) $$\text{Hp}(9) . \supset_{h, u, x, y} . (x /_{u,h} y)\, y \times_{h,u} y = x$$

e quindi il simbolo /, nel quale gli indici u, h non possono esser soppressi, dà la ordinaria operazione divisione.

Fisica. — *Sopra alcuni apparati di radiomeccanica dirigibile* [1]. Nota di ALESSANDRO ARTOM, presentata dal Socio V. VOLTERRA [2].

In questa Nota intendo descrivere una nuova classe di apparati che risolvono un interessante problema della radiotelegrafia e più particolarmente della radiomeccanica.

Lo scopo a cui sono destinati questi apparati è il seguente: in una stazione radiotelegrafica ricevente far disporre una lancetta od un indice nella direzione da cui proviene il segnale radiotelegrafico.

Nei miei precedenti lavori sulla direzione delle onde elettriche [3] ho descritto numerosi metodi ed apparati coi quali si rileva la direzione in cui si trova la stazione radiotelegrafica che trasmette i segnali.

Ma in questi sistemi radiotelegrafici che hanno avuto appunto nella passata guerra vastissime applicazioni e ne hanno tuttora per la sicurezza della navigazione, la indicazione della direzione è data dalla constatazione della maggiore o minore intensità della ricezione telefonica, cosicchè il loro impiego richiede operatori di particolare abilità.

Negli apparati [4]. oggetto della presente Nota, la direzione da cui proviene il segnale è automaticamente stabilita, senza bisogno di particolari osservazioni e colla semplice lettura della deviazione di un indice, perciò li ho denominati « radiodireziometri ».

* * *

Le figg. 1 e 2 rappresentano in proiezione verticale ed orizzontale una delle forme con cui si può costruire gli apparati oggetto della presente Nota.

Le correnti di ricezione radiotelegrafica sono raccolte da due aerei dirigibili o quadri di ricezione posti fra loro ad angolo retto e più generalmente anche ad un angolo arbitrario.

Queste correnti sono raddrizzate per effetto di uno dei procedimenti ben noti in radiotelegrafia. come valvole termoioniche, contatti cristallini ecc. ed

[1] Lavoro eseguito nel R. Politecnico di Torino.

[2] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

[3] Rendiconti Accademia dei Lincei, A. Artom 15 marzo 1903, 5 febbraio 1905, 17 giugno 1906, 3 gennaio 1915, 7 gennaio 1917. Atti Associazione Elettrotecnica Italiana, 1908.

[4] Attestato di Privativa inglese del 27 marzo 1916; italiana del 9 febbraio 1917 ed analoghi esteri.

inviate rispettivamente in due avvolgimenti galvanometrici AB, CD, disposti fra loro ad angolo retto o ad altro angolo uguale a quello che formano fra loro gli aerei dirigibili.

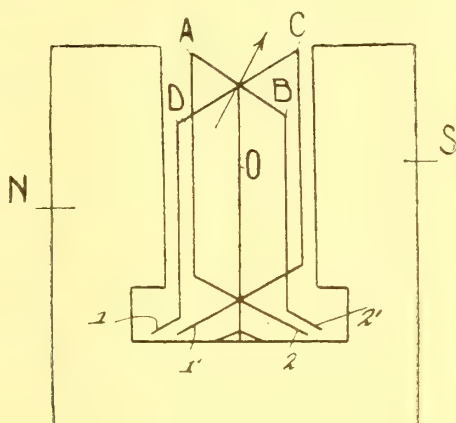



Fig. 1.

Gli avvolgimenti sono isolati elettricamente fra loro, ma meccanicamente riuniti così da costituire un unico equipaggio mobile che, sospeso mediante perno, può rotare attorno ad un asse verticale.

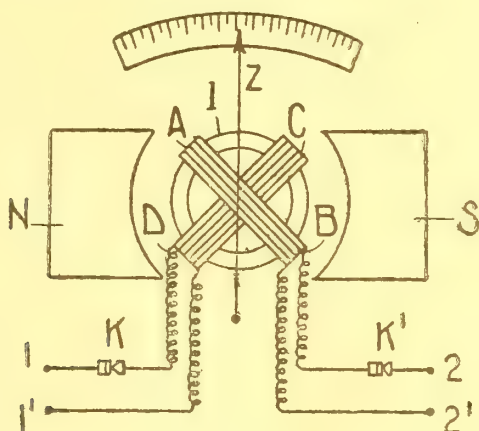



Fig. 2.

Un campo magnetico NS abbastanza intenso, produce, quando gli avvolgimenti sono sede di corrente, la deviazione dell'equipaggio mobile.

Tenendo conto delle notorie proprietà degli aerei dirigibili, dimostrerò che il valore dell'angolo di deviazione dell'equipaggio mobile di un tale apparato è funzione dell'angolo che la direzione, da cui proviene il segnale, fa col piano di uno degli aerei dirigibili riceventi.

***

Gli apparati che hanno per base i concetti esposti possono assumere diverse forme di costruzione. Una di queste (fig. 3) è particolarmente adatta per misure di laboratorio e si presta per lo studio delle condizioni teoriche di funzionamento. Essa presenta qualche analogia coi galvanometri di Boys e Duddell.

I due avvolgimenti galvanometrici sono provvisti di contatti termoelettrici T, T′ e le correnti provenienti dagli aerei dirigibili percorrono due adatte resistenze R R′ che agiscono per effetto Joule sulle pile termoelettriche.

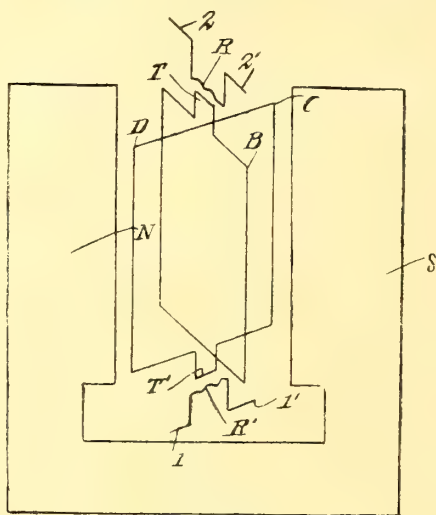



Fig. 3.

Si generano così negli avvolgimenti galvanometrici delle correnti, i cui valori sono proporzionali ai valori efficaci delle intensità delle correnti di ricezione.

Un campo magnetico NS, abbastanza intenso, provoca la deviazione dell'equipaggio mobile.

Il valore dell'angolo di deviazione dell'equipaggio mobile dipende dalla posizione in cui si trova la stazione trasmettente.

Infatti, dette i_1 ed i_2 le correnti negli aerei dirigibili ortogonali, è notorio che se α è l'angolo che la congiungente del punto di intersezione degli aerei dirigibili fa col piano di uno degli aerei riceventi la cui proiezione si assume come asse delle x, si ha:

$$(1) \qquad i_1 = K_1 \cos \alpha \qquad i_2 = K_2 \operatorname{sen} \alpha \,.$$

Dette i'_1 ed i'_2 le correnti che per effetto Joule circolano nelle spirali galvanometriche, e δ la deviazione dell'equipaggio mobile sotto l'azione del

campo magnetico, l'equazione di equilibrio è:

$$\text{(2)} \qquad HS_1\, i'_1 \operatorname{sen} \delta = HS_2\, i'_2 \cos \delta$$

dove H è la intensità del campo magnetico, ed $S_1\, S_2$ le costanti delle spirali galvanometriche.

Dalla (2) si ricava, detta γ una costante:

$$\operatorname{tg} \delta = \gamma \frac{i'_2}{i'_1}.$$

Dalla (1) risulta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K_2}{K_1} \frac{i_2}{i_1} = K \frac{i_2}{i_1}.$$

Per le notorie proprietà di proporzionalità fra le correnti termoelettriche generate negli avvolgimenti galvanometrici, ed i valori efficaci delle correnti che circolano nelle resistenze riscaldatrici, detta μ una costante, si ha:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg} \delta = \mu \operatorname{tg} \alpha .$$

Il che è quanto dire che l'angolo di cui ha deviato l'equipaggio mobile dell'apparato descritto, è funzione dell'angolo α che la retta congiungente la stazione trasmettente colla ricevente, fa con la proiezione orizzontale di uno degli aerei dirigibili ricevitori.

* * *

Lo stesso principio esposto dà luogo alla creazione di diversi tipi di apparati aventi carattere pratico ed ai quali i concetti teorici esposti si applicano con quella approssimazione che tiene conto dei coefficienti variabili a seconda delle forme costruttive.

Questi apparati dovranno perciò essere sottoposti a preventiva taratura e graduazione mediante esperienze dirette.

Fra le forme costruttive di indole pratica, ricorderò quella rappresentata dalle figg. 1 e 2 di cui si è già fatto cenno nella presente Nota. Nel campo magnetico NS sono sospesi due avvolgimenti galvanometrici angolarmente disposti. Essi possono essere anche collocati l'uno al disotto dell'altro.

Le correnti di ricezione, dopo aver attraversato i circuiti a valvole termoioniche amplificatrici, sono condotte per mezzo di leggeri fili di argento agli avvolgimenti galvanometrici.

Le valvole termoioniche sono particolarmente adatte per far funzionare gli apparati oggetto della presente Nota, perchè esse offrono la possibilità di ottenere correnti di intensità elevata.

Occorre però avvertire che, per raggiungere buone condizioni di funzionamento, è necessario che le due valvole termoioniche abbiano uguale sensibilità.

Per raggiungere tale scopo ho ideato una forma particolare di ricevitore termoionico, cioè una doppia valvola. Attorno ad un filamento centrale di forma circolare è disposta una placca cilindrica. Nel campo elettroionico, così costituito, sono collocate le griglie e le piastre che rappresentano rispettivamente gli estremi dei circuiti raddrizzatori delle correnti che circolano negli aerei.

Il campo elettroionico essendo comune alle due correnti, si verificano perciò con sufficiente approssimazione le condizioni fisiche di uguaglianza degli effetti amplificatori e raddrizzatori.

*
* *

Una terza classe di apparati ha per base le azioni elettromagnetiche al posto delle azioni magnetoelettriche.

In questa nuova classe di apparati il campo direttore è costituito da due avvolgimenti fissi angolarmente disposti e percorsi dalle correnti raddrizzate provenienti dagli aerei dirigibili.

Nell'asse verticale di simmetria di questo campo magnetico, è collocato l'equipaggio mobile costituito da un doppio ago astatico di materiale magnetico.

*
* *

Il fatto fisico di potere, mediante le onde radiotelegrafiche, comandare a distanza anche di molti chilometri, il movimento di un indice in modo da obbligarlo a disporsi secondo una determinata direzione, ritengo sarà fecondo di applicazione pratica.

Potranno invero questi apparati trovare utile impiego nella navigazione marina, nell'aeronautica, nelle segnalazioni ferroviarie: perciò ho creduto opportuno farne oggetto del presente studio.

PERSONALE ACCADEMICO

Commemorazione dell'Accademico prof. G. Cuboni, letta dal Socio Pirotta nella seduta del 6 marzo 1921.

Giuseppe Cuboni fu biologo eminente. La tendenza allo studio delle questioni biologiche gli fece abbandonare l'iniziato corso di medicina per dedicarsi completamente alle Scienze naturali e con predilezione alla biologia delle piante.

Ebbe un maestro insigne, Giuseppe De Notaris, che possedeva in alto grado l'arte di suscitare nei giovani le energie latenti per lo studio. E appena laureato il 7 gennaio 1877, divenne suo assistente benchè, purtroppo, per brevissimo tempo, perchè l'illustre botanico di Roma moriva pochi giorni dopo.

Conservò tuttavia l'ufficio, rimanendo assistente del prof. Nicola Pedicino successore del De Notaris fino al 31 dicembre del 1880, quando assunse quello di insegnante di Scienze naturali e di Patologia vegetale nella Scuola di viticoltura e di enologia di Conegliano, rimanendovi dal 1° gennaio 1880 al 31 ottobre 1887 per venire a Roma a dirigere la Stazione di Patologia vegetale e poi ad insegnare questa materia dal 1888 fino alla sua morte.

Fu insegnante egregio; calmo, ordinato, esponeva in modo chiaro e convincente; conosceva la difficile arte di interessare gli allievi perchè sapeva dare allo svolgimento una forma che, togliendo il carattere di aridità che naturalmente hanno certi argomenti, li faceva diventare interessanti e anche piacevoli.

Giuseppe Cuboni apparteneva alla schiera dei biologi, oggi non molto numerosa, i quali pur sapendo bene quanto sia necessario approfondirsi in un ramo del sapere per acquistare quella competenza che permette di aspirare degnamente all'insegnamento dalla cattedra e nei laboratorî, tuttavia non amano la specializzazione minuta, limitata, quasi direi localizzata, perchè inaridisce il campo scientifico, e se pur lo sparge di fatti anche nuovi e interessanti, questi rimangono isolati, senza connessione, senza collegamento, mentre occorre elevarsi al di sopra dei fatti singoli, trovarne le relazioni che permettano di intravvedere prima, di afferrare poi e di concretare e stabilire infine le leggi generali delle quali i fatti non sono che una manifestazione isolata.

Perciò collo studio continuo e specialmente colla indefessa lettura Egli si era formata una coltura vasta e profonda che integrava e completava colla dimestichezza con uomini colti, con intellettuali.

E questa indispensabile preparazione unita alla agilità e alla acutezza del suo ingegno, alla facilità che era in lui di assimilare, di ordinare, di coordinare e di trarre le logiche conseguenze, rispondeva alle esigenze e alla natura della sua mente e alla tendenza del suo spirito eletto, che lo portavano alla sintesi. Ne conseguiva che egli era dotato di uno spirito critico, serio e acuto, e di notevole, marcato senso filosofico. E queste sue qualità spiccavano nella conversazione, che egli desiderava con scienziati, con artisti, con filosofi, con coloro insomma che ne sapevano comprendere l'anima. Possedeva fine senso artistico ed era intelligente di musica e amante delle arti belle, qualità che adornavano questo suo complesso spirituale. Nei suoi modi, nel suo dire era qualche cosa di aristocratico, di quella aristocrazia che sorge spontanea dalle persone elette che vivono nella scienza e per la scienza della quale fanno loro culto, e da esse emana e si stende sul volgo e svolge su di esso la sua benefica azione, che sempre svolgerà quali che siano i tentativi per negarla e gli sforzi messi in pratica per cercare di sopprimerla.

Per il sapere, per la cultura, per la mente equilibrata e la facoltà di retto giudizio Giuseppe Cuboni aveva acquistata grande autorità; e il suo parere, il suo consiglio erano ricercati perchè molto apprezzati. Fu infatti sempre ascoltato con deferenza nel Consiglio superiore della istruzione agraria, nella Commissione per le malattie delle piante, nel Comitato permanente dell'Istituto internazionale di agricoltura, nel Consiglio di amministrazione della Stazione di granicoltura di Rieti, in quello dell'Istituto di Genetica per la Cerealicoltura, e in altri uffici non pochi ai quali era stato chiamato e ai quali portò sempre validissimo contributo.

È passato oramai molto tempo, ma è opportuno ricordare quel periodo dell'ultimo quarto del secolo scorso nel quale si cominciava a comprendere la necessità di iniziare almeno quel movimento che doveva portare a cambiamenti profondi negli ordinamenti agrarî per mettere la nostra agricoltura sulla via indicata dalla scienza, creando gli organi della vita agraria che la rendessero attiva, fattiva. E di quanto fu iniziato, avviato, compiuto in quel tempo, il merito principale giustamente attribuiscono coloro che ebbero con lui dimestichezza, che con lui collaborarono, a Nicola Miraglia, il quale fu allontanato dal suo alto ufficio forse perchè aveva acquistata colla grande competenza troppa autorità. Egli cercava il parere dei competenti coi quali amava discutere prima di decidere, ma quando aveva ben compreso e si era fatto chiaro il concetto di ciò che si doveva fare, con rara energia di volontà, eseguiva. E molte istituzioni si debbono a lui, quasi direi a lui solo.

Così avvenne per la Stazione di Patologia vegetale di Roma, quando io al quale si ricorreva allora per quanto aveva relazione alle malattie delle piante, con tenace insistenza andavo dimostrando che era necessario uno speciale Istituto per lo studio delle importanti questioni che specialmente nella parte centrale e meridionale d'Italia attendevano chi ne cercasse la soluzione.

L'opera mia ebbe fortuna; la istituzione della Stazione di Patologia vegetale fu deliberata, e Giuseppe Cuboni che negli anni di lavoro, nella quiete del modesto laboratorio della Scuola Enologica di Conegliano si era fatto una ottima preparazione, fu degnamente scelto per fondarla.

Egli la diresse per ben 34 anni dal 12 novembre 1887 al 3 novembre 1920 dedicandovi sempre tutto il suo tempo e le cure più amorose. Fece egli stesso non poche ricerche sulle malattie dell'olivo, della vite, del castagno specialmente intorno a quelle più gravi e più discusse nelle loro cause, nel loro andamento e nel metodo di cura, e intorno ai fatti teratologici che insorgono in seguito all'azione di parassiti o di speciali condizioni sfavorevoli di vita.

Di alcune di queste ricerche fece conoscere i risultati, mettendo in luce fatti interessanti e nuovi, come ad es. la forma larvata della Peronospora della vite, e proponendo metodi di cura, fra i quali notevole la formola della

miscela cupro-calcica per prevenire e combattere la Peronospora, che è la più efficace e la più usata.

Ma nella sua Stazione Egli seppe attirare giovani desiderosi di imparare, e iniziandoli, dirigendoli, consigliandoli, aiutandoli in ogni modo, suscitare in essi l'amore per la patologia, e li avviava sul difficile cammino della ricerca scientifica. E così alcuni dei suoi allievi divennero valenti cultori e anche maestri egregi nel ramo di scienza che egli coltivava con tanto amore. Giuseppe Cuboni divenne infatti patologo insigne, anche perchè egli chiese ed ottenne di poter studiare da vicino, sul luogo, l'organizzazione dei servizi fitopatologici degli altri paesi, e fece un viaggio nei principali Stati di Europa intrapreso nel 1907 per incarico dell'Istituto internazionale di agricoltura, e partecipò a riunioni e a congressi internazionali per lo studio delle malattie delle piante coltivate e specialmente per avvisare ai mezzi di difesa contro le malattie stesse.

Risultato di questo continuo studio, di questo incessante lavoro fu una competenza veramente speciale e singolare da lui raggiunta in questo campo di studî, che gli diede modo e autorità di sostenere la necessità di provvedimenti legislativi in vantaggio della agricoltura nazionale. Ed ebbe infatti parte principale nella preparazione della legge sulle malattie delle piante, nella sua applicazione e in tutti i provvedimenti che furono presi man mano in seguito. E quantunque non manifestasse sempre la sua intera approvazione per ciò che si era fatto anche perchè talvolta non si era saputo dar forma esatta a quanto egli aveva suggerito, tuttavia si mostrava giustamente orgoglioso e soddisfatto di aver così potentemente contribuito a un'opera vantaggiosa per il paese.

Quantunque non abbia fatto ricerche speciali in quel vastissimo e importantissimo campo della moderna biologia delle piante che si comprende ora complessivamente sotto il nome di Genetica, tuttavia colla profonda conoscenza delle opere più importanti, col frequentare quei pochi che di siffatte questioni si occupavano, con viaggi a Upsala e a Sväloff e a Vienna, colla partecipazione nel 1906 al congresso internazionale di Londra per il miglioramento delle piante coltivate col mezzo della scelta e della ibridazione artificiali. Egli si era andato acquistando conoscenze e formando una preparazione tale da poter concorrere e colla parola nelle discussioni e nelle riunioni, e cogli scritti preparati con opportunità di tempo e di luogo, a diffondere la conoscenza dei risultati delle ricerche in questo interessantissimo campo della biologia; a volgarizzare le nuove idee intorno alle leggi che dominano, governano, regolano i fenomeni della variazione e della eredità negli organismi; a far apparire chiaro il significato eminentemente pratico delle ricerche e degli esperimenti scientifici rivolti a isolare razze nuove, a ottenere ibridi nuovi, le une e gli altri forniti di proprietà o qua-

lità nuove o non conosciute; a far rilevare la enorme importanza che essi possono, debbono avere nella agricoltura.

E potè ancora, insieme ad altri pochi animati dalla stessa volontà, sostenuti dagli stessi ideali, validamente contribuire, con lena indefessa e con autorità riconosciuta, a far comprendere la necessità che anche in Italia sorgessero Istituti per queste ricerche, i quali tanto splendidi risultati nel campo della scienza e in quello delle applicazioni pratiche alla agricoltura hanno dato e dànno negli altri paesi.

Si è detto da alcuno che già ha scritto di Giuseppe Cuboni, che Egli fu il primo a sollevare il problema della agricoltura meridionale. Senza dubbio Egli ne ebbe visione limpida e completa, ne comprese, come pochi lo seppero, tutta la sua vasta ampiezza e ne conobbe tutte le sue speciali caratteristiche.

Mettendo bene in luce le differenze fondamentali che sotto questo importantissimo punto di vista distinguono quasi nettamente le diverse parti d'Italia, sostenne che non si doveva e non si poteva senz'altro far tesoro dei frutti della esperienza maturati e raccolti in altre regioni con caratteristiche differenti, o in altri paesi di condizioni anche più diverse; ma che era necessario uno studio esteso e profondo di quel complesso di fattori specialmente biologici e agrarii che sono così strettamente legati alle condizioni di ambiente da assumere aspetto vario col variare delle condizioni stesse, fattori che nel loro insieme costituiscono e determinano appunto ciò che si dice ambiente agrario. Per la loro presenza, per il loro intervento originano condizioni agronomiche differenti, d'onde la necessità di ricercare, trovare, applicare metodi differenti; per cui si spiega il risultato infelice di tentativi fatti senza il sostegno dello studio scientifico di questi fattori e di questo ambiente. E per trovare la via buona da percorrere Egli dava con fine criterio suggerimenti e proponeva argomenti di studio insistendo specialmente sulla necessità di ricercare piante — specie, razze o ibridi — che fossero veramente addatte a vivere in condizioni di ambiente così speciali e capaci di resistere vittoriosamente in condizioni spesso così sfavorevoli per le piante dalle quali altrove si conseguono risultati così soddisfacenti. E ben seppe ottenerle con serietà, intensità e costanza di lavoro ammirevoli Nazareno Strampelli, che anche il Cuboni tanto apprezzava.

Per il conseguimento di questi alti scopi una piccola schiera di studiosi da lungo tempo combatteva per sostenere e dimostrare la necessità della preparazione scientifica per la sperimentazione agraria. E quantunque non ascoltati dagli indifferenti che sono la maggioranza, non compresi da coloro ai quali mancava la necessaria preparazione, e anche derisi dalla massa degli ignoranti appoggiata al deplorevole pregiudizio della inutilità pratica della scienza pura, sorretti da profonda convinzione, non scossi dalla

indolenza, dalla indifferenza e dalla opposizione dei più, stettero fermi e lottarono e lottano con fervore e con costanza. Di questa schiera ha fatto sempre parte Giuseppe Cuboni. Anch'egli sostenne sempre, che lo studio e la soluzione dei problemi agrarii trovano il loro fondamento soltanto nella sperimentazione la quale, alla sua volta, ha fondamento soltanto nella ricerca scientifica. Da ciò la necessità dell'intervento della cultura superiore e nel campo agricolo specialmente della cultura biologica. I fatti agrarii si riportano a fenomeni biologici fondamentali, che occorre saper cogliere, analizzare, rintracciandone i fattori e le cause per affrontare con sicurezza di risultati serii i problemi agrarii.

E queste ricerche devono compiersi in Istituti speciali sperimentali, costituiti e organizzati in modo da essere veri laboratorii di ricerche, nei quali lavoratori scientificamente preparati siano diretti da un uomo di scienza capace di sciegliere i problemi, di organizzare la sperimentazione, di dare l'indirizzo alle ricerche, di coordinare i fatti osservati e di trarne le necessarie conclusioni. Giuseppe Cuboni colla parola e cogli scritti, in ogni occasione, facendo apprezzare al suo giusto valore l'opera della scienza pura, fu tra coloro che più contribuirono a mettere in luce e a far comprendere il valore pratico della ricerca scientifica biologica. Che se non potè avere la soddisfazione di vedere coronato dal successo tutto il programma al quale egli così egregiamente collaborò, non gli è mancato il compenso morale, perchè l'idea per la quale Egli insieme agli altri pochi combatteva, riconosciuta, benchè faticosamente, fondata e giusta, è penetrata man mano nella coscenza degli uomini della scienza e della pratica, ha cominciato a far cammino e si va finalmente concretando colla fondazione dell'Istituto nazionale di Genetica, della Stazione sperimentale di Bari, col sorgere della Società agronomica italiana, colla trasformazione della Società degli Agricoltori italiani in Istituto nazionale di Agricoltura.

Il tre novembre del 1920 Giuseppe Cuboni si spegneva improvvisamente in Roma. Se il suo corpo non era più saldo da parecchio tempo, lo spirito suo era così limpido, la sua mente così chiara, che nessuno dei suoi cari e dei suoi amici aveva potuto pensare a una dipartita così inopinata.

La vita di Giuseppe Cuboni è un esempio non troppo comune di dedizione completa allo studio, alla coltura, al lavoro, alla propaganda scientifica. Egli è dunque ben degno di gratitudine, di riconoscenza, di ammirazione.

Commemorazione dell'Accademico sen. prof. GIOVANNI CELORIA, letta dal Socio CERULLI nella seduta del 6 marzo 1921.

Addì 17 agosto 1920 spegnevasi serenamente, in Milano, il nostro venerato Collega. sen. Giovanni Celoria, e l'Astronomia italiana che aveva visto in breve volger di anni scomparire uno Schiaparelli, un Lorenzoni, un Fergola, un Millosevich, tornava novamente a piangere la perdita di un Maestro!

A dirvi di Lui degnamente, cioè con sicura e piena nozione della sua opera scientifica, ben altra voce che la mia sarebbe occorsa. Ma piacque nondimeno all'illustre nostro Presidente darne a me l'incarico, in considerazione — senza dubbio — dell'ufficio tanto benignamente e senza mio merito, conferitomi testè dai colleghi astronomi, di preside del loro sodalizio; onde io, non che declinare l'onorifico invito, sentii anzi preciso dovere di accettarlo, porgendomisi con esso l'occasione ed il modo di tributare, a nome appunto di tutti gli astronomi italiani, onore alla memoria di un Uomo che non solo ebbe arricchita la scienza di nuovi preziosi dati di osservazione e di calcolo, ma anche felicemente si addentrò in ricerche originali, e qualche pagina ci lasciò degna di figurare fra le classiche dell'Astronomia.

Giovanni Celoria, nato a Casale di Monferrato, nel 1842, cominciò dall'attendere agli studî di ingegneria, e ne conseguì la laurea nel 1863 a Torino. Ma più che per la attività del tecnico egli era fatto per la meditazione scientifica. Nel suo primo opuscolo che s'intitolava dai *Movimenti perturbatori delle locomotive in corsa*, già l'ingegnere passava in seconda linea rispetto allo studioso, indagatore delle leggi della Meccanica. Gli studî d'ingegneria erano serviti a formargli la coltura matematica necessaria per la comprensione dei moti celesti, poichè egli aveva nutrito fin da fanciullo il desiderio di diventar astronomo.

A questo desiderio potè il Celoria dar soddisfazione l'anno appresso a quello della laurea. Avendo avuto la fortuna di conoscere di persona il prof. Schiaparelli, l'insigne direttore della Specola di Brera in Milano, ne ottenne di essere ammesso nella Specola stessa in qualità di allievo.

Schiaparelli, conosciuto allora soltanto come scopritore del pianeta Hesperia, era tal Maestro da indirizzare verso le più alte cime del sapere chi aveva la ventura di studiare sotto la sua guida. Il Celoria fu uno di questi fortunati, e si trovò presto in grado di porre mano a calcoli d'orbite di pianeti e comete, e collaborare alla compilazione delle *Efemeridi di Milano*, che vedevano la luce ogni anno per cura della Specola di Brera.

In nessuno degli ultimi nove volumi di quell'Annuario, dal 1866 al 1874, il nome del Celoria è assente. Cominciò dal figurarvi col calcolo di Hesperia, il pianeta del suo Maestro, e passò man mano a quelli di Euphrosyne, di

Fides, di Clitia: richiamando con la sua valentia, l'attenzione e le lodi del nestore degli astronomi italiani, Giovanni Santini. Alle stesse *Efemeridi* fornì anche per tre anni di seguito il calcolo delle costanti besseliane per la riduzione delle posizioni stellari al luogo medio.

Oltre a ciò, si occupò in quel primo periodo della sua vita scientifica di questioni meteorologiche, come allora molti altri astronomi erano costretti a fare, non essendo ancora la Meteorologia una scienza coltivata a parte. Sono apprezzate Memorie sulle aurore boreali dell'ottobre 1870, sul sincronismo delle variazioni di temperatura e pioggia col periodo delle macchie solari, sul grande commovimento atmosferico del 1° agosto 1872 nella bassa Lombardia e nella Lomellina, ecc., e vi è anche uno studio interessantissimo sulle temperature estreme osservate in Milano in un secolo, a partire dal 1763.

Ma quanto all'Astronomia, i calcoli *obbligati* per l'*Efemeride* assorbivano il Celoria quasi del tutto, restandogli appena tempo per una determinazione di latitudine in primo verticale e sistematiche osservazioni di fisse in meridiano. Decisamente quei calcoli erano soverchi, e possiamo anche aggiungere, *nocivi* per la loro uniformità. Poichè se un primo calcolo di qualsiasi fenomeno celeste è sempre istruttivo, lo è meno un secondo, nel quale si tratta di ripetere un processo già appreso, e non più istruttivo affatto un terzo, di guisa che l'astronomo corre pericolo di non distinguersi più da un computista di mestiere che sa maneggiare i logaritmi. Fu quindi nuova fortuna per il Celoria che nel 1875 Schiaparelli decidesse di sopprimere le oramai superflue efemeridi di Milano. Immediatamente se ne colsero i frutti in ciò che gli astronomi di Brera ebbero libertà di attendere a ricerche proprie, da cui la scienza si avvantaggiò, giusta quanto Schiaparelli aveva preveduto e promesso nella prefazione all'ultimo volume.

Si può dire che subito, con quella beneaugurata soppressione comincia il miglior periodo dell'attività astronomica del Celoria. Non soltanto egli intensifica il lavoro, diremo così, *corrente*, d'Osservatorio, con una nuova determinazione di latitudine, con osservazioni di eclissi, con calcoli di comete di nuova apparizione, con osservazioni di passaggi di Venere e Mercurio avanti al Sole, con determinazioni di luoghi stellari e di asteroidi ecc. ecc., ma si applica anche a problemi che particolarmente lo interessano, dando successivamente in luce una serie di importantissime Memorie che illustrano lui e la sua Specola.

In ordine di tempo vengono primi i lavori su tre eclissi storiche; poi quello sugli scandagli stellari; indi quelli su talune comete del secolo XV, in quarto luogo i difficili calcoli delle orbite delle stelle doppie Σ 3121, OΣ 298, β Delphini, γ Coronae, μ Herculis.

Sono quattro gruppi di Memorie, dell'ultimo dei quali poco o nulla potrebbe dirsi senza entrare in particolari tecnici; ma sui tre primi possiamo dare qui un breve cenno, disponendoli in ordine crescente di importanza.

Sulle comete degli anni 1433, 1449, 1456, 1457, 1472 l'attenzione del Celoria fu attratta dall'essersi trovato nella Biblioteca nazionale di Firenze un manoscritto di Paolo Toscanelli che di esse comete conteneva osservazioni. Un fac-simile del manoscritto essendo stato trasmesso da Gustavo Uzielli al Celoria, questi si era persuaso che le osservazioni in parola sono assai preziose, e dànno al Toscanelli il vanto di aver prima di ogni altro osservato le comete con occhi di astronomo anzichè di astrologo, vanto che di solito si aggiudica al Regiomontano.

Perciò il Celoria concepì l'idea di trarre dalle osservazioni del Toscanelli le orbite delle dette comete, e vi riuscì abbastanza sicuramente ad onta di non lievi incertezze nelle sistematiche correzioni che trovò da applicare alle posizioni date dal Toscanelli in numeri, o graficamente deducibili dai di lui disegni.

Una di codeste Comete, quella del 1456, è la stessa che tornata al perielio nel 1531, nel 1607, e nel 1682, dette origine ai famosi calcoli di Edmondo Halley, di cui porta il nome. Mancò al Celoria opportunità di esaminare in qual misura gli elementi tratti dalle osservazioni di Toscanelli concordassero con gli elementi della cometa, quali sono conosciuti oggi. Questo confronto avrebbe richiesto una mole immensa di calcoli di perturbazioni, senza che forse ne valesse la pena.

Nelle due prime Memorie sopra eclissi storiche, il Celoria studiò le eclissi solari del 1239 e del 1241 nello intento di appurare se le loro rispettive Zone di totalità che con gran fatica gli era riuscito di definire in base a documenti storici di quell'epoca, coincidessero con quelle che per le stesse eclissi egli aveva calcolate dalle tavole lunari di Hansen. Egli trovò che in realtà le Zone calcolate ed osservate differiscono fra loro, che quindi le tavole di Hansen sono in errore, e che la longitudine della Luna ne risulta, per quell'epoca, minore del vero. Ma egli stesso commetteva un errore di segno: e se ne accorse due anni dopo pubblicata la seconda Memoria, quando venne in luce un gran lavoro di Newcomb, che faceva positivi e non negativi gli errori delle longitudini lunari di Hansen per l'antichità. Tosto il Celoria ripetè, in una terza Memoria, i suoi calcoli, e trovò che effettivamente anche le longitudini del 1239 e del 1241 sono da diminuire: ma insieme estese la ricerca ad un eclisse solare molto più remoto, quello del 310 a. C. che la Storia racconta essere stato osservato da Agatocle, re di Siracusa, mentre navigava con la sua flotta contro Cartagine.

Per paragonare la linea di totalità effettiva dell'eclisse con quella data dalle tavole di Hansen, Celoria identifica arditamente l'eclisse stesso con un altro eclisse di Sole di cui si fa menzione, senza data, da autori greci; il quale fu totale sull'Ellesponto, o in prossimità dell'Ellesponto, e di $^{4}/_{5}$ del diametro solare ad Alessandria di Egitto. Così egli si accorge che anche per l'eclisse di Agatocle, la cui Zona di totalità, in base alla identificazione ora detta, deve correre dalla Sicilia all'Ellesponto, la teoria di Hansen dà

una Zona diversa dalla vera. Ed anche constata che la falsa Zona stando a Sud della vera, la correzione delle longitudini tabulari è negativa, come per le eclissi medioevali.

Questa terza Memoria sulle eclissi storiche è del 1880, quando non ancora era apparso il mirabile *Canon der Finsternisse* di Oppolzer, ed ancor più lontana era l'apparizione dello *Spezieller Canon* di Ginzel. È possibile, oggi, guardando le magnifiche carte dello *Spezieller Canon*, restar in dubbio se l'eclisse ellespontico di cui parlano gli autori greci sia stato veramente lo stesso che l'eclisse di Agatocle, o non piuttosto quegli autori abbiano inteso l'eclisse del 129 a. C. Essi non parlano infatti nè di Agatocle e della sua flotta, nè della Sicilia, ma solo dell'Ellesponto e di Alessandria, ed aggiungono che l'eclisse fu utilizzato da Ipparco per un nuovo calcolo della parallasse lunare. Ora Ipparco si servì probabilmente di un eclisse da lui stesso osservato, quello del 129 a. C. che ad Alessandria fu appunto di $^4/_5$, e non aveva alcun bisogno di risalire ad un eclisse di 181 anni prima.

Ciò può, ripeto, sospettarsi con l'Atlante di Ginzel sotto gli occhi, ove si vede la Zona di totalità della eclisse di Ipparco rasentare l'Ellesponto anche più da vicino di quel che faccia la Zona dell'eclisse di Agatocle, e consultando le tabelle delle fasi, annesse all'Atlante, si trova che entrambe le eclissi furono in Alessandria di $^4/_5$.

Ma l'Atlante di Ginzel è venuto 19 anni dopo il lavoro del Celoria, e lo *Spezieller Canon* è costruito sopra una Teoria lunare già notabilmente progredita rispetto a quella da cui il Celoria prendeva le mosse. Le tavole di Hansen assegnavano all'eclisse di Ipparco una Zona di totalità assai più australe che all'eclisse di Agatocle, e non era punto ovvio di prevedere che piccoli cambiamenti degli elementi dell'orbita lunare avrebbero potuto trasportare, per paesi prossimi all'Ellesponto, il primo eclisse leggermente a nord del secondo.

Del resto con la sua ardita identificazione delle due eclissi, col ritener cioè a priori che l'eclisse di Agatocle dovesse esser passato per l'Ellesponto, Celoria poteva esser certo di non esporsi ad errori sensibili, per quel che riguarda la teoria lunare. L'essenziale era che la totalità calcolata venisse spinta a nord così da coprire la Sicilia, nei pressi delle cui coste la flotta di Agatocle fu, come narra Diodoro, colta dall'eclisse. E naturalmente se la Zona ad occidente raggiungeva la Sicilia, doveva ad oriente avvicinarsi di molto all'Ellesponto, correndo essa inclinata sul parallelo appunto di quanto occorre perchè la detta coincidenza si verifichi.

Oltre il pregio di poter dar luogo a discussioni e a nuove ricerche del genere qui accennato, la Memoria in parola ha anche quello di essere una vera miniera in materia di eclissi antiche. Per arrivare ad un eclisse cognito ad Ipparco, e che correndo dalla Sicilia all'Ellesponto, fosse osservato di $^4/_5$ ad Alessandria, Celoria calcolò tutte le eclissi solari che devono esserci state nell'antichità, a partire dalla fondazione di Alessandria, cioè dal 333

fino al 100 a. C., quando certamente Ipparco più non viveva. Furono ben 181 codeste eclissi di Sole calcolate, delle quali 138 totali e 43 anulari!

Prima di Oppolzer e di Ginzel nulla si era prodotto di più grandioso in questo campo. A ragione la nostra Accademia coronò l'opera del Celoria di metà del premio reale.

Ma più che nei lavori sulle eclissi storiche, la genialità e l'acume del Celoria rifulsero nell'opera sugli scandagli stellari, da lui eseguita nell'intento di formarsi un'idea della distribuzione delle stelle nello spazio. Celoria trovò il modo di contare abbastanza sicuramente, di 10 in 10 minuti di ascensione retta, e limitatamente alla Zona di cielo interposta fra l'equatore ed il 6° grado di declinazione boreale, tutte le stelle fino alla 11ma grandezza, in guisa da venire a conoscere per ogni unità di area celeste la densità stellare corrispondente. Queste densità, successivamente perequate di tre in tre unità, dettero una curva atta a rappresentare nei suoi tratti essenziali e più caratteristici, l'andamento degli scandagli lungo l'equatore. Ma Celoria sagacemente intuì che la curva stessa ancora molto altro avrebbe rivelato, se messa in confronto con la curva di distribuzione delle stelle lucide da una parte e con quella data dall'insieme di tutte le stelle visibili nei maggiori strumenti, dall'altra Perciò ripetè il processo della perequazione sopra le stelle della Uranometria di Argelander, sulle stelle della Durchmusterung, e sulle stelle saltuariamente scandagliate da Herschel, ed ebbe in tutto, compresa la curva di Milano, 6 curve, rappresentanti le densità areali delle stelle limitatamente a sei tipi diversi di grandezze. La lucidità di pensiero e l'acume naturalistico con cui egli ha fatto i confronti fra codeste curve, cominciando dal renderle effettivamente comparabili, sono superiori ad ogni elogio, ed in troppi particolari bisognerebbe entrare per descriverne anche alla lontana il procedimento. A me basti dire che quei confronti rivelarono in modo inconfutabile l'essenziale della costituzione della Via lattea, consistere cioè questa di due anelli inseriti l'uno nell'altro.

Questa Memoria sugli scandagli è certamente il capolavoro di Celoria; vera opera classica, il cui studio sarà sempre da raccomandare a quei giovani che vogliano efficacemente esercitare il cervello nello strappar segreti alla Natura.

E non vale il dire che la ipotesi, o piuttosto la tesi dei due anelli, è ora *sorpassata*. Se abbiamo sostituito al doppio anello la spirale, lo abbiamo fatto per analogia, dopo che abbiamo visto il cielo disseminato di nebule spirali, onde ci è venuto in mente che anche la Galassia potesse essere una nebula spirale; ma se di questo cerchiamo la prova diretta, ci accorgiamo di non poter a stretto rigore dimostrare altro se non che un ramo della Via lattea c'è più vicino, ed un altro più lontano, e ciò ripetendo *ad literam* il ragionamento del Celoria.

Vero è che le scienza astronomica non tarderà molto a scandagliare direttamente le profondità dei diversi punti della Galassia; ma non per questo

il ragionamento di Celoria perderà del suo valore, ed avrà sempre diritto alla nostra ammirazione quando riflettiamo che esso è anteriore alla catalogazione spettrale delle stelle ed all'impiego della fotografia.

Quell'opera che brilla anche per estremo di chiarezza e per forbito stile, è disgraziatamente poco letta all'estero, ove molti astronomi non aggiudicano altro merito agli scandagli milanesi se non quello di aver fornito importanti dati al Seeliger per la deduzione delle sue famose leggi sulla distribuzione stellare. I più ignorano che anche indipendentemente da ciò lo scritto del Celoria accolga tanto tesoro d'intuizione, da bastar da solo a giustificar la fama dell'autore.

Quando Schiaparelli si ritirò dalla direzione dell'Osservatorio di Brera (1900) e la cedette al Celoria, questi era già quasi sessantenne, ma non smise per questo di prendere parte attiva ai lavori astronomici. Nell'elenco delle sue pubblicazioni che ho l'onore di presentar all'Accademia e che è dovuto allo zelo di un suo diletto discepolo, il prof. Gabba, trovo infatti che è del 1901 un Catalogo di 1119 stelle, elaborato, è vero, in compagnia di Schiaparelli per gran parte in anni anteriori al 1900, ma che pure molta fatica richiese per esser reso suscettibile di pubblicazione. Trovo pure, nello stesso elenco, nuovamente osservazioni di pianeti, di comete, di eclissi solari e lunari ecc. ecc.; ma so anche che una parte notabile di lavoro spettante a quest'ultimo periodo della sua vita astronomica, in quell'elenco non figura, perchè ancora inedito. Sono le misure di stelle doppie, alle quali il Celoria attese con alacrità, mosso dallo stesso pensiero che aveva animato Schiaparelli: questo genere di misure ai grandi refrattori essere uno dei più importanti finchè non sia scoperto il modo di eseguirlo per mezzo della fotografia.

Contemporaneamente alla nomina di Direttore dell'Osservatorio di Brera, Celoria fu anche eletto presidente della Commissione geodetica, onde la sua grande attività dovè dividersi in ultimo fra l'Astronomia e la Geodesia, ed a questa seconda non furono dedicate dall'insigne uomo le minori cure. Aveva in essa una specialissima competenza essendo stato insegnante di geodesia teoretica al R. Istituto superiore di Milano per ben 35 anni, e s'era sempre interessato ai di lei progressi prendendo parte a ben 12 determinazioni di differenza di longitudine fra l'osservatorio di Milano ed altri osservatorî italiani ed esteri. Perciò la carica di presidente della Commissione geodetica era fatta proprio per lui, e la tenne sapientemente fino agli ultimi suoi giorni, anche quando per aver raggiunto il limite di età consentito dalla legge, dovette abbandonare la direzione dell'Osservatorio; anche quando gli acciacchi della vecchiezza cominciavano a farsi sentire, e gli si fu manifestato quel tormentoso morbo della neuralgia al trigemino che gli venne rapidamente fiaccando la forte fibra.

Presiedè, ripeto, la Commissione geodetica, da gran Maestro, ed aggiungo che a Lui si deve se l'Italia ha potuto prender parte a taluna delle imprese

scientifiche internazionali meglio riuscite, come ad es., la determinazione sistematica degli spostamenti endotellurici dell'asse di rotazione della Terra. Pur troppo egli è morto con la pena nel cuore di veder interrotto quel magnifico lavoro in conseguenza funesta della guerra, ma senza rammarico di non aver fatto il suo dovere perchè l'opera a malgrado della guerra si continuasse La nostra stazione delle latitudini a Carloforte è rimasta, infatti, per volontà del Celoria, sempre in funzione, ed i nostri giovani astronomi han potuto continuare a darvi prove della loro gran valentia nel maneggio del Zenitale, onde quello che c'è da deplorare si è che non in tutte le stazioni estere vi sia stata eguale buona volontà da parte dei Direttori o degli esecutori. Ma il fenomeno è senza dubbio passeggero, e forse fra qualche anno potremo festeggiare un'Unione veramente internazionale fra gli uomini di scienza, e con essa la rinascita dell'opera delle latitudini: Celoria ne esulterà nella tomba!

Merita finalmente uno speciale elogio l'opera spesa dal Celoria in pro' della divulgazione dell'Astronomia e scienze affini. Per 35 anni egli fornì all'Annuario scientifico industriale del Treves articoli concernenti i progressi dell'Astronomia, ed in una lunga serie di Monografie e di articoli per giornali politici s'ingegnò di diffondere nel popolo il tesoro delle sue conoscenze astronomiche. Aveva uno stile facile ed attraente, ed era sicuro di trovar lettori. Perchè poi il pubblico di Milano maggiormente s'interessasse della Astronomia, istituì nel Circolo filologico della capitale lombarda una piccola società astronomica, i cui componenti spesso si riunivano ad ascoltare le sue istruttive conferenze.

Quest'Uomo, dotato di un equilibrio perfetto di facoltà, non considerò solo (e talora con l'occhio del genio) i problemi della Scienza, ma seppe scendere anche a quelli della vita pratica, della vita civile. La sua parola sempre lucida e serena illuminò spesso le menti dei suoi Colleghi Consiglieri comunali di Milano, e quando nel Comune stesso fu assessore, ben ardue questioni, relative alla istruzione pubblica, trovarono in lui chi sapientemente le esaminò e le risolse. Milano egli considerò come patria di elezione ed al bene di essa continuamente si adoperò, riscuotendone larga mercede di affetti e di venerazione, cosicchè quando il Governo lo elevò alla dignità di Senatore, oltre rendere omaggio solenne alla Scienza, ebbe anche in mira la soddisfazione di un vivo desiderio pubblico.

Ma di Celoria, uomo politico, altri han detto e diranno fuor di qui. A me non spettava che di commemorare l'astronomo, dimostrando che egli fu degno successore degli Oriani, dei Carlini e degli Schiaparelli, ed aggiunse — cosa tutt'altro che facile — nuovo lustro e decoro alla celebre specola di Brera.

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXX. (1892-1921). Fasc. 3°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 7°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 6.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 marzo 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile*

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane.* III: *Le varietà di Jacobi.* Nota del Socio G. CASTELNUOVO.

9. Tra le varietà abeliane [1] rientrano, come casi particolari notevoli, le *varietà di Jacobi*. Si indica con questo nome una V_p, i cui punti corrispondono birazionalmente ai gruppi di p punti, G_p, di una curva C di genere p; supporremo soddisfatta la condizione che gruppi equivalenti (speciali) di C abbiano per immagine un solo punto di V_p. Se indichiamo con $j_1(\zeta), \dots, j_p(\zeta)$ i valori di p integrali indipendenti di prima specie nel punto ζ di C, la V_p si definisce esprimendo che le coordinate cartesiane $x_1, \dots, x_{p+1}$ di un suo punto generico sono $p+1$ funzioni abeliane indipendenti [II, (21)] dei p parametri

$$u_i = j_i(\zeta_1) + j_i(\zeta_2) + \cdots + j_i(\zeta_p) \qquad (i = 1, 2, \dots, p). \tag{29}$$

La matrice dei periodi di queste funzioni può sempre supporsi ridotta al tipo normale

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{array}\right| \qquad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki}). \tag{30}$$

[1] Ved. le due Note precedenti, che verranno indicate con I e II; questi Rendiconti, vol. XXX, 1° sem. 1921, fasc. 2°, pag. 50, e fasc. 4°, pag. 99.

La V_p di Jacobi presenta, rispetto alle varietà abeliane generali, alcune particolarità dipendenti dal fatto che i gruppi speciali G_p della curva C (appartenenti dunque alla serie canonica g_{2p-2}^{p-1}) hanno per immagini in V_p i punti di una varietà algebrica W_{p-2} a $p-2$ dimensioni (ogni punto della quale rappresenta infiniti G_p equivalenti).

Nella V_p di Jacobi è sempre contenuto un sistema continuo ∞^p $\{\Theta\}$ di varietà a $p-1$ dimensioni, rappresentate dall'annullarsi di una funzione Θ del 1° ordine (ϑ riemanniana). Ciascuna di quelle rappresenta gli ∞^{p-1} G_p contenuti in una serie non speciale g_{2p-1}^{p-1}. Se questa serie si riduce alla g_{2p-2}^{p-1} canonica, ai cui gruppi sia stato aggiunto un punto fisso a, la corrispondente varietà Θ diviene (come diremo) *speciale*, passa per la W_{p-2} e rappresenta l'insieme dei gruppi G_p che hanno un punto fisso a. Esistono ∞^1 varietà Θ speciali; due, tre, ..., $p-1$ di esse si intersecano, fuori di W_{p-2}, in una varietà a $p-2$, $p-3$, ..., 1 dimensione, la quale rappresenta i G_p con $2, 3, \ldots, p-1$ punti fissi.

10. Supponiamo ora che in V_p esista una varietà intermediaria, a $p-1$ dimensioni, Φ, cogli interi caratteristici m_{ik} ed il determinante $\delta = \sqrt{\|m_{ik}\|} > 0$ (I, n 1; II, n. 5); la Φ formerà parte di un sistema continuo $\{\Phi\}$ $\infty^{p+\delta-1}$.

Il numero delle intersezioni di p varietà, delle quali h scelte entro il sistema $\{\Theta\}$ e $p-h$ nel sistema $\{\Phi\}$, si determina seguendo le tracce di II, n. 6. Si formerà il determinante $\|m_{ik} + r\mu_{ik}\|$, dove r è un parametro e le μ_{ik} sono tutte nulle tranne le $\mu_{i,i+p} = -\mu_{i+p,i} = 1$; se ne costruirà il pfaffiano; se $\binom{p}{h} I_{p-h}$ è il coefficiente di r^h nel detto polinomio, il numero richiesto sarà

$$[\Theta^h \Phi^{p-h}] = p!\, I_{p-h}. \tag{31}$$

Questo risultato può anche esprimersi in forma diversa, ove si riprenda la rappresentazione geometrica dello Scorza (I, n. 2), in cui le p righe della matrice (30) hanno per immagini p punti di uno spazio Σ_{2p-1}, i quali vi determinano uno spazio τ a $p-1$ dimensioni. Ai sistemi continui $\{\Theta\}$ e $\{\Phi\}$ sono associate due reciprocità nulle dello spazio Σ_{2p-1}

$$A \equiv \Sigma(\xi_l \eta_{p+l} - \xi_{p+l}\eta_l) = 0 \ , \qquad B \equiv \Sigma\, m_{ik}\, \xi_i \eta_k = 0$$
$$(l = 1, \ldots, p\ ; \qquad i, k = 1, \ldots, 2p)$$

che mutano ogni iperpiano per τ in un punto di τ. La omografia prodotto $A^{-1}B$, che ha il determinante

$$\delta^2 = \|m_{ip+1} \ldots m_{i\,2p} \quad -m_{i1} \ldots -m_{ip}\| \qquad (i = 1, \ldots 2p),$$

trasforma τ in se stesso. Segue (Scorza) l'esistenza di p^2 costanti π_{hl} (per

$h, l = 1, \dots, p$) le quali soddisfano alle $2p^2$ uguaglianze

$$(32)\qquad \begin{cases} \pi_{hl} = m_{l\,p+h} - m_{l1}\,\sigma_{h1} - \cdots - m_{lp}\,\sigma_{hp}\,, \\ \sum_{i=1}^{p} \pi_{hi}\,\sigma_{il} = m_{p+l\,p+h} - m_{p+l1}\,\sigma_{h1} - \cdots - m_{p+l\,p}\sigma_{hp}\,. \end{cases}$$

Di qua risulta (con Hurwitz) che le p relazioni

$$(33)\qquad j_h(\zeta'_1) + \cdots + j_h(\zeta'_p) = \pi_{h1}\,j_1(\zeta) + \pi_{h2}\,j_2(\zeta) + \cdots + \pi_{hp}\,j_p(\zeta)$$

definiscono una corrispondenza algebrica sulla curva C, per la quale ad ogni punto ζ corrispondono p punti $\zeta'_1, \dots, \zeta'_p$; la corrispondenza è simmetrica nel senso di Rosati, cioè equivalente alla propria inversa.

Per interpretare il risultato teniamo presente che una varietà intermediaria Φ, entro V_p, rappresenta su C una serie algebrica ∞^{p-1} di gruppi di p punti, cioè una γ_p^{p-1}, il cui gruppo generico è non speciale. La serie (come la Φ) appartiene ad un sistema continuo $\infty^{p+\delta-1}$. Viceversa ogni serie γ_p^{p-1} di gruppi non equivalenti è rappresentata da una Φ. Si vede dunque che *ad ogni serie algebrica* γ_p^{p-1} *della curva* C *è collegata una corrispondenza algebrica simmetrica sulla* C. Precisamente, data la γ_p^{p-1}, od una qualunque serie del sistema continuo a cui essa appartiene, restano determinate le infinite corrispondenze che, nella rappresentazione analitica, presentano gli stessi moltiplicatori π_{hl} o $-\pi_{hl}$. Quale sia il legame geometrico tra la serie ed una delle dette corrispondenze sarà visto nelle ultime righe di questa Nota.

Coi coefficienti π_{hl} formiamo la equazione caratteristica

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} \pi_{11} + r & \dots & \pi_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pi_{p1} & \dots & \pi_{pp} + r \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$(35)\qquad r^p + i_1\,r^{p-1} + \cdots + i_{p-1}\,r + i_p = 0 \qquad (i_p = \delta).$$

I caratteri i_h sono *invarianti* della corrispondenza (33) o della serie γ_p^{p-1}, sia rispetto alle trasformazioni birazionali della curva, sia rispetto ai cambiamenti dei tagli canonici sulla relativa riemanniana. Il loro significato geometrico risulta chiaro, se si ricorda [1] che il quadrato del determinante (34) uguaglia il determinante $\|m_{ik} + r\mu_{ik}\|$ sopra considerato, e che quindi il polinomio (35) ne è il pfaffiano. Con ciò la (31) diviene

$$(36)\qquad [\Theta^h\,\Phi^{p-h}] = h\,!\,(p-h)\,!\;i_{p-h}$$

e dà luogo al seguente enunciato:

[1] Ved. ad es. Rosati, *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche* ..., in Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino, vol. 53 (1917).

Insieme ad una serie algebrica γ_p^{p-1} sopra una curva di genere p si considerino le infinite serie del sistema continuo a cui essa appartiene, e le serie $\gamma_p^{p-2}, \gamma_p^{p-3}, \ldots$ formate dai gruppi G_p comuni a due, tre ... di quelle serie. Il numero dei gruppi G_p che stanno in una di queste γ_p^h e in h serie lineari g_{2p-1}^{p-1} è generalmente finito ed è dato dalla formola (36).

11. Vi sono però altri caratteri più espressivi della γ_p^h che interessa conoscere; ad es. l'*indice*, cioè il numero dei gruppi della serie che contengono h punti generici di C. È questo il numero delle intersezioni, entro V_p, di $p-h$ varietà del sistema $\{\Phi\}$ e di una varietà V_{p-h} rappresentante i G_p con h punti fissi; la quale V_{p-h}, come fu già detto (n. 9), è intersezione parziale di h varietà Θ speciali. Si tratta dunque di decidere quante delle intersezioni (36) vengano assorbite dalla W_{p-2} per cui passano ora le h varietà Θ. Questo difficile problema di geometria numerativa son riuscito a risolvere soltanto col rendere particolare la curva C; procedimento non immune da obbiezioni. Siccome però le formole ottenute trovano conferma in tutti i casi in cui ho potuto trattare il problema con metodi rigorosi, credo opportuno accennare a quel procedimento e al risultato, la conoscenza del quale potrà suggerire altre vie di ricerca

Consideriamo $h-1$ varietà Θ passanti per la W_{p-2}, le quali si segano, fuori di questa, in una V_{p-h+1}, immagine dei G_p con $h-1$ punti fissi $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$. La V_{p-h+1} interseca W_{p-2} lungo una varietà W_{p-h}, immagine dei G_p *speciali* con $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$ fissi. La stessa V_{p-h+1} è poi segata da una nuova Θ passante per W_{p-2}, lungo quella W_{p-h} e la V_{p-h} dei G_p con h punti fissi $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h$. Si ha dunque, con una scrittura assai chiara,

$$[\Theta V_{p-h+1}] = W_{p-h} + V_{p-h}\,; \tag{37}$$

e la relazione vale anche se la Θ è una varietà generica del sistema $\{\Theta\}$, purchè si intenda allora che la varietà a $p-h$ dimensioni del primo membro e la varietà spezzata del secondo membro appartengono ad uno stesso sistema continuo entro V_{p-h+1}. Seghiamo ora queste due varietà (37) con una stessa varietà U_h ad h dimensioni, la quale le intersechi in un numero finito di punti. Avremo la uguaglianza tra numeri di intersezioni

$$[\Theta V_{p-h+1}\, U_h] = [W_{p-h}\, U_h] + [V_{p-h}\, U_h]\,. \tag{38}$$

Per stabilire una relazione tra i due addendi a secondo membro, particolarizziamo la curva C, ammettendo che essa sia iperellittica, ed indichiamo con a_i, a_i' punti coniugati nella g_2^1. Allora i G_p speciali aventi le immagini in W_{p-h} sono gruppi che hanno come fissi i punti $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$ e contengono inoltre o il punto a_1', o il punto $a_2', \ldots$, o il punto a_{h-1}', o una coppia generica di punti coniugati bb'. La W_{p-h} si spezza dunque in $h-1$ varietà del sistema continuo a cui appartiene la V_{p-h}, più una

W_{p-h-1} immagine dei G_p contenenti $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, b, b'$. Poichè la W_{p-h-1} non sarà incontrata generalmente dalla U_h, segue che

$$[W_{p-h}\, U_h] = (h-1)\,[V_{p-h}\, U_h]$$

e quindi, (38),

$$[\Theta V_{p-h+1}\, U_h] = h\,[V_{p-h}\, U_h].$$

Se si chiama U_{h-1} la intersezione di U_h con una Θ, poi U_{h-2} la intersezione di U_{h-1} con una Θ, ecc., si ha una serie di relazioni dalle quali, eseguendo il prodotto, si ottiene

$$(39) \qquad [V_p\, U_0] = h!\,[V_{p-h}\, U_h],$$

dove il primo membro indica il numero delle intersezioni di U_h con h varietà Θ. In particolare, se U_h è l'intersezione di $p-h$ varietà del sistema $\{\Phi\}$, il primo membro della (39) ha il valore (36). Segue che

La serie γ_p^h ha l'indice

$$(40) \qquad \nu_h = (p-h)!\; i_{p-h},$$

donde una nuova interpretazione degli invarianti i.

Lo stesso procedimento, mutando il significato particolare di U_h, ci fa vedere che *il numero dei gruppi della serie γ_p^h che hanno $h_1 \leqq h$ punti fissi ed appartengono ad $h-h_1$ serie g_{2p-1}^{p-1} è*

$$(41) \qquad \frac{(p-h)!\; h!}{h_1!}\; i_{p-h}.$$

La formola (40) ha una notevole interpretazione analitica. Sia $\varphi((u))$ una funzione intermediaria dei parametri $u_1, \ldots, u_p$ dati dalle (29). Formiamo le $k = p-h$ equazioni

$$(42) \qquad \varphi((j(\zeta_1) + j(\zeta_2) + \cdots + j(\zeta_k) - e^{(l)})) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, k),$$

ove le incognite sono k punti $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ della curva C, e le $e_1^{(l)}, e_2^{(l)}, \ldots, e_p^{(l)}$ sono pk costanti. *Il numero dei gruppi di soluzioni* $(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ *delle equazioni* (42) *è* $k!\, i_k$.

Se le funzioni φ sono Θ del primo ordine, nel qual caso $i_k = \binom{p}{k}$, il risultato è stato stabilito da Poincaré e Wirtinger, ed è pur contenuto in una formola colla quale Comessatti e Göhner assegnano il numero dei gruppi di k punti comuni a k serie lineari di dimensione $k-1$. Nella stessa ipotesi, per $k=1$, si ha un noto teorema di Riemann. L'indicatore logaritmico, di cui egli si vale per stabilirlo, può pure applicarsi ad una funzione intermediaria qualsiasi e conduce a trovare $\sum_{l=1}^{p} m_{l,l+p}$ soluzioni, il qual numero si riconosce proprio uguale ad i_1.

Anche il procedimento dato da Riemann per stabilire le relazioni tra i p zeri di una ϑ si estende alla φ e fa vedere che tra le radici $\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(i_1)}$ della (42), per $k = 1$, passano le relazioni

$$(43)\quad j_h(\zeta^{(1)}) + \cdots + j_h(\zeta^{(i_1)}) = \pi_{h1}\, e_1^{(1)} + \cdots + \pi_{hp}\, e_p^{(1)} + \pi_h \quad (h = 1, \dots, p),$$

dove le π_{hl} sono date dalle (32) e le π_h sono costanti, indipendenti dalle $e^{(1)}$. Segue che la corrispondenza simmetrica (i_1, i_1) determinata sulla C dalla γ_p^{p-1}, quando in essa si tengano fissi $p-2$ punti e si chiamino ζ, ζ_1 i rimanenti due di ciascuno degli ∞^1 gruppi, è rappresentata dalle formole

$$(44)\quad j_h(\zeta_1^{(1)}) + \cdots + j_h(\zeta_1^{(i_1)}) = -[\pi_{h1}\, j_1(\zeta) + \cdots + \pi_{hp}\, j_p(\zeta)] + \pi_h$$

ed è quindi equivalente alla (33); donde una semplice interpretazione geometrica del primo enunciato del n. 10.

Matematica. — *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Nota I del Socio C. Segre [1].

1. Data una superficie F appartenente a uno spazio S_5, e un suo punto regolare x, fra gl'iperpiani che segano F secondo linee con *punto doppio* in x, — ossia iperpiani passanti pel piano π tangente a F in questo punto, — ne esistono ∞^1 per cui x diventa una *cuspide*, e son quelli tangenti al noto cono quadrico V_4^2 di Del Pezzo uscente da π, che contiene i punti di F infinitamente vicini a x di 1° e di 2° ordine. Fra gli ∞^1 iperpiani ve ne sono poi, in generale, *cinque*, che dànno sezioni aventi in x un *tacnodo* [2].

Le 6 coordinate omogenee x_i del punto x di F siano funzioni dei due parametri u, v. Le derivazioni successive rispetto a questi s'indichino apponendo gl'indici superiori $1, 2$, sicchè sia inteso che questi non significheranno esponenti di potenze; e si scriva (ξx) in luogo di $\Sigma \xi_i x_i$, ecc. Si esprime che un iperpiano di coordinate ξ_i sega F in una curva avente in x un tacnodo, colla tangente nella direzione $du : dv$, ponendo le 6 equazioni:

$$(1)\qquad (\xi x) = 0 \ , \ (\xi x^1) = 0 \ , \ (\xi x^2) = 0$$

$$(2)\qquad (\xi x^{11})\, du + (\xi x^{12})\, dv = 0 \ , \ (\xi x^{12})\, du + (\xi x^{22})\, dv = 0$$

$$(3)\qquad (\xi x^{111})\, du^3 + 3(\xi x^{112})\, du^2\, dv + 3(\xi x^{122})\, du\, dv^2 + (\xi x^{222})\, dv^3 = 0\,,$$

[1] Presentata nella seduta del 6 marzo 1921.

[2] Questo fatto è rilevato alla fine del n. 24 dei miei « *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* » (Rend. Circ. mat. Palermo, tom. 30, 1910$_2$, pag. 87), da citarsi in seguito brevemente con « *Prelim*^{i} ». — Citerò invece con « *Sup.* » la mia Nota anteriore « *Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* » (Atti Acc. Torino, 42, 1906-07, pag. 1047). Ivi al n. 4 s'incontra il cono V_4^2 su nominato.

dalle quali, eliminando le ξ_i, si ha per $du:dv$ l'equazione determinante

$$(4)\quad |x, x^1, x^2, x^{11}du + x^{12}dv, x^{12}du + x^{22}dv, x^{111}du^3 + 3x^{112}du^2dv + 3x^{122}du\,dv^2 + x^{222}dv^3| = 0,$$

che determina appunto 5 direzioni $du:dv$, ossia 5 tangenti, e quindi poi 5 iperpiani ξ.

Le formole (1), (2), (3) provengono, per dualità, dalle (14), (22), (26) del n. 23 dei « *Prelim*[i] ». Ma esse si hanno anche subito direttamente, scrivendo i punti di F prossimi a x così:

$$x(u + du, v + dv) = x + x^1\,du + x^2\,dv + \tfrac{1}{2}(x^{11}\,du^2 + 2x^{12}\,du\,dv + x^{22}dv^2) + \cdots,$$

e sostituendo nell'equazione dell'iperpiano ξ [cfr. il n. 8 di « *Sup.* », ove f è l'attuale (ξx)]. Se ξ verifica le (1), la sezione risulta con punto doppio in x, avendo ivi le tangenti date da $(\xi x^{11})\,du^2 + 2(\xi x^{12})\,du\,dv + (\xi x^{22})\,dv^2 = 0$. Perchè si abbia un tacnodo colla tangente $du:dv$ occorre: che questa annulli le 1[e] derivate di quella forma quadratica, il che dà le (2); e inoltre annulli la forma cubica in du, dv, che vien dopo nello sviluppo dell'equazione della curva: e ciò dà la (3).

Dirò *tangenti principali* di F in x le 5 rette nelle direzioni determinate dalla (4), e *linee principali* di F quelle che sono inviluppate da tali tangenti, ossia le linee integrali di quell'equazione differenziale (4). Per ogni punto di F ne passeranno in generale 5.

2. Per un'applicazione da farsi poi, converrà osservare che l'iperpiano ξ, a sezione tacnodale, che verifica le (1), (2), (3) per una radice $du:dv$ della (4), si può anche riguardare come un iperpiano tangente in pari tempo al cono quadrico V_4^2, prima nominato, relativo al punto x di F, ed all'analogo cono V_4^2 relativo al punto $(u + du\,, v + dv)$. In fatti, il 1° cono è rappresentato come inviluppo dalle (1) e: $(\xi x^{11})(\xi x^{22}) - (\xi x^{12})^2 = 0$. Si scriverà che ξ appartiene anche al 2° cono differenziando totalmente rispetto a u, v queste quattro equazioni. Con ciò, dalle (1) si ottengono soltanto le (2); e dall'altra [che è poi conseguenza delle (2)]:

$$[(\xi x^{22})(\xi x^{111}) + (\xi x^{11})(\xi x^{122}) - 2(\xi x^{12})(\xi x^{112})]\,du +$$
$$+ [(\xi x^{22})(\xi x^{112}) + (\xi x^{11})(\xi x^{222}) - 2(\xi x^{12})(\xi x^{122})]\,dv = 0.$$

Ora quest'equazione, applicando convenientemente le (2), si viene a trasformare appunto nella (3).

3. Possiamo definire direttamente le linee principali anche così. Consideriamo la varietà V_3 luogo degli ∞^1 piani π tangenti a F nei punti x di una data linea L. Se quella varietà non è *sviluppabile* (ordinaria), e quindi tale che lungo ogni piano generatore ammetta un S_3 tangente fisso, vi sarà per ogni π un iperpiano (che lo unisce al piano successivo, inci-

dente a π in x) contenente gli ∞^1 S_3 tangenti alla V_3 nei punti di π (« *Prelimi* » § 1): diciamo brevemente un iperpiano tangente alla V_3 lungo π. Orbene volendo che L sia linea principale di F, questo equivarrà a dire che: o la V_3 è sviluppabile; o, se no, per ciascun π l'iperpiano tangente alla V_3 lungo esso ha contatto quadripunto con L nel corrispondente punto x: cioè ne contiene l'S_3 osculatore, e non soltanto il piano osculatore, come avverrebbe per una linea qualunque.

Invero si pensi L rappresentata da $v = v(u)$. La V_3 è il luogo del piano π determinato dai punti x, x^1, x^2: cioè il luogo del punto $x + \lambda x^1 + \mu x^2$, al variare di u, λ, μ. L'S_3 tangente in quel punto ad essa è l'S_3 del punto stesso e dei suoi primi derivati, cioè x^1, x^2, $x^1 + v' x^2 + \lambda(x^{11} + v' x^{12}) + \mu(x^{12} + v' x^{22})$. Esso sta, comunque si prendan λ, μ, nello spazio determinato dai punti

$$(5) \qquad x, \quad x^1, \quad x^2, \quad x^{11} + v' x^{12}, \quad x^{12} + v' x^{22}.$$

Questo sarà dunque, nel caso generale, l'iperpiano tangente alla V_3 lungo π. D'altra parte l'S_3 osculatore alla $v = v(u)$ in x è quello dei punti x, $x^1 + v' x^2$, $x^{11} + 2v' x^{12} + v'^2 x^{22} + v'' x^2$, $x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222} + 3v'' x^{12} + 3v' v'' x^{22} + v''' x^2$. I primi tre di essi (che dànno il piano osculatore a L) stanno già sull'iperpiano (5). Dire che vi giace anche il 4° è come dire che vi sta $x^{111} + 3v' x^{112} + 3v'^2 x^{122} + v'^3 x^{222}$: ossia equivale a scrivere la (4).

Se poi per ogni x di L i punti (5) stanno in un S_3, sicchè la V_3 è sviluppabile, ciò viene a dire che gli elementi omologhi delle prime 5 colonne del determinante (4) son legati da una stessa relazione lineare; e quindi, senz'altro, la (4) è verificata dalla L: ossia questa è una linea principale ([1]).

4. Quando F è una superficie *sviluppabile*, vale a dire un cono, oppure l'insieme delle tangenti di una curva di S_5, segue subito dalle ultime parole dette che *tutte* le linee segnate su F sono principali.

Consideriamo invece il caso che F sia una superficie non sviluppabile, di quelle (studiate in « *Sup.* ») per le quali le 6 coordinate $x_i(uv)$ son soluzioni di una stessa equazione a derivate parziali (di Laplace):

$$(6) \qquad Ax^{11} + Bx^{12} + Cx^{22} + Dx^1 + Ex^2 + Fx = 0,$$

ove A, B, ... son date funzioni di u, v; e cerchiamo quali sono per essa le linee principali.

Applicando la (6) alle sei x_i, moltiplicando per ξ_i, — ove l'iperpiano ξ

([1]) Un'altra proprietà geometrica delle 5 tangenti principali è data da E. Bompiani al n. 7 della Nota « *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* » (Atti Acc. Torino, 48, 1912-13, pag. 393)..

sia uno di quelli considerati al n. 1, — e sommando, si trae, grazie alle (1):

$$A(\xi x^{11}) + B(\xi x^{12}) + C(\xi x^{22}) = 0 .$$

Quest'equazione, presa insieme colle (2), ammette due possibilità: 1°) è nullo il determinante dei coefficienti delle tre quantità (ξx^{11}), (ξx^{12}), (ξx^{22}), ossia si ha

$$C du^2 - B du\, dv + A dv^2 = 0 , \tag{7}$$

cioè la direzione $du : dv$ è quella di una delle *caratteristiche* della superficie (« *Sup.* » nn. 13, 14, 15). Per ognuna di queste linee avviene che i piani tangenti nei suoi punti a F formano una V_3 sviluppabile (ordinaria); perciò (n. 3) le caratteristiche rientrano fra le linee principali. 2°) si ha:

$$(\xi x^{11}) = 0 \ , \ (\xi x^{12}) = 0 \ , \ (\xi x^{22}) = 0 , \tag{8}$$

ossia ξ è l'iperpiano (*iperosculatore*) che sega F in una curva con punto *triplo* in x (« *Sup.* » n. 19) [1]. Allora le (2) son verificate senz'altro, e resta la (3), che dà precisamente la terna delle tangenti a quella curva nel punto triplo (cfr. « *Sup.* » n. 21). E già al n. 22 di « *Sup.* », per questa classe di superficie, avevo chiamato quella terna di rette la *terna delle tangenti principali*.

Concludiamo dunque: *la quintupla delle tangenti principali di una superficie, non sviluppabile, di* S_5, *si scompone, nel caso che la superficie verifichi un'equazione di Laplace, nella detta terna di rette e nella coppia delle tangenti alle caratteristiche* (*Hessiana di quella terna*) [2].

[1] Dalle sei equazioni (1) e (8) risulta che quest'iperpiano ξ è ben determinato: perchè, avendo escluso che F sia sviluppabile, è unica (« *Sup.* » n. 12) l'equazione (6) verificata dalle x_i, e quindi la matrice quadrata d'ordine 6 delle x_i e delle loro derivate prime e seconde ha la caratteristica 5.

[2] Com'è già avvertito in nota al n. 23 di « *Sup.* », se l'equazione (6) è *parabolica*, ad es° se la superficie è rigata, le linee principali si riducono al sistema *semplice* delle caratteristiche (per le rigate, il sistema delle generatrici rettilinee) ed un altro sistema semplice di linee. E. Bompiani (« *Alcune proprietà projettivo-differenziali dei sistemi di rette negl'iperspazi* », Rend. Circ. mat. Palermo, tom. 37, 1914_1, pag. 305: v. a pag. 314) ha incontrato, fra quelle linee che egli chiama *quasi-asintotiche* per le rigate, questo secondo sistema di linee principali (nella sua notazione sono le $\gamma_{3,3}$), rilevando come la loro determinazione dipenda da un'equazione di Riccati: sicchè vale un teorema analogo a quello noto di P. Serret relativo alle rigate ordinarie.

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota II del Corrispondente Francesco Severi.

3. Sieno ora

$$(7) \qquad \psi_{q+1} = 0 , \ldots , \psi_p = 0 ,$$

$p - q$ aggiunte ad F, d'ordine $m - 3$, che stacchino curve indipendenti sopra un generico piano $y = \text{cost}$, per guisa che il sistema lineare

$$(8) \qquad \lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p = 0$$

ha la dimensione $p - q - 1$.

Non si potrà però esigere, come per le aggiunte d'ordine $m - 2$ del sistema (6) sopra costruito, che le (7) stacchino $p - q$ curve indipendenti sopra *ogni* piano $y = \text{cost.}$; chè anzi, se $p_g > 0$, esisterà sempre un numero finito di piani $y = \text{cost.}$, su cui le curve suddette saranno linearmente dipendenti. Invero entro il sistema lineare V', di dimensione $p + p_a - 1$, delle aggiunte d'ordine $m - 3$, la varietà W' delle superficie spezzate in un'aggiunta d'ordine $m - 4$ ed in qualche piano $y = \text{cost.}$, è di dimensione p_g, e quindi W' ha in comune un numero finito di elementi con un sistema lineare generico, di dimensione $(p + p_a - 1) - p_g = p - q - 1$, appartenente a V'. *I valori di y per cui accade che le curve* (7) *divengano linearmente dipendenti, si diranno i valori critici di y* (per la stretta analogia che hanno con quelli considerati da Poincaré).

Il valore $y = \infty$, nei riguardi di questo concetto, si tratta come ogni altro valore finito di y, perchè la proprietà che definisce i valori critici ha carattere proiettivo [1].

Se $p_g = 0$ non esiste alcun valore critico pel sistema (8), perchè se in un piano $y = y_0$ le (7) dessero curve dipendenti, esisterebbe una superficie di (8) contenente quel piano.

[1] Non è difficile provare che si possono scegliere le (7) in guisa che vi sia un solo valor critico prefissato, p. es. $y = y_0$ (occorre all'uopo considerare le aggiunte ad F d'ordine minimo $m - \mu - 3$ e formare con esse altrettante aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m - 3$, aggregando il piano $y - y_0 = 0$ contato μ volte; poi considerare il massimo numero di aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m - \mu - 2$ tali che il loro sistema lineare non contenga alcuna aggiunta spezzata in un piano $y = \text{cost.}$ e in un'aggiunta d'ordine $m - \mu - 3$, e formare con esse altrettante aggiunte d'ordine $m - 3$, aggregando il piano $y - y_0 = 0$ contato $\mu - 1$ volte; ecc.). Naturalmente il valore $y = y_0$ sarà allora un valore critico multiplo, d'ordine di molteplicità eguale all'ordine delle varietà W' (che è assimilabile ad un luogo di ∞^1 spazî lineari di dimensione $p_g - 1$).

Osserviamo infine che il sistema (8) può esser sempre scelto in guisa da evitare che uno o più *prefissati* valori di $y (y = \alpha\ , y = \beta , \ldots$ ed eventualmente $y = \infty$), in numero finito, siano critici. Basta all'uopo scegliere entro V' il sistema (8) in modo che non incontri i sistemi lineari $\infty^{p_g - 1}$ delle superficie spezzate nei piani $y = \alpha$ o $y = \beta , \ldots$ e in aggiunte d'ordine $m - 4$. Riassumendo:

Scelte $p - q$ aggiunte d'ordine $m - 3$ ad F

(7) $$\psi_{q+1} = 0 , \ldots , \psi_p = 0 ,$$

le quali seghino $p - q$ curve indipendenti sopra un piano generico passante per la retta r, se $p_g > 0$, c'è un numero finito di piani eccezionali del fascio r su cui le (7) *dànno curve linearmente dipendenti; e si può sempre sceglier le* (7) *in modo da evitare che uno o più prefissati piani del fascio, in numero finito, siano eccezionali.*

4. Consideriamo ora il sistema lineare, che indicheremo con L:

(9) $$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + (\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p) (y - y_0) = 0$$

di aggiunte d'ordine $m - 2$, il qual sistema riducesi a:

(9') $$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + (\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p) = 0 ,$$

quando sia $y_0 = \infty$.

Dico che il sistema L ha la dimensione $p - 1$. Infatti la (9) — o la (9') — non può ridursi a un'identità in x , y , z per valori tutti nulli delle $\lambda_1 , \ldots , \lambda_q$, senza che sieno contemporaneamente nulle tutte le $\lambda_{q+1} , \ldots , \lambda_p$; e viceversa. Nè d'altronde può darsi che sia diversa da zero qualcuna delle λ del 1° gruppo e qualcuna delle λ del 2° gruppo, perchè allora vi sarebbe qualche superficie del sistema (6), contenente come parte il piano $y = y_0$.

Denotiamo con π il sistema lineare:

(6) $$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q = 0$$

e con K il sistema lineare:

(10) $$(y - y_0) (\lambda_{q+1} \psi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \psi_p) = 0 ,$$

che riducesi alle superficie del sistema (8), cui si aggreghi il piano improprio, quando $y_0 = \infty$.

E chiamiamo, come prima, *valori critici di y rispetto al sistema* L, quelli per cui le curve (9) risultano linearmente dipendenti.

È chiaro che tutti i valori critici del sistema lineare (8) sono critici pel sistema lineare L; e che inoltre L possiede come valore critico $y = y_0$ (o $y = \infty$, se $y_0 = \infty$), perchè sul piano $y = y_0$ le curve di L riduconsi soltanto a q indipendenti.

Orbene, dico che L non possiede altri valori critici, oltre ai nominati. Infatti, se esistesse un valor critico $y = \alpha$, diverso dai precedenti, si avrebbe per convenienti valori $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_p^{(0)}$ non tutti nulli dalle λ, l'identità rispetto ad x, z:

$$\lambda_1^{(0)} \varphi_1(x, \alpha, z) + \cdots + \lambda_q^{(0)} \varphi_q(x, \alpha, z) + \\ + (\alpha - y_0)(\lambda_{q+1}^{(0)} \psi_{q+1}(x, \alpha, z) + \ldots) \equiv 0,$$

donde si trae:

$$\lambda_1^{(0)} \varphi_1(x, y, z) + \cdots + (y - y_0)(\lambda_{q+1}^{(0)} \psi_{q+1}(x, y, z) + \cdots) \equiv (y - \alpha) \psi(x, y, z),$$

$\psi = 0$ essendo un'aggiunta d'ordine $m - 3$.

Ora le $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_q^{(0)}$ non potrebbero essere tutte nulle, perchè altrimenti si cadrebbe in uno dei valori critici già nominati; dunque la superficie $\lambda_1^{(0)} \varphi_1(x, y, z) + \cdots + \lambda_q^{(0)} \varphi_q(x, y, z) = 0$ del sistema π dovrebbe segare su ogni piano $y =$ cost., fuori della retta r, una curva appartenente a qualche superficie aggiunta d'ordine $m - 3$: il che contraddice al modo con cui fu scelto π. Posto:

$$\varphi_{q+1} \equiv (y - y_0)\psi_{q+1}, \ldots, \varphi_p \equiv (y - y_0)\psi_p, \tag{11}$$

si può enunciare che:

Il sistema lineare L *di equazione*:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + \lambda_{q+1} \varphi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \varphi_p = 0,$$

non possiede altri valori critici, all'infuori di quelli che sono critici pel sistema:

$$\lambda_{q+1} \varphi_{q+1} + \cdots + \lambda_p \varphi_p = 0.$$

Giacchè appunto i valori critici di questo sistema K sono quelli critici pel sistema (8), coll'aggiunta del valore critico $y = y_0$. Se $p_g = 0$, l'unico valor critico di L è $y = y_0$ (o $y = \infty$, se $y_0 = \infty$).

5. Dalle proposizioni dimostrate nei nn. 3, 4, si deduce che se $y = \alpha$ è un valor critico di L, si possono sostituire alle $\varphi_{q+1}, \ldots \varphi_p$, altre $p - q$ aggiunte d'ordine $m - 2$, linearmente indipendenti, $\varphi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p$, in guisa che pel nuovo sistema L':

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_q \varphi_q + \lambda_{q+1} \varphi'_{q+1} + \cdots + \lambda_p \varphi'_p = 0$$

il valore $y = \alpha$ non sia più critico od anche che non siano critici certi valori prefissati $y = \alpha$, $y = \beta, \ldots$ (ivi compreso eventualmente $y = \infty$). Se $\alpha = y_0$ si ottiene senz'altro l'intento aggregando alle $\psi_{q+1}, \ldots, \psi_p$ il piano fisso $y - y_1 = 0$ $(y_1 \neq y_0)$ invece del piano $y - y_0 = 0$.

Si avrà allora $\varphi'_{q+1} = (y - y_1)\psi_{q+1}, \ldots, \psi'_p = (y - y_1)\psi_p$, cioè:

$$\varphi'_{q+1} = \frac{y - y_1}{y - y_0} \varphi_{q+1}, \ldots, \varphi'_p = \frac{y - y_1}{y - y_0} \varphi_p. \tag{12}$$

Il determinante di questa sostituzione lineare, che fa passare dalle φ alle φ', riducesi a $\left(\frac{y-y_1}{y-y_0}\right)^{p-q}$. Esso annullasi pel valore $y=y_1$, che è critico rispetto alle φ', e diviene infinito pel valore $y=y_0$, che è critico rispetto alle φ.

Se $y=\alpha$, $y=\beta, \ldots$ sono valori diversi da y_0, critici per L, cioè pel sistema (8), in forza del n. 3, si potranno sostituire alle $\psi_{q+1}, \ldots, \psi_p$ altre $p-q$ aggiunte d'ordine $m-3$, linearmente indipendenti, $\psi'_{q+1}, \ldots, \psi'_p$, in guisa che $y=\alpha$, $y=\beta, \ldots$ non siano critici. Allora posto:

$$\varphi'_{q+1}=(y-y_0)\psi'_{q+1}, \ldots, \varphi'_p=(y-y_0)\psi'_p, \tag{13}$$

il nuovo sistema L' non avrà più i valori critici $y=\alpha$, $y=\beta, \ldots$

Qual'è il legame fra le φ' e le φ, cioè fra le ψ' e le ψ? La curva staccata dalla ψ'_{q+i} sopra un generico piano $y=$ cost. si esprime linearmente mediante le sole $\psi_{q+1}, \ldots, \psi_p$, appunto perchè le aggiunte d'ordine $m-3$ staccano su quel piano un sistema ∞^{p-q-1}. I coefficienti di tale combinazione lineare sono univocamente determinati, perchè altrimenti per y generico si avrebbe fra le $\psi_{q+1}, \ldots, \psi_p$ un legame lineare. Dunque i coefficienti di quella combinazione lineare sono funzioni razionali di y. Fra le ψ' e le ψ si avrà pertanto una sostituzione lineare del tipo:

$$\psi'_{q+i}=\sum_{j=1}^{p-q} a_{ij}\,\psi_{q+j} \qquad (i=1, \ldots, p-q), \tag{14}$$

le a_{ij} essendo funzioni razionali di y. Se $y=\eta$ è un valore per cui il determinante $|a_{ij}|$ delle a si annulla, fra le $p-q$ forme lineari (14), ove in esse si ponga $y=\eta$, risulterà un legame lineare a coefficienti costanti non tutti nulli. Il che significa che η è un valor critico del sistema delle ψ'. Viceversa, se η è critico per le ψ', sussisterà, per valori non tutti nulli delle $\lambda^{(0)}$, un'identità, rispetto ad x, z, del tipo:

$$\sum_{i=1}^{p-q} \lambda^{(0)}_{q+i} \sum_{j=1}^{p-q} \bar{a}_{ij}\,\bar{\psi}_{q+j} \equiv 0\,,$$

(ove $\bar{a}_{ij}, \bar{\psi}_{q+j}$ sono i valori di a_{ij}, ψ_{q+j} per $y=\eta$), cioè:

$$\sum_j \bar{\psi}_{q+j} \sum_i \bar{a}_{ij}\,\lambda^{(0)}_{q+i} \equiv 0\,, \tag{15}$$

donde si trae che o sussistono le relazioni $\sum_i \bar{a}_{ij}\lambda^{(0)}_{q+i}=0$ e allora il determinante delle $\bar{a}$ è nullo; oppure fra le $\bar{\psi}$ havvi il legame (15) a coefficienti costanti, non tutti nulli.

Dunque gli zeri della funzione razionale $|a_{ij}|$ cadono nei valori di y che son critici pel sistema delle ψ' senza contemporaneamente esser critici pel sistema delle ψ. Considerando poi la sostituzione lineare inversa della (14)

si vede subito che $|a_{ij}|$ diviene infinito soltanto nei valori di y che son critici pel sistema delle ψ, senza esserlo pel sistema delle ψ'.

Questo risultato vale anche nel caso prima esaminato della sostituzione lineare (12) $\left(a_{ii}=\frac{y-y_1}{y-y_0}\right.$, $\left.a_{ij}=0 \text{ per } i \neq j\right)$, perchè in tal caso i soli valori critici, che non siano comuni alle ψ, ψ', sono appunto y_0, y_1.

Ricordando le (11), (13) la (14) si scrive:

$$\varphi'_{q+i}=\sum a_{ij}\varphi_{q+j}, \tag{16}$$

e si conclude che:

Se il sistema lineare L *possiede i valori critici* $y=\alpha$, $y=\beta,\ldots$ *si posson sempre cangiare le* $\varphi_{q+1},\ldots,\varphi_p$, *sostituendole con altre* $p-q$ *aggiunte indipendenti d'ordine* $m-2$, $\varphi'_{q+1},\ldots,\varphi'_p$, *in guisa che quei valori non siano più critici pel nuovo sistema* L':

$$\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_q\varphi_q+\lambda_{q+1}\varphi'_{q+1}+\cdots+\lambda_p\varphi'_p=0\,.$$

Le $\varphi'_{q+1},\ldots,\varphi'_p$ *son legate alle* $\varphi_{q+1},\ldots,\varphi_p$ *da una sostituzione lineare del tipo* (16), *ove le* a *son funzioni razionali di* y *e il determinante* $|a_{ij}|$ *delle* a *si annulla pei valori di* y *che son critici pel sistema* L', *ma non per* L; *e diviene infinito pei valori che son critici per* L, *ma non per* L'. *In particolare* $|a_{ij}|$ *presenta singolarità polari in* $y=\alpha$, $y=\beta\ldots$

Osservazione 1ª. — Il determinante $|a_{ij}|$ si riduce ad una costante (non nulla) allora e solo allora che L, L' hanno gli stessi valori critici.

Osservazione 2ª. — Ridotte le funzioni razionali a_{ij} allo stesso minimo determinatore comune, che sia il polinomio $a(y)$, le (16) potranno scriversi:

$$a(y)\,\varphi'_{q+1}=\sum b_{ij}\varphi_{q+j}\,,$$

ove le b son polinomi in y. Si può ora supporre che il sistema L abbia il solo valore critico $y=\infty$, e ciò perchè si può assumere come equazione di L:

$$\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_q\varphi_p+\lambda_{q+1}\psi_{q+1}+\cdots+\lambda_p\psi_p=0\,,$$

ove il sistema delle ψ abbia come solo valor critico $y=\infty$ (n. 3). Allora il determinante $\left|\frac{b_{ij}}{a(y)}\right|=\frac{1}{a^{p-q}}|b_{ij}|$, avrà il solo polo $y=\infty$ e quindi $a(y)$ dovrà ridursi ad una costante. Ne consegue che *si possono scegliere le* $\varphi_{q+1},\ldots,\varphi_p$ *in tal guisa che per ogni scelta delle* $\varphi'_{q+1},\ldots,\varphi'_p$ *i coefficienti della sostituzione* (16) *sieno polinomi in* y.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geomorfologia. — *Lo svolgimento erosivo considerato a partire da una superficie fondamentale.* Nota di G. Rovereto, presentata dal Socio A. Issel [1].

Tutte le nostre regioni montuose appenniniche, e buona porzione delle alpine, presentano per estesi tratti delle profilazioni più o meno unite, orizzontali nella parte mediana dei rilievi, decrescenti in modo regolare verso le depressioni laterali, con le quali si può idealmente ricostrurre una superficie continua, anteriore all'incisione delle valli e allo scolpimento delle montagne. Dove tale ricostruzione non è possibile, perchè l'erosione ha eccessivamente intagliato, manca il modo di stabilire il principio del successivo svolgimento erosivo.

La esatta concezione di tale superficie, che si può chiamare *fondamentale*, richiede anche il riconoscimento del modo con cui si è originata.

Comincio col richiamare delle mie ripetute affermazioni, che credo di aver anche sufficientemente provate. La massima parte dell'Appennino settentrionale è sorta per la prima volta come catena, avente gli elementi attuali, alla fine dell'oligocene. La parte più alta dell'inarcatura, dipendente da questo sollevamento, costituisce la zona per la quale si svolge ondeggiante, a causa delle azioni incisorie posteriori e laterali, lo spartiacque della catena. I fianchi della stessa curva sono stati: nuovamente ondulati dall'orogenesi attenuata posteriore, o nuovamente inarcati da movimenti epirogenetici; ripetutamente incisi e modellati dai mari miocenici, pliocenici, quaternari, dei quali rimangono sopratutto dei *piani di regressione*, terrazzati infine dall'eustatisia quaternaria.

A seconda del modo con cui si succedettero, o si alternarono questi fenomeni, le profilazioni delle costole montuose salienti dal mare, o dalla pianura, verso la parte mediana del rilievo, variano nella continuità e nella accentuazione; e dalla curva continua e uniforme si passa alla linea spezzata, attraversante più ripiani, disposti a scala.

Così, dove il Braun ha delineato, attraverso l'Appennino settentrionale, i suoi profili morfologici, abbiamo la curva d'insieme che è la somma delle varie curve di sollevamento epirogenetico dell'oligocene, del miocene e del pliocene, e abbiamo gli intagli dovuti ai piani di regressione dei mari degli ultimi due di questi tempi. Braun spiega in altra maniera, seguendo in modo non chiaro il concetto della *peneplanation*, di cui ora diremo.

[1] Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

Vi è una porzione del versante settentrionale dell'Appennino Ligure occidentale e delle Alpi Liguri, dalla valle dell'Orba alle Bormide, che presenta all'occhio, continue e profilate in modo perfetto, numerose costole montuose traversali, in cui sono ben visibili i piani di regressione corrispondenti ai ritiri dell'oligocene superiore, dell'aquitaniano, del langhiano, man mano sempre più bassi, per modo che il posteriore non ha potuto distruggere l'anteriore, e accompagnati dai loro cicli di sedimentazione; il tutto collegato alla curva di sollevamento epirogenetico determinatosi in più riprese, e, come tali piani, a' cominciare dall'oligocene superiore.

Le influenze tettoniche ed epirogeniche, e gli effetti dell'abrasione marina ad esse associati, possono essere simulati o sostituiti da forme di altra origine, ma riconoscibili se la regione è ben studiata nella sua storia geologica. Sono in modo precipuo: le prolungate azioni subatmosferiche di denudazione, quando abbiano appianato dove era il rilievo, o viceversa prodotto il rilievo dove era il piano; le condizioni strutturali, sopratutto consistenti in strati orizzontali conservanti la loro superficie originaria, o una superficie di erosione ma *conforme* alla stratificazione; i movimenti verticali, con gli spostamenti scalari che ne derivano; l'azione erosiva continentale, tanto uniformemente distribuita da rendere livellate le costole interposte fra le valli contigue, osservazione, questa, avanzata per la prima volta dallo Shaler e subito condivisa dallo Smith (1).

Il primo verso di questa enumerazione ci porta in pieno nella teoria della *peneplanation*. Per non ripetere dubbi o riserve già avanzate, diremo solo che con il vocabolo *peneplain*, che ormai si è tanto generalizzato, sino a perdere il significato genetico, e a ridursi a quello morfologico, quando il Davis lo introdusse, voleva indicare un appianamento verificatosi a spese di una regione in rilievo, per opera di una prolungata erosione subatmosferica, e con rapporti fissi rispetto al livello di base. Ciò quindi manca alla nostra Penisola, che è terra di ieri; e forse solo entra come elemento morfologico, però anche lì profondamente modificato, in Sardegna.

Ciò che invece osserviamo nella Penisola è il contrario: è il piano di abrasione convertito in semipiano nel senso morfologico: sono, ad esempio, le superficie spianate dal mare pliocenico in regressione, terminali ai monti della Calabria, quelle oligoceniche terminali all'Appennino Ligure, che hanno subìto tale trasformazione, e che nonostante sono state dette peneplain dal Gignoux le prime, dal Davis le seconde. Vi ha un piano costiero quasi intatto, perchè di regressione marina quaternaria, dei dintorni di Ancona, che è stato considerato un peneplain dal Sawicki.

(1) Shaler N. S., *Spacing of rivers with reference to hypothesis of base leveling.* Bull. Geol. Soc. Amer. vol. X, 1899, pag. 263; Smith W. S. E., *Some aspects of erosion in relation to the theory of the planation.* Univ. Cal. Bull. Dept. Geol., II, pag. 155. 1899.

E quando, come ancora in Calabria e come in Dalmazia e altrove, a partire dai piani di abrasione terminali, i versanti laterali cadono a scaglioni, che sono dovuti anch'essi ai movimenti del mare, chiudendo gli occhi all'evidenza, si invoca un complicato e inesistente sistema di movimenti verticali.

La conformazione a scaglioni, ridotta a terrazzi in Calabria, si osserva tutt'attorno al Mediterraneo, con ampi e continui pianori, sopratutto conservati dove si ha la steppa o il carsismo, come in Dalmazia, in Grecia, nell'Asia Minore, nella Siria. Quando io ebbi a studiarla in Dalmazia, la spiegai come ora faccio (1): ossia asserii, che i diversi ripiani in cui è divisa quella parte delle Dinariche sono dovuti ai mari dell'oligocene, del miocene, del pliocene; che date queste instabilità recenti non era il caso di parlare di *peneplanation*; e fin d'allora estendevo queste considerazioni all'Appennino.

Ma seguirono affermazioni affatto discordi. Il Grund (2) poco dopo sosteneva, che la conformazione scalare della costa adriatica risulta da faglie recenti, le quali hanno dislocato una piattaforma d'erosione, posteriore ai movimenti del terziario antico: ma in realtà queste faglie non esistono, e per persuadersi di ciò basta esaminare le carte geologiche del Kerner. Con poca differenza l'anno dopo il Cvijic (3) asseriva, che i tre differenti spianamenti del carso di Scardona, di Lika e di Povrs sono delle *Rumpfflächen*, o superficie di denudazione, portate a differenti altitudini da movimenti verticali del pliocene superiore. E il Katzer (4), che mi dava ragione per la questione dei *polja*, insisteva però nel ritenere provata la presenza di tali spostamenti verticali. Lo stesso ripetevano Krebs (5), Bukowski (6) ed altri.

Nella Penisola Istriana, da me visitata di recente, la conformazione a scaglioni è più obliterata di quanto comunemente si crede. Da alcuni punti panoramici della valle del Quieto, ad esempio da Buie, si vede il rilievo dell'*Istria rossa* staccarsi dalla zona littoranea, e crescere lievemente inclinato, e con profilo unito, sino ad unirsi alle alture maggiori dell'*Istria bianca*; onde si può credere che quei varî pianali siano stati coordinati

(1) Rovereto G., *Studi di Geomorfologia*, pag. 173 e seg. Genova, 1908 (da studi eseguiti nel 1905).

(2) Grund A., *Die Oberflächenformen des Dinarischen Gebirges*. Zeit. Ges. Erdk. zu Berlin, 1908.

(3) Cvijic J., *Bildung und Dislozierung der Dinarischen Rumpffläche*. Petem. Mitt., vol. LV, 1909.

(4) Katzer F., *Karst und Karsthydrophie*. Sarajevo, 1909.

(5) Krebs N., *Die Halbinsel Istrien*. Geogr. Abhand., vol. IX. Leipzig, 1907.

(6) Bukowski E., *Notiz über die eruptiven Bildungen der Triasperiode in Süddalmatien*. Verh. Geol. Reichs. 1906.

dalla incurvatura di un sollevamento epirogenetico, stabilendosi così una peculiare superficie fondamentale.

Quelle condizioni strutturali che direttamente dànno luogo alla superficie fondamentale non hanno bisogno di molta dilucidazione. Il caso tipico è quando un insieme di strati orizzontali forma un *tavolato*, che anche morfologicamente è tale, onde può dirsi un *equipiano strutturale*: sono omai ben note le azioni erosive, che dànno luogo a *masse residuali* o *testimoni* dell'antico livellamento e a *semipiani strutturali*, a spese di questi equipiani.

L'azione erosiva continentale producente un grande livellamento, ossia, continuando nella nostra distinzione, un *equipiano erosivo*, è sopratutto quella artica, per la quale appunto è stato introdotto dal Cairnes (1) il vocabolo che usiamo per designarla. Ma abbiamo molte regioni le quali morfologicamente sono equipiani, come la *tompoketsa* di Madagascar, l'*alta pampa* terminale alla Sierra di Cordova in Argentina, sulle quali ancora non è dato di pronunciarsi con sicurezza. Le *rore* di Abissinia rappresenterebbero la avanzatissima distruzione di una *tompoketsa*, la quale quindi sarebbe stata la loro superficie fondamentale.

Abbiamo in Sardegna uno spianamento a spese del cristallino, probabilmente dovuto ad azioni subatmosferiche; quindi un *peneplain* nel vero senso, il quale però è stato invaso parecchie volte dal mare, i cui sedimenti conservano la loro orizzontalità, e che devono perciò aver sostituito un equipiano strutturale al semipiano erosivo: i resti di tale equipiano sono le cosidette *giare*, *tacchi*, *tonneri*. Dopo l'ultima emersione postmiocenica, tale equipiano è diventato la superficie fondamentale nella quale si è incisa l'odierna rete idrografica dell'isola. Un insieme simile di fenomeni il Davis ha riscontrato nel Morvan francese, e ne ha fatto il tipo erosivo *morvan*.

I primi concetti su di una superficie fondamentale trovansi in Italia in scrittori del secolo XVIII: ad esempio, è per questo ben suggestivo un periodo che si legge nei *Viaggi* di Targioni Tozzetti, e che si riferisce al ricostruibile spianamento terminale presentato dalle Colline Senesi.

(1) Cairnes D., *Differential erosion and equiplanation in portion of Yukon and Alaska*. Bull. Geol. Soc of America, vol. XXIII, 1912.

Biologia. — *Sul metabolismo dei reali veri nella società dei Termitidi* [1]. Nota II di C. Jucci, presentata dal Socio B. Grassi [2].

Riservandomi di seguire in un lavoro dettagliato i particolari, credo di poter fin d'ora così rappresentarmi l'andamento generale dei fenomeni.

Fin dai primi stadî larvali ha luogo, nel corpo adiposo dei Termitidi, la deposizione di riserve albuminoidi e, come residuo della loro digestione intracellulare, la concrezione di materiali uratici. Probabilmente alla eliminazione di questi s'adoperano attivamente i tubi malpighiani, senza riuscir tuttavia ad impedire il progressivo accumulo dei prodotti catabolici che, specie per gl'intensi processi metabolici della vita ninfale, legati al lavorìo di costruzione, giungono finalmente, nell'insetto perfetto, a riempire tutto il corpo adiposo.

L'alato sciama e si appaia a fondare una nuova colonia.

Malgrado intensi processi d'eliminazione per i tubi malpighiani [3], la massa uratica nel corpo adiposo dei giovani reali va ulteriormente crescendo per smaltimento delle riserve albuminoidi residuali e delle nuove immagazzinate coll'utilizzazione dei materiali istolitici (muscoli alari) e dei prodotti della digestione del quotidiano alimento legnoso.

Con l'aiuto di queste risorse la giovane coppia supera le difficoltà penose dei primi tempi. La reginella comincia a deporre le uova e con lo sposino attende alle cure dell'allevamento: provvedono da sè al proprio sostentamento e a quello della giovane prole. Ma i primi operai che si sviluppano sollecitamente assumono il governo della coloniola, la nutrizione dei genitori e dei piccoli. Difatti in vecchi reali non si rinvengono più urosferiti nel tessuto adiposo (non continuandone la produzione i tubi malpi-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate della R Università di Roma.

[2] Presentata nella seduta del 19 dicembre 1920.

[3] Nei reali e anche negli alati (*Calotermes*) l'epitelio dei tubi malpighiani è tutto farcito di urosseriti formati o in formazione, evidentemente da materiale fluido filtrato dal plasma e, secondo ogni probabilità, proveniente da solubilizzazione di vecchi urosferiti del tessuto adiposo. Difatti, oltre urosferiti normali e urosferiti in formazione nelle vacuole del citoplasma come per lenta concrezione dei sali urici che vanno raggiungendo la saturazione, ho veduto spesso grosse concrezioni vuote e trasparenti. Si riconoscono anche a luce polarizzata: a nicol incrociati, invece di presentare la netta croce di polarizzazione, appaiono tutte scure all'interno dello strato corticale. Del resto le ricerche sulla trasformazione e il riassorbimento dell'acido urico tendono a provare che i tessuti animali secretano sostanze (urico-ossidasi) che dissolvono rapidamente le concrezioni uriche.

ghiani finalmente riescono a eliminarne l'accumulo) [1], sibbene depositi ptialurici nei tegumenti, nelle cellule pericardiali e nei calici dell'ovidotto: il metabolismo dei reali veri diviene, come il nutrimento, quello stesso dei reali neotenici.

I prodotti urosferitici non sono dunque i materiali catabolici caratteristici del metabolismo reale, legati insomma alla elaborazione deutoplasmica negli elementi sessuali [2], e neppure caratteristici dello sviluppo normale

[1] Questa eliminazione avviene forse in rapporto alla formazione del tessuto adiposo reale. Le interessanti ricerche del Feytaud dimostrano (1912) che « il tessuto adiposo subisce, qualche anno dopo lo sciamamento, una trasformazione completa che conduce all'apparizione di un tessuto adiposo nuovo. Questo tessuto reale si forma soprattutto a spese delle masse adipose antiche per penetrazione e proliferazione dei nuclei leucocitari. E a poco a poco gli elementi neoformati arrivano a sostituirsi completamente agli antichi ». Ora è probabile, le mie ricerche non mi permettono ancora di affermarlo, che, proprio durante questa sostituzione, con la progressiva scomparsa degli elementi adiposi antichi (imaginali), di pari passo scompaiano i depositi urici. D'altra parte, giacchè l'assenza di urosferiti nel corpo adiposo di vecchi reali coincide colla presenza di prodotti ptialurici negli organi escretorî, si presenta probabile l'ipotesi che la formazione del tessuto adiposo reale (la quale non è certo in relazione all'utilizzazione dei prodotti istolitici giacchè, come vide Feytaud, il tessuto adiposo apparso nel torace al posto dei muscoli istolizzati possiede ancora i caratteri del tessuto adiposo del sessuato sciamante) sia in diretto rapporto col cangiamento di regime nutritivo (passaggio dalla alimentazione legnosa a quella per saliva somministrata dalla prole operaia).

[2] A proposito della quale noto che nelle vescicole spermatiche degli alati sciamanti di *Calotermes* si trovano, libere nel lume, oltre a notevole quantità di spermi maturi (aventi la caratteristica figura « a seme di zinnia » descritta dal Grassi), un gran numero di cellule pressochè sferoidali, a protoplasma debolmente basofilo e grosso nucleo irregolarmente sferoide, a struttura omogenea. Cosa rappresentano queste cellule?

Il fatto che nello spermateca delle regine si contengono solo tipici spermi « a seme di zinnia » esclude che possa esservi un dimorfismo negli elementi spermatici maturi. Il fatto che nei testicoli di re dei lobuli son pieni di spermi esclude che la maturazione degli spermatociti in spermi possa avvenire nei deferenti. Sembra quindi doversi considerare queste cellule come cellule destinate alla nutrizione degli spermi. E difatti nelle vescicole spermatiche dei re un denso liquido riempie interamente il lume e vi nuotano in mezzo spermi e pochi elementi nucleari sferoidali, piuttosto acidofili, di cui solo alcuni distintamente contornati da un alone protoplasmatico. Avviene dunque una colliquazione delle cellule suddescritte in succo nutritivo? Si direbbe. (Osservando più attentamente ho veduto, nelle vescicole spermatiche di sciamante, qualche elemento cellulare più grosso, a struttura citoplasmatica reticolare e nucleo piccolo e periferico come in una tipica cellula adiposa). Spero poter presto tornare sull'argomento per precisare la natura di questi elementi e studiarne la differenziazione dagli elementi germinali nel testicolo, ove ritrovo, all'interno dei lobuli, raggruppate fittamente tra loro, o vicine a fasci di spermi, le cellule a nucleo acidofilo. Anche nei testicoli e nei deferenti del *lucifugus* ritrovo questi elementi cellulari caratteristici. Questo di cellule trofiche libere nelle vescicole spermatiche sarebbe un tratto caratteristico dei termitidi anche rispetto agli altri insetti sociali, in rapporto evidente col fatto della persistenza del maschio e della periodica copula (tratto biologico caratteristico della società dei Termitidi).

ad insetto perfetto: giacchè si riscontrano come nei giovani reali veri, negli sciamanti, nelle ninfe, nelle larve, così anche negli individui neutri, soldati e operai.

I prodotti urosferitici sono dunque comuni a tutti gli individui che si nutrono di legno e, in rapporto a questo loro regime alimentare, presentano nell'intestino posteriore l'ampolla cecale piena di protozoi. I prodotti urosferitici mancano negli individui che non assumono alimento legnoso e presentano perciò l'ampolla cecale ridotta a porzione stretta, tubulare, vuota di protozoi: in questi individui, reali neotenici e vecchi reali veri, trovo invece, negli organi escretorî, prodotti ptialurici.

È dunque netta la correlazione tra presenza di urosferiti e regime alimentare legnoso con intervento di protozoi; e resta più che mai assodato il valore del prodotto catabolico ptialurico quale indice dei processi metabolici caratteristici e del regime alimentare speciale pel quale avviene la differenziazione della casta neotenica.

D'altra parte, giacchè prodotti solidi del catabolismo si rinvengono nelle caste di neutri e negli stadî larvali, è sperabile che il loro studio possa, insieme alle osservazioni in natura e alle esperienze di allevamento, fornirci elementi validi per la soluzione definitiva del gran problema che si è preteso oltre oceano, così alla leggera rovesciando quanto il Grassi stabilì, con metodi spicciativi risolvere: la differenziazione delle caste di neutri.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Corbino legge la seguente Commemorazione del Socio Augusto Righi.

La scomparsa di Augusto Righi, del fisico più eminente che abbia avuto l'Italia dall'epoca di Alessandro Volta, va qui ricordata, o egregi Colleghi, con particolare rilievo. Io non intendo rievocare la Sua grande figura nelle singolarissime qualità che lo resero personalmente caro a tutti voi e oggetto di così generale e profonda venerazione. Non ricorderò la Sua vita, tutta intessuta di devozione alla Scienza, al lavoro, alla scuola, alla famiglia; quella vita che seppe compiere il miracolo di trascinare dietro la salma preziosa l'intera massa dei cittadini di Bologna, dal più eletto al più umile, in una tregua imperiosa che tanta perdita seppe imporre alle aspre contese politiche. Io comprimerò la massa di sentimenti che il nome di Augusto Righi suscita in me, che gli fui caro come un allievo spirituale, che ne seguii intensamente e nei particolari meno comuni la grande opera scientifica, che delle briciole della sua feconda produzione feci l'alimento preferito alla mia modesta attività di lavoro.

Mi propongo invece di anticipare, sul nome di Augusto Righi, quello che sarà il giudizio della Storia della Fisica in un avvenire lontano, al di fuori di ogni sentimento di commozione per l'uomo che abbiamo perduto, e con l'attenuazione che i meriti degli uomini di Scienza subiscono inevitabilmente dal tempo. Quel tempo che tante glorie effimere sommerge nell'oblio, quel tempo al quale così poca parte sopravvive del frutto dei nostri lavori.

L'opera scientifica di Augusto Righi si riattacca in modo complesso alle più alte investigazioni teoriche che rilegano in feconda armonia i fatti conosciuti attorno a un'idea dominante, come anche alla indagine sperimentale che ci fornisce la vera e più certa conoscenza del mondo fenomenico, schiudendo campi nuovi di ricerca, e procurando nuove basi sempre più solide alle interpretazioni teoriche. Si riassumono in Lui le qualità più perspicue del pensatore profondo, chiaro e luminoso, con quelle dello sperimentatore impareggiabile; e per il sano equilibrio di tali rare attitudini, egli ragiona quando il pensiero è ben sicuro di raggiungere da solo la meta, ovvero sperimenta quando solo i fatti possono illuminare la via della verità. E così in tutti i campi ch'Egli ha sottoposto alla investigazione penetrante del suo ingegno, per circa mezzo secolo di lavoro geniale e tenace, egli lascia tracce profonde della sua opera, sempre aliena da quell'elemento accidentale e fortuito che costituisce spesso la prima sorgente di successo in tante scoperte.

Io non credo di dover qui passare in rassegna, le 250 memorie e note che costituiscono la produzione scientifica del Righi. Di tanti lavori si imporranno sempre più alla ammirazione dei fisici futuri specialmente quelli relativi a due capitoli fondamentali della fisica: le azioni molteplici esercitate dal campo magnetico, e il meccanismo della scarica elettrica e in genere della propagazione della elettricità nei gas.

I diversi effetti provocati dal campo magnetico han fornito, com'è noto, le prove più sicure e dirette della costituzione elettronica della materia e gli indizi più suggestivi sul meccanismo intimo dei fenomeni fisici. E in tutto questo campo il nome di Augusto Righi è associato alla più belle scoperte della Fisica moderna. Il suo primo lavoro sugli effetti del campo magnetico porta la data del 1878, e riguarda un punto fondamentale di magnetoottica. Con la sua grande conoscenza delle finezze più delicate dell'ottica Egli riuscì a dimostrare, molto prima che si sapesse qualche cosa di sicuro sulla origine della polarizzazione rotatoria magnetica, che il campo modifica la velocità e non il periodo delle componenti circolari della luce incidente.

Per la conoscenza del fenomeno magnetoottico di Kerr le ricerche del Righi hanno un'importanza ancora più considerevole. Noi gli dobbiamo la scoperta dei fatti più interessanti e di quelle leggi generalissime, dette di reciprocità, che hanno servito a stabilire la teoria di questo fenomeno. Intendo segnalare particolarmente la scoperta del fatto che, in incidenza nor-

male, la luce polarizzata rettilineamente si trasforma in luce polarizzata ellitticamente; e che vi è, per conseguenza, un assorbimento disuguale, nel metallo magnetizzato, delle due componenti circolari inverse della luce incidente. Noi dobbiamo riconoscere in questo assorbimento ineguale delle due componenti circolari un fatto sperimentale positivo che può considerarsi come un'anticipazione del celebre effetto Zeeman. Ma vi si riconosce insieme la prima prova che la riflessione sui metalli è determinata dagli elettroni che il metallo contiene e di cui il movimento è modificato dal campo magnetico.

Agli stessi elettroni liberi dei metalli è dovuta, com'è noto, la sua conducibilità elettrica; e noi conosciamo appunto per un lavoro del Righi la profonda modificazione che subisce la conducibilità del bismuto sotto l'azione del campo magnetico. Il Righi aveva anche osservato che la deviazione nel cammino degli elettroni provocata dal campo (fenomeno di Hall) acquista nel bismuto una intensità circa 10 mila volte più grande che negli altri metalli ; la sproporzione è così grande che si deve ben considerare questa osservazione come una vera nuova scoperta.

Si è visto più tardi che ai medesimi elettroni liberi deve essere attribuito il trasporto del calore per conduzione nei metalli. Il primo indizio del fondamento reale di questa ipotesi si ha in un'altra azione del campo magnetico scoperta dal Righi, e cioè nella distorsione delle linee isotermiche di un metallo per effetto del magnetismo, e in una modificazione pure osservata da Lui della conducibilità termica del bismuto sempre per effetto del campo.

***

Le ricerche del Righi sulla magnetoottica dei corpi gassosi sono ben conosciute. Basterà richiamare la ingegnosissima disposizione dei nicol incrociati da Lui immaginata per osservare il fenomeno inverso di Zeeman nella fiamma a vapori di sodio. Egli potè così scoprire un fenomeno dei più interessanti, sfuggito, ciò che sembra perfino incredibile, all'osservazione pur così penetrante del Faraday, il quale aveva tentato senza risultato la stessa esperienza, con dei mezzi quasi identici. Con tale disposizione il Righi potè stabilire l'esistenza del fenomeno Zeeman negli spettri a bande; essa inoltre condusse più tardi alla osservazione delle anomalie di polarizzazione rotatoria nelle vicinanze delle righe dei vapori metallici, e in seguito alle celebri esperienze del Wood.

Richiamerò inoltre le ricerche del Righi sulla osservazione del fenomeno Zeeman nelle direzioni comprese fra la longitudinale e la equatoriale; queste esperienze furono riprese dallo stesso Zeeman per la loro grande importanza nella interpretazione delle singolarità constatate da Hale nello spettro delle macchie solari.

*
* *

I lavori del Righi sulle scariche elettriche hanno contribuito con non minore successo alle teorie moderne dei fenomeni fisici.

Quando l'interpretazione balistica data dal Crooks al fenomeno dei raggi catodici era ancora ben lungi dall'esser riconosciuta legittima, il Righi la aveva accettata con piena fiducia; e per confermarla egli immaginò e realizzò le sue belle esperienze sulle ombre elettriche, riuscendo a dare più grande estensione e più solido appoggio alla ipotesi delle particelle elettrizzate in movimento. L'urto degli ioni con le molecole del gas, rese più numerose dalla pressione elevata, doveva determinare una notevole riduzione della loro velocità, fino a renderne possibile la misura diretta. E il Righi eseguì effettivamente la prima misura conosciuta della velocità dei ioni. Inoltre la traiettoria dei ioni doveva essa stessa modificarsi per effetto degli urti assai frequenti, e avvicinarsi all'andamento delle linee di forza, ciò che l'esperienza confermò pienamente. Bisognava appunto produrre tali alterazioni progressive al fascio catodico dell'ampolla di Crooks per renderne quasi tangibile la natura cinetica. La immagine che il Righi si era formata della ionizzazione dopo tali ricerche gli doveva servire di guida preziosa più tardi, quando cioè egli scoperse nel 1896 l'azione ionizzante prodotta nei gas dai raggi X che li attraversano.

E così le stesse idee direttrici guidano i bei lavori del Righi sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni, fenomeni di cui l'importanza si dimostra ogni giorno più grande.

Io tengo a segnalare particolarmente l'osservazione che i metalli colpiti dalla luce non solo si diselettrizzano se sono carichi negativamente, ma acquistano una carica positiva se erano inizialmente allo stato neutro. Venne così provato che la luce incidente per se stessa, con o senza l'aiuto d'un campo elettrico esterno, basta a provocare l'espulsione degli elettroni contenuti nel metallo. Non sarà inutile ricordare in proposito che è precisamente sulla misura del potenziale positivo finale acquistato dal metallo che si basa la determinazione dell'energia conferita all'elettrone dalla luce incidente; determinazione che ha acquistato un così profondo significato nei riguardi della teoria dei quanti dell'energia luminosa.

*
* *

È ben noto quali grandi progressi abbia compiuto l'ottica delle oscillazioni elettriche per merito delle ricerche del Righi e di coloro che lo seguirono, utilizzando gli ammirevoli apparecchi da Lui costruiti e che si diffusero rapidamente in tutti i laboratori del mondo.

Le esperienze sulle onde elettromagnetiche erano già tanto conosciute e popolari in Italia che la invenzione della radiotelegrafia fatta da un altro

grande bolognese deve ritenersi come inseparabilmente legata all'opera del Righi e come frutto sia pure occasionale di questa. Ma le sue ricerche, indipendentemente dalle applicazioni alle quali diedero origine indiretta, costituiscono il coronamento più felice dell'opera di Hertz, e si può ben dire che i nomi di questi due scienziati resteranno per sempre connessi nella Storia della fisica. Effettivamente il Righi è riuscito a riprodurre brillantemente tutti i fenomeni più importanti dell'ottica fisica, con una semplicità e un'eleganza che richiamano l'opera classica dei Maestri fondatori dell'Ottica; Egli realizzò inoltre alcune manifestazioni particolari delle onde elettromagnetiche, come quelle delle onde secondarie dei dielettrici che danno la dimostrazione più diretta dell'azione elettromagnetica delle correnti di spostamento maxwelliane.

***

Mentre la teoria della scarica nei gas si sviluppava con la rapidità che è la caratteristica della Fisica Moderna, l'insieme dei fenomeni singolari presentati dalle ampolle a vuoto nel campo magnetico opponeva difficoltà notevoli a lasciarsi rinchiudere nella interpretazione generale.

La natura dei raggi magneto-catodici scoperti da Hittorf, cioè di quei brillanti efflavi che disegnano nell'ampolla, partendo dal catodo, il percorso delle linee di forza magnetiche, restava singolarmente oscuro. Alla spiegazione di questo fenomeno si accinse negli ultimi anni l'attività sempre rinascente del Righi. Egli emise l'ipotesi che l'azione del campo faciliti la formazione di particolari sistemi binarî, risultanti da un atomo-ione intorno al quale circola un elettrone. Seguendo questa concezione Egli ha eseguito uno studio sperimentale molto approfondito del fenomeno nelle condizioni più svariate, scoprendo così un insieme imponente di fatti nuovi, tutti conformi alla ipotesi direttiva, e che non si prestano ad altra spiegazione più semplice. Egli non ritenne mai di aver dato la prova definitiva della sua ipotesi, dimostrando così di possedere una qualità tanto stimabile quanto rara in un fisico: l'attitudine a utilizzare le ipotesi senza prevenzioni, considerandole come semplici strumenti atti a preparare nuove scoperte.

Ma le sue vedute teoriche lo condussero a enunciare una idea assai suggestiva; secondo la quale il campo magnetico, modificando il percorso degli elettroni nell'atomo, dovrebbe provocare l'espulsione di essi e così dare origine a una specie di magneto-ionizzazione. L'ipotesi non ha per sè stessa niente di arbitrario; ed ha avuto una notevole applicazione in alcuni studî recenti del La Rosa sulla teoria elettronica dei metalli. Ma comunque, guidato da tale ipotesi, il Righi ha potuto scoprire e spiegare alcuni fenomeni di grande interesse; e precisamente le azioni del campo sulla scarica in un'ampolla a vuoto, con le diverse modalità che si manifestano secondo che l'azione si esplica su tutta l'ampolla, o su uno degli elettrodi, o esclusiva-

mente sul gas rarefatto. Quest'ultima azione sul gas possiede un vero carattere di novità del tutto inatteso, e non si presta ad altra spiegazione se non a quella della magneto-ionizzazione. Alla stessa causa egli potè attribuire tutto un nuovo ordine di fenomeni di particolare delicatezza ed eleganza che egli chiamò rotazioni ionomagnetiche.

Dalle ultime indagini eseguite in tal senso, e dirette anche a spiegare con la teoria elettronica le azioni elettromagnetiche di Ampère, lo deviò di colpo negli ultimi tempi un nuovo campo di studio completamente diverso.

Apparirà certo singolare, col tempo, che la celebre esperienza di Michelson e Morley, la quale diede origine a quel vero cataclisma scientifico costituito dalle teorie di relatività, sia stata nelle sue origini discussa e interpretata con tanta disinvoltura anche dai fisici più eminenti. Ci si era tutti abituati a una conclusione che nessuno aveva esaminata con la necessaria accuratezza, pur trattandosi di una conclusione tanto rivoluzionaria nelle conseguenze.

Oggi la teoria della relatività costituisce un corpo imponente di dottrina che si regge da sè, indipendentemente dalla esperienza di Michelson che le diede origine. Ma non per questo è meno interessante la approfondita disamina fatta dal Righi del vero significato di quella esperienza e della necessità del suo risultato negativo in particolari condizioni, sulla base dei principî più ortodossi dell'ottica.

Io ho ancora presente la figura del Righi quando venne appositamente a Roma per comunicare al Collega Levi-Civita e a me i risultati del suo studio, e rivelarci le perplessità del suo spirito di fronte allo inatteso risultato; e ho ancora vivo il ricordo del senso di ammirazione destato in noi dallo sforzo grandissimo di pensiero e di lavoro che tale ricerca gli aveva dovuto costare, mentre il male inesorabile che doveva poi condurlo alla morte si era già manifestato come una lontana ma sicura minaccia. Per quanto si possa ritenere che sull'argomento da lui trattato l'ultima parola non sia detta ancora, va certo osservato che con le ultime ricerche, le quali lo occuparono fino a qualche ora prima della morte, il Righi diede un nuovo suggello di merito all'opera sua, rivelando fino all'estremo l'acutezza e la vigoria mentale dei migliori anni della sua attività scientifica.

Augusto Righi rappresenta fra i Fisici italiani dell'ultimo secolo come un monte isolato ed altissimo; e resterà tale, purtroppo, almeno per una generazione ancora. L'opera Sua si è svolta nel periodo più fiorente della storia della Fisica, poichè mai si vide addensarsi in così breve volger di tempo tanta mole di grandi scoperte, e così fervido succedersi di teorie nuove, di fatti inattesi, costituenti ciascuno come un ampio squarcio dei veli che nascondono alla mente umana le verità più profonde. Partecipare efficacemente a un còmpito così grandioso era dato solo a poche personalità di gigantesca statura intellettuale; alle altre è consentito appena di seguire i risultati delle altrui indagini, e raccogliere le spighe disperse.

Augusto Righi fu tra i migliori artefici di questa grandiosa costruzione. Il solenne plebiscito di rimpianto col quale fu accolta in tutto il mondo scientifico la notizia della Sua morte vale a sanare qualche penosa dimenticanza passata, e accresce la nostra commozione. Del suo lavoro, che non ebbe requie per mezzo secolo, Augusto Righi non vide la meritata forma di ricompensa ch'era nella coscienza di tutti; ma ne è venuta egualmente, con la sua morte, nuova ondata di gloria all'Italia.

L'Italia gli esprime oggi, attraverso alla mia riverente parola, la sua riconoscenza, e lo colloca nel tempio ideale che accoglie i suoi figli più eletti; in quel tempio che è reso augusto, come nessun altro al mondo, da due millenni di vera civiltà, umana e gentile.

Alle commosse parole dell'oratore si associano il Presidente Volterra e i Soci Pincherle, Ciamician e Paternò; e su proposta del Socio Fano, la Classe delibera di rinnovare alla famiglia Righi le vive sue condoglianze per la scomparsa del compianto Accademico.

Il Corrisp. Di Legge commemora l'Accademico prof. Michele Rajna col seguente discorso:

Il 29 settembre 1920 cessava di vivere in Teglio di Sondrio Michele Rajna Socio corrispondente della nostra Accademia. La sua morte fu nuovo lutto per gli astronomi italiani già rattristati dalle recenti perdite dei loro insigni e venerati colleghi Annibale Riccò, Elia Millosevich, Giovanni Celoria.

Michele Rajna, nato a Sondrio il 28 ottobre 1854 da Paolo Rajna e da Costanza Simonetta, compiuti gli studî universitarî in Pavia conseguì la laurea in matematica nel febbraio 1878 e nel marzo successivo entrò all'Osservatorio di Brera in Milano al quale appartenne fino al gennaio 1903, prima e per pochi mesi col grado di allievo volontario; poscia col grado di assistente e da ultimo con quello di astronomo. Nel 1897 riuscì vincitore nel concorso al posto di professore straordinario alla cattedra di astronomia nell'Università di Palermo a cui egli rinunciò per rimanere all'Osservatorio di Brera. Nel febbraio 1903 fu nominato, in seguito a concorso, professore ordinario di astronomia nell'Università di Bologna e direttore dell'Osservatorio annesso alla cattedra.

I più importanti lavori di Rajna appartengono alla geodesia astronomica che egli eseguì negli anni da lui passati all'Osservatorio di Brera. Sono essi operazioni di latitudine, di differenze di longitudine, di azimut con le quali egli recò un prezioso e largo contributo ai lavori della Commissione geodetica italiana.

In questi lavori di cui le relazioni sono contenute tutte nelle Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera, il Rajna rivelò il senso della perfezione sia nella precisione delle osservazioni, sia nella loro discussione. Ed il loro altissimo pregio fu riconosciuto dai più valenti astronomi e lo riconobbe il suo grande maestro Giovanni Schiaparelli il quale non esitò a dichiarare che essi avevano un'impronta caratteristica di eccellenza e costituivano un merito scientifico eccezionale per il loro autore.

Nè minor studio e minor cura egli pose nella discussione delle osservazioni magnetiche di Milano ed in tre Note inserite nei rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere, la prima nel 1892, la seconda nel 1895 a complemento e rettificazione della prima, la terza nel 1902, espose le sue ricerche intorno alle relazioni tra l'escursione diurna del magnetismo terrestre e la frequenza delle macchie solari.

R. Wolf direttore dell'Osservatorio di Zurigo fin dal 1859 ebbe l'idea di rappresentare con una formola lineare la relazione tra la variazione della escursione diurna della declinazione magnetica ed i suoi numeri relativi esprimenti la frequenza delle macchie solari.

A. Wolfer successore di Wolf fece nel 1895 una ricerca analoga, e traendo partito dalle osservazioni magnetiche di Milano, di Praga, di Greenvich e di Vienna ottenne per Milano valori delle costanti diverse da quelle del Wolf.

Il Rajna dalle medie annuali dal 1836 al 1894 dedusse i valori delle costanti; e poichè gli ultimi 24 anni costituivano un complesso più omogeneo dalle medie annuali dal 1871 al 1894, trasse altri valori delle costanti. Con le costanti del Wolfer e con le sue calcolò tre serie di valori dell'escursione diurna della declinazione magnetica che confrontò con le osservazioni. Dai tre confronti risultava un accordo abbastanza soddisfacente tra i numeri ottenuti dalle osservazioni ed i numeri desunti dal calcolo; ma l'accordo non era perfetto. Il Rajna indicò le cause presumibili delle più o meno sensibili discordanze nè escluse la possibilità di una rappresentazione più fedele mediante una formola diversa da quella lineare assunta da Wolf.

Varî articoli e Note egli pubblicò sugli ecclissi solari e lunari, sul calendario e sopra altri argomenti che per la maggior parte non trascendono i limiti dei lavori e calcoli ordinarî del personale scientifico di un osservatorio, ma anche in questi si nota nell'autore l'abituale tendenza a non lasciar nulla d'intentato perchè il risultato sia il più perfetto ed il meglio dimostrato.

Altre pubblicazioni d'indole e d'intento popolare manifestano la sua attitudine a volgarizzare la scienza. Egli sapeva riuscir chiaro al lettore senza punto venir meno alla precisione scientifica.

Degni pure di essere ricordati sono i suoi articoli ed opuscoli polemici che hanno al pari di altri suoi scritti singolare agilità di forma e piacevole disinvoltura di stile.

Le deplorevoli condizioni in cui il nostro compianto collega trovò l'Osservatorio astronomico di Bologna lo indussero alla convinzione che era da abbandonare l'idea di nuovi impianti nella vecchia torre per i quali con spesa considerabile si sarebbe ottenuto tutto al più un istituto adatto quasi unicamente a scopi didattici. Egli pertanto pensò alla possibilità di erigere un nuovo Osservatorio alla villa Aldini situata sulla collina dell'Osservanza ed ebbe fondate speranze di ottenere la cessione della villa e del terreno adiacente di cui era proprietario il Comune di Bologna, ed un contributo dal Comune della Provincia e dal Governo. Con questa fiducia, confortata dal fatto della convenzione universitaria stipulata pochi anni prima fra il Ministero dell'Istruzione pubblica, il Comune, la Provincia e la Università di Bologna diretta a migliorare le condizioni della Università, studiò un progetto che espose in tutti i suoi dettagli in un'elaborata e dotta relazione al Rettore dell'Università di Bologna, la quale fu pubblicata nel 1906 ed inserita nell'annuario dell'Università per l'anno scolastico 1906-1907.

Egli avrebbe veduta certamente tradotta in atto la sua idea, accolta con sommo favore dalle classi più colte di Bologna e dal plauso degli astronomi, nonostante le resistenze ed i consueti indugi del Ministero dell'Istruzione, se frequenti attacchi di neaurastenia non avessero paralizzato la sua operosità negli ultimi anni della sua vita.

Quando egli passò da Milano a Bologna ritenne primo suo obbligo occuparsi dell'insegnamento al quale non mancò di dedicarsi con fervore finchè glielo permisero le sue condizioni di salute. E così intensamente egli sentiva il dovere della scuola che, riavutosi dalle sofferenze degli assalti di neurastenia mi scriveva ogni volta di essere sopratutto lieto della recuperata salute per essere in grado di riprendere le lezioni più volte interrotte.

Possedeva il Rajna una vasta coltura letteraria, e di questa sua coltura fan fede i suoi scritti di cui non pochi sono un vero modello di stile di chiarezza e di eleganza.

Era egli fin dal 1891 Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Nel 1893 fu nominato membro della R. Commissione geodetica italiana della quale per varî anni fu segretario solerte ed attivissimo. Nel 1903 con la nomina di professore ordinario di astronomia e direttore dell'Osservatorio di Bologna entrò per diritto a far parte dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Nel 1904 fu nominato Socio corrispondente della nostra Accademia.

Cittadino esemplare ebbe un religioso culto per la patria. Spirito equilibrato giudicò uomini e cose con benevola indulgenza. Marito e padre incomparabile ebbe le cure più affettuose per la sua diletta famiglia. Seppe apprezzare le virtù e la non comune intelligenza della eletta donna che fu compagna della sua vita ed ebbe per lei sentimenti di affetto e di devozione illimitati.

Nella commemorazione di Giovanni Schiaparelli letta all'Accademia di Bologna egli diceva che lo spirito di lui riposava nella convinzione dell'oltretomba e a volte sembrava che anelasse alla comprensione dell'infinito ed alla rivelazione dei cieli dopo la morte. L'allievo non pensava diversamente dal suo venerato maestro. E se la sua morte ci addolora, ci conforta il pensiero che nella nuova esistenza ultraterrena egli goda quella pace che gli fu così crudamente contrastata dal terribile male che l'afflisse negli ultimi anni di sua vita.

Su proposta del Presidente si approva di mandare al fratello dell'estinto e Socio dell'Accademia prof. Pio Rajna, un telegramma che esprima a quest'ultimo la parte che prende la Classe alla sventura da cui venne colpito.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Castelnuovo presenta i libri giunti in dono, facendo particolare menzione della *Storia della geometria descrittiva* del Corrispondente G. Loria; del vol. 1° parte VI del *Trattato di anatomia patologica per medici e studenti* pubblicato dal Socio Foà, riguardante l'*Apparato locomotore*, del prof. A. Bonome; e dei volumi I e II, *Meteorologia*, della spedizione antartica inglese.

Il Socio Bianchi presenta un volume da lui pubblicato, contenente le sue *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici e principî di aritmetica analitica.*

Lo stesso Segretario presenta il 1° fascicolo delle *Esercitazioni matematiche* pubblicate dal Circolo Matematico di Catania; aggiunge che, per iniziativa di alcuni professori di quella Università e di giovani munifici, si è costituito colà un nuovo Circolo Matematico il quale ha promosso due pubblicazioni: le *Esercitazioni matematiche*, dirette dal prof. Cipolla, destinate a raccogliere articoli di carattere storico e didattico, e le *Note e Memorie di matematica*, dirette dal prof. Scorza, per lavori di carattere scientifico. Creare dei nuovi periodici di matematica oggi che antichi gloriosi giornali corrono il rischio di sospendere le pubblicazioni è prova di audacia; a questa il prof. Castelnuovo augura lieta fortuna.

Il Socio Levi-Civita presenta alcune pubblicazioni colle seguenti parole:

Ho l'onore di presentare all'Accademia da parte del collega Maggi la seconda edizione del suo volume sulla *Dinamica dei sistemi.* Questa costi-

tuisce l'ultima parte di un corso di meccanica razionale, il cui disegno generale è quello stesso della *Teoria matematica del movimento dei corpi* pubblicata fin dal 1896, che già riscosse (nella relazione per il conferimento di un premio reale) i lusinghieri apprezzamenti del Beltrami.

Le esigenze didattiche e l'opportunità, oramai generalmente riconosciuta, di rendere più immediata la corrispondenza fra il pensiero e la formula coll'uso dell'agile algoritmo vettoriale, indussero l'A. a rimaneggiare l'opera primitiva in modo che, tra gli stessi confini, divenisse più densa la materia e più diffusa la trattazione. E ne sorsero così quattro volumi (editi più volte), destinati dal Maggi ai suoi studenti, ma utili altresì agli studiosi per la profonda meditazione cui si trovano sottoposti i principî e i punti concettualmente più delicati.

Anche il Socio Guidi mi ha affidato il gradito incarico di una presentazione di libri da parte sua. Egli fa omaggio all'Accademia di una sua recente monografia *Sulla statica delle dighe di sbarramento per laghi artificiali* e del suo ben noto trattato sulla *Scienza delle costruzioni*. Esso consta, come i colleghi sanno, di 7 volumi (compreso uno di esercizi), alcuno dei quali già è pervenuto alla decima edizione.

Sarebbe evidentemente superfluo, anzi addirittura inopportuno, il segnalare all'Accademia, sia pure con la consueta e doverosa concisione, le caratteristiche essenziali di un'opera già da tempo benemerita dell'insegnamento tecnico, che da molti anni è guida precipua dei nostri ingegneri sia per la loro preparazione scolastica, sia per successiva consultazione nei casi dubbî offerti da elevato esercizio professionale.

Ma se è inutile il commento, anche più accetto riescirà, io penso, all'Accademia l'omaggio di un trattato, che è il solo veramente completo e può ben dirsi il trattato nazionale di meccanica applicata alle costruzioni.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 marzo 1921.

Berlese A. — Mezzo per separare gli Artropodi raccolti col collettore Berlese dalla terra caduta con essi (Estr. dal « Redia », vol. VII). Firenze, 1921. 8°, pp. 1-4.

Boussinesq J. — Cours de physique mathématique de la Faculté des Sciences, tome III. Paris, 1921. 8°, pp. I-XLVIII, 1-417.

Cornaro M. — Scritture sulla laguna veneta, vol. 1. Venezia, 1919. 4°, pp. 1-178.

Fanfani E. — La riforma del Calendario. Pavia, 1920. 8°, pp. 1-9.

Leonardi G. — Monografia delle Cocciniglie italiane. Portici, 1920. 8°, pp, I-VI, 1-555.

Longo B. — Su la partenocarpia (Estr. dalla « Rivista di biologia », vol. II, fasc. VI). Roma, 1920. 8°, pp. 1-15.

L'organisation et l'activité de la Federazione Italiana dei consorzi agrari. Rome, 1920. 8°, pp. 1-17.

Pirotta R. — Commemorazione di Pasquale Baccarini (Estr. dal « Nuovo Giornale botanico italiano », vol. XXVI, 1919, pp. 235-238). Roma. 1920. 8°.

Pottier J. — Recherches sur le développement de la feuille des Mousses. Chartres, 1920. 8°, pp. I-III, 1-144.

Washington H. S. — Italite: a new Leucite Rock (Repr. from the « Journal of the Washington Academy of Sciences », vol. X, pp. 270-272). Washington, 1920. 8°.

Washington H. S. — Italite: a new Leucite Rock (From the « American Journal of Sciences », vol. L, pp. 33-47). Washington, 1920. 8°.

Washington H. S. — Note ou Angite from Vesuvius and Etna (From the « American Journal of Science », vol. L, pp. 20-30). Washington, 1920. 8°.

Washington H. S. — The Rhyolites of Lipari (From the « American Journal of Science », vol. L, pp. 446-462). Washington, 1920. 8°.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXX. (1892-1921). Fasc. 6°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 7°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 7.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile*

Pubblicazione bimensile. N. 8.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXX.° — Fascicolo 8°

Seduta del 17 aprile 1921.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCAD. NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Nota II del Socio C. Segre.

5. Aggiungiamo che su una superficie non sviluppabile che verifichi un'equazione di Laplace, non solo non può svanire in ogni punto la coppia (7) delle tangenti alle caratteristiche (perchè A, B, C non possono essere tutte tre nulle identicamente); ma nemmeno può essere indeterminata la terna delle ulteriori tangenti principali. Invero questo fatto significherebbe che son nulle identicamente le 4 quantità (ξx^{pqr}), ove p, q, r valgono 1 o 2. La (39) di « *Sup* » (n. 20) ci darebbe: $(\xi^r x^{pq}) = 0$; e questa colle (36) e (37) proverebbe che tanto le ξ_i^1 quanto le ξ_i^2 soddisfano quelle stesse 6 equazioni lineari omogenee (1) e (8), che individuano i rapporti delle ξ_i. Ne seguirebbe, per ogni combinazione ik, $\xi_i^1 \xi_k - \xi_k^1 \xi_i = 0$, $\xi_i^2 \xi_k - \xi_k^2 \xi_i = 0$; e quindi i rapporti $\xi_i : \xi_k$ sarebbero costanti: la superficie starebbe in un iperpiano ξ fisso, contro l'ipotesi.

6. Vogliamo ora riconoscere, per una superficie *qualunque* F appartenente a S_5, quando avviene che in tutti i suoi punti le tangenti principali siano indeterminate.

In base al n. preced^e possiamo già escludere le superficie non sviluppabili soddisfacenti a un'equazione di Laplace. Di conseguenza (« *Sup.* » n. 5 e n. 13) per un punto generico x della F il cono quadrico V_4^2 (n. 1) sarà irriducibile. Ciò posto, ci conviene mutare il problema nel suo duale entro S_5 (cfr. « *Sup.* » n. 10, « *Prelim* » n. 22). In luogo della superficie F, avremo

una ∞^2 d'iperpiani; invece dei piani tangenti di F, il sistema Σ dei *piani caratteristici* di quella ∞^2 d'iperpiani. Al cono quadrico V_4^2 dianzi nominato risponderà la *conica focale* di un piano di Σ entro questo sistema ∞^2: tale conica nel caso attuale sarà dunque, per un piano generico, irriducibile. Quanto poi ai 5 iperpiani ξ del n. 1, essi si trasportano in 5 punti di quella conica focale, i quali, in base all'osservazione del n. 2, si potranno riguardare come intersezioni della conica stessa con coniche focali infinitamente vicine: dunque come *fochi di 2° ordine* per Σ (1). Così il nostro problema si trasforma in questo: quando è che, non solo 5, ma tutti i punti di ogni conica focale di Σ sono fochi di 2° ordine.

Ora a tale questione risponde appunto il n. 4 della mia ultima Nota, ora citata, quando lo si applichi alla projezione su un S_4 del sistema di piani Σ. Si vede così che Σ è l'insieme degli ∞^2 piani contenenti le coniche di una superficie del 4° ordine di Veronese. Per conseguenza il sistema dei piani tangenti di F, da cui Σ s'era ottenuto per dualità, sarà l'insieme dei piani tangenti di una superficie di Veronese: e quindi F sarà appunto una tal superficie. Otteniamo dunque il seguente risultato:

Le sole superficie appartenenti a S_5, *per le quali sono indeterminate in ogni punto le 5 tangenti principali, ossia per cui tutte le linee son linee principali, sono le superficie sviluppabili e la* F^4 *di Veronese.*

7. Il concetto di *linea principale* per una superficie di S_5 si può illustrare da un nuovo punto di vista, con la seguente considerazione, che è evidentemente capace di essere ulteriormente estesa.

Precisiamo l'*ordine infinitesimale di vicinanza*, per due piani infinitamente prossimi, di S_5, assumendoli in una ∞^1 di piani, che determiniamo con 3 punti $x\,y\,z$ funzioni di un parametro variabile t. Intenderemo cioè per « ordine di vicinanza » dei piani corrispondenti ai valori $t, t+dt$ del parametro, l'ordine infinitesimale, rispetto a dt come infinitesimo principale, del determinante

$$(9) \qquad |x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\ ,\ x(t+dt)\ ,\ y(t+dt)\ ,\ z(t+dt)|\,.$$

È subito visto che questo numero non muta, se sostituiamo x, y, z con 3 punti qualunque, non allineati, combinazioni lineari di quelli, a coefficienti funzioni di t.

Sviluppando $x(t+dt), \ldots$ secondo le potenze di dt, risulta che il 1° termine nello sviluppo di quel determinante sarà in generale dt^3 moltiplicato pel determinante $D = |x\,y\,z\;x'\,y'\,z'|$. Dunque: in generale la vicinanza di due piani successivi è *del 3° ordine*. — Perchè venga ad essere d'ordine

(1) Cfr. la mia Nota precedente, alla pag. 67 di questo vol. dei Rendiconti, *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti.*

superiore, dovrà annullarsi D. Supposto che ciò accada per ogni valore di t, s'annullerà pure la derivata di D: la quale è precisamente il coefficiente di $\frac{1}{2}dt^4$ nello sviluppo di (9). Vediamo così che *se in una ∞^1 di piani l'ordine di vicinanza di due piani successivi generici è superiore al 3°, esso sarà almeno uguale a* 5. Questo caso, dell'annullamento identico di D, avverrà (« *Prelim*ⁱ » § 1) quando la V_3 luogo degli ∞^1 piani ha lungo ogni piano un S_4 (od S_3) tangente, cioè ogni piano ha un foco (punto d'incidenza col piano successivo), sicchè: o tutti i piani son tangenti ad una stessa linea, luogo di quel foco; oppure passano tutti per uno stesso punto: il che escluderemo, non essendovi occasione allora ad ulteriori ricerche, perchè il determinante (9) riesce $\equiv 0$.

Siano dunque gli ∞^1 piani tangenti ad una stessa linea L, il cui punto variabile assumeremo per $x(t)$. Potremo allora prendere y in $x'(t)$; e il determinante (9), sviluppato, diventerà

$$|x(t)\ ,\ x'(t)\ ,\ z(t)\ ,\ x(t+dt)\ ,\ x'(t+dt)\ ,\ z(t+dt)| =$$
$$= \frac{1}{12}dt^5\,|x\,x'\,x''\,x'''\,z\,z'| + \frac{1}{24}dt^6\left\{|x\,x'\,x''\,x^{\text{IV}}\,z\,z'| + |x\,x'\,x''\,x'''\,z\,z''|\right\} + \cdots$$

Perchè questo risulti sempre infinitesimo d'ordine superiore al 5° dev'essere identicamente

$$(10) \qquad |x\,x'\,x''\,x'''\,z\,z'| = 0\,.$$

Derivando, si vede che sarà nullo anche il coefficiente di dt^6; sicchè: *se l'ordine di vicinanza è superiore a* 5, *esso varrà almeno* 7. Ove la V_3 luogo degli ∞^1 piani non sia sviluppabile (ordinaria), e quindi sia determinato l'iperpiano che le è tangente lungo un piano generico $x\,x'\,z$, — iperpiano di questi punti e di $x''\,z'$, — la (10) dice che esso conterrà anche x''', cioè avrà contatto quadripunto in x colla L. (Se invece la V_3 è sviluppabile, ossia l'insieme dei piani osculatori di una linea, si potrà assumere z in $x''(t)$, e si riconosce subito che l'ordine di vicinanza di due piani successivi sale a 9).

In tal modo quelle varietà di ∞^1 piani, che s'erano già incontrate al n. 3 in relazione colle linee principali di F, risultan caratterizzate sotto un nuovo aspetto: in esse due piani successivi son più prossimi fra loro (ordine 7), che non nel caso generale (ordine 3), e nel caso di ∞^1 piani tangenti ad una linea, senz'altra particolarità (ordine 5).

Ritornando appunto al n. 3 e all'insieme dei piani tangenti di una superficie, potremo ora dire che: *mentre due piani tangenti successivi di una superficie hanno in generale vicinanza del 5° ordine, se i loro punti di contatto stanno su una stessa linea principale la vicinanza è del 7° ordine (almeno).* E il teorema finale del n. 6 si potrà anche enunciare così: *Se una superficie appartenente ad* S_5 *è tale che due piani tangenti successivi abbian sempre vici-*

nanza d'ordine superiore al 5°, *la superficie è sviluppabile* (l'ordine di vicinanza = 9), *oppure è la* F^4 *di Veronese* (l'ordine di vicinanza è infinito, perchè i piani tangenti sono a due a due incidenti).

8. Il fatto che l'ordine infinitesimale di vicinanza di due piani di S_5 salta da 3 a 5, da 5 a 7, da 7 a 9, rientra in una proposizione generale relativa agli S_k di S_{2k+1}, con k pari.

Introduciamo per questi S_k le coordinate di Grassmann: determinanti d'ordine $k+1$ estratti dalla matrice delle coordinate omogenee di $k+1$ punti indipendenti. Indichiamole con p_r, ove r sia un numero $1, 2, \ldots, \binom{2k+2}{k+1}$, con cui si rappresenti una determinata permutazione di $k+1$ fra gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$ di quelle coordinate omogenee di punti. Anzi, indichino 1 e 2, come pure 3 e 4, e poi 5 e 6, ecc., delle permutazioni *complementari*, nel senso che, prese insieme nell'ordine indicato, costituiscano una permutazione pari di tutti gl'indici $1, 2, \ldots, 2k+2$. Allora, *nell'ipotesi fatta che k sia pari*, il determinante delle coordinate dei $2k+2$ punti che determinano due S_k, p e q, si potrà scrivere come forma bilineare alternata delle coordinate di questi spazi: $[p, q] = (p_1 q_2 - p_2 q_1) + (p_3 q_4 - p_4 q_3) + \cdots$ (¹). E così il determinante analogo a (9), che serve a valutare l'ordine di vicinanza di due S_k, viene a rappresentarsi con $[p(t), p(t+dt)]$; che, sviluppando $p(t+dt)$ secondo le potenze di dt, diventa $\Sigma \frac{1}{a!}[p, p^a]\, dt^a$ (significando con p_r^a la derivata d'ordine a di p_r rispetto a t). L'ordine di vicinanza sarà dato, in ciascun caso, dal primo indice a che comparirà effettivamente in questa serie: vale a dire dal primo a tale che la $[p, p^a]$ non sia nulla. Come al n. preced^e si riconoscerà che quest'ordine è almeno uguale a $k+1$.

Ciò premesso, supponiamo che l'*ordine di vicinanza sia* $m+1$ (*almeno*), cioè che sian nulle, identicamente rispetto a t, tutte le $[p, p^a]$ con $a \leq m$. Dico che saran pure nulle tutte le $[p^b, p^c]$ con $b + c \leq m$. Invero da $[p, p^{a-1}] = 0$, derivando rispetto a t, e tenendo conto che $[p, p^a] = 0$, segue $[p', p^{a-1}] = 0$, per $a \leq m$. Quindi anche $[p', p^{a-2}] = 0$; sicchè, derivando e basandosi sulla precedente, si ha $[p'', p^{a-2}] = 0$. Così pure sarà $[p'', p^{a-3}] = 0$; e derivando, e valendosi dell'ultima, si trae: $[p''', p^{a-3}] = 0$. E così via.

Fissando ora che $m+1$ sia pari $= 2\mu$, avremo dunque:

$$[p, p^m] = 0\ ,\ [p', p^{m-1}] = 0\ ,\ [p'', p^{m-2}] = 0, \ldots, [p^{\mu-1}, p^{\mu}] = 0,$$

(¹) Cfr. il principio della mia Memoria *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni* (Annali di Matem. (3) 27, 1918, pag. 75).

e derivando:

$$[p, p^{m+1}] + [p', p^m] = 0 \,,\; [p', p^m] + [p'', p^{m-1}] = 0 \,,\; [p'', p^{m-1}]$$
$$+ [p''', p^{m-2}] = 0 \,,\; \dots\; [p^{\mu-1}, p^{\mu+1}] + [p^\mu, p^\mu] = 0 \,,$$

donde, essendo $[p^\mu, p^\mu] = 0$, segue $[p, p^{m+1}] = 0$; sicchè l'ordine effettivo di vicinanza risulta almeno $m+2$, e non $m+1$.

Concludiamo che: *in* S_{2k+1}, *quando* k *è pari, l'ordine infinitesimale di vicinanza di due* S_k *è sempre dispari.*

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota III del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

6. Esposte nelle Note I, II [1] le necessarie premesse di carattere prettamente algebrico, e conservando le notazioni precedenti, poniamo

$$u_i = \int \frac{\varphi_i(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}\, dx \qquad (i = 1, 2, \dots, p), \tag{17}$$

sicchè u_i è un integrale abeliano di 1ª specie sulla curva variabile $f(x, y, z) = 0$, con y parametro. Supporremo, una volta per sempre, che gli assi coordinati sieno disposti genericamente, per guisa che nel fascio $y =$ cost. non vi sia che un numero finito di piani tangenti (ordinarî) alla superficie F. La curva segata su F, fuori della linea doppia, da $f'_z = 0$ non ha allora nessuna parte situata in qualche piano $y =$ cost., e quindi u_i non diventa mai identicamente infinito, qualunque sia il piano $y =$ cost. che si considera. L'integrale u_i può però diventare di 3ª specie in corrispondenza ai <u>valori</u> *singolari* di y (valori di y che dànno i piani $y =$ cost. tangenti ad F). Se $y = b$ è uno di questi piani tangenti e ne è (a, b, c) il punto di contatto, che designeremo brevemente con a, l'integrale u_i relativo alla curva $f(x, b, z) = 0$, avrà generalmente due punti logaritmici sovrapposti, sui due rami di tale curva uscenti da a. Ma questi punti logaritmici possono anche mancare, cioè u_i può rimanere di 1ª specie anche per $y = b$. Questo accade allora e solo allora che la superficie $\varphi_i(x, y, z) = 0$ passi per a.

Gli integrali u_i saranno linearmente indipendenti per ogni valore di y, che non sia critico pel sistema lineare L delle $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$: i valori critici di L continueranno a chiamarsi *critici* anche rispetto agl'integrali u_i. Tra

[1] Questi Rendiconti, pag. 163 e pag. 204.

questi valori critici deve comprendersi, come sappiamo, il valore $y = y_0$ se

$$\varphi_{q+1} = (y - y_0)\,\psi_{q+1}\,,\ldots,\,\varphi_p = (y - y_0)\,\psi_p\,,$$

le $\psi_{q+1} = 0\,,\ldots,\,\psi_p = 0$ essendo $p - q$ aggiunte indipendenti d'ordine $m - 3$; o il valore $y = \infty$, se si è preso addirittura

$$\varphi_{q+j} = \psi_{q+j} \qquad (j = 1\,,\ldots,\,p - q).$$

Qui è opportuno notare in modo esplicito un fatto, a prima giunta paradossale. Quando la superficie è regolare ($q = p_g - p_a = 0$) si possono prendere le $\varphi_1\,,\ldots,\,\varphi_p$ coincidenti colle $\psi_1\,,\ldots,\,\psi_p$, ed allora sembra che non vi sieno per gl'integrali u_i altri valori critici che quelli del sistema $\lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_p\psi_p = 0$ e non il valore $y = \infty$. Cosicchè a prima vista si è tratti a concludere che per una superficie regolare di genere $p_g = 0$ gl'integrali u_i, scelti nel modo suddetto, non hanno alcun valore critico! E ciò contraddirebbe al modo come si costruiranno poi gl'integrali semplici di 1ª specie di F, a partire appunto da un sistema d'integrali privo di valori critici. Ma in realtà, anche nel caso in cui le $\varphi_1\,,\ldots,\,\varphi_p$, per essere la superficie regolare, possono identificarsi con altrettante superficie aggiunte d'ordine $m - 3$, $y = \infty$ continua ad esser critico per gl'integrali u_i, come quando, essendo $q > 0$, s'identificavano le $\varphi_{q+1}\,,\ldots,\,\varphi_p$ colle $\psi_{q+1}\,,\ldots,\,\psi_p$. Per convincersene si assoggetti lo spazio alla trasformazione omografica

$$x = \frac{x'}{y'}\,,\quad y = \frac{1}{y'}\,,\quad z = \frac{z'}{y'}\,, \tag{18}$$

che muta il fascio $y = \text{cost.}$ nel fascio $y' = \text{cost.}$ ed il piano $y = \infty$ nel piano $y' = 0$.

Designata con ψ una qualunque delle $\psi_{q+1}\,,\ldots,\,\psi_p$ $(q \geq 0)$ e posto

$$f(x\,,y\,,z) \equiv g(x\,,y\,,z) + h(x\,,y\,,z) + \cdots$$
$$\psi(x\,,y\,,z) \equiv \eta(x\,,y\,,z) + \zeta(x\,,y\,,z) + \cdots,$$

ove $g\,,h\,,\ldots$ son costituiti da tutti i termini dei gradi rispettivi $m\,,m-1\,,\ldots$ del polinomio f, e similmente $\eta\,,\zeta\,,\ldots$ son polinomi omogenei dei gradi rispettivi $m - 3\,,m - 4\,,\ldots$, si trova subito che l'integrale $u = \int \frac{\psi}{f'_z}dx$ trasformasi, mediante la (18), nell'integrale di 1ª specie

$$u' = y' \int \frac{\eta(x'\,,1\,,z') + y'\zeta(x'\,,1\,,z') + \cdots}{g'_{z'}(x'\,,1\,,z') + y'\,h_{z'}(x'\,,1\,,z') + \cdots}\,dx'$$

relativo alla curva $g(x'\,,1\,,z') + y'h(x'\,,1\,,z') + \cdots = 0$. Sul piano $y' = 0$ si ha pertanto identicamente $u' = 0$. E ciò significa che gl'*integrali* $\int \frac{\psi_{q+j}}{f'_z}dx$, $(j = 1\,,\ldots,\,p - q)$, *ove* $\psi_{q+1} = 0\,,\ldots,\,\psi_p = 0$ *sieno aggiunte d'ordine* $m - 3$ *ad* F, *si annullano identicamente per* $y = \infty$.

Da ciò intanto segue che $y = \infty$ è critico anche per $q = 0$; e questo dirime l'accennato paradosso. Ponendo $\varphi_j = (y - y_0)\,\psi_j$, il valore $y = \infty$, nel caso $q = 0$, cessa di esser critico, ma si ha invece come valore critico $y = y_0$. In ogni caso si conclude che *fra i valori critici degli integrali* u_i $(i = 1, \ldots, p)$ *ce n'è sempre uno* $(y = y_0$ o $y = \infty)$ *per cui gl'integrali* $u_{q+1}, \ldots, u_p$ *si annullano identicamente.*

7. Fissato un valore iniziale generico $y = \gamma$, distinto dai valori singolari, sulla riemanniana $f(x, \gamma, z) = 0$, consideriamo un sistema di p retrosezioni $\overline{A}_j, \overline{B}_j$ $(j = 1, \ldots, p)$. Variando y con continuità a partire da γ, quel sistema di retrosezioni si muta in un sistema di retrosezioni A_j, B_j per la curva variabile $f(x, y, z) = 0$; e finchè (sul piano ov'è distesa la variabile complessa y) si va da γ ad un altro valore non singolare γ', con un cammino ben determinato, nessuna ambiguità è possibile nella definizione delle retrosezioni limiti sulla curva $f(x, \gamma', z) = 0$, in quanto ogni punto di diramazione della riemanniana variabile tende ad una ben definita posizione limite. L'esame, fatto da Picard, circa il modo di comportarsi dei cicli della curva variabile $f(x, y, z) = 0$, nell'intorno di un valore singolare di y, permette di precisare agevolmente che cosa succede quando y circola attorno o addirittura va a coincidere con un valor singolare [1]. Ma per ora non ci occorre di specificar di più, bastandoci solo di avvertire che, se da γ si va ad un altro valore non singolare γ', gl'infiniti sistemi di retrosezioni che si ottengono sulla $f(x, \gamma', z) = 0$, in corrispondenza ai singoli cammini descritti da y, costituiscono tanti sistemi di $2p$ cicli primitivi di $f(x, \gamma', z) = 0$; e quindi che i cicli di uno qualunque di quei sistemi si esprimono come combinazioni lineari a coefficienti interi dei cicli di uno prefissato fra essi.

Premesso tutto ciò e supposto che il valore iniziale $y = \gamma$, oltrechè distinto dai valori singolari, lo sia anche dai valori critici degl'integrali u_i, indichiamo con $\overline{\omega}_{ij}, \overline{\omega}_{i,p+j}$ i periodi dell'integrale u_i, relativo alla curva $f(x, \gamma, z) = 0$, lungo i cicli $\overline{B}_j, \overline{A}_j$ percorsi nel verso positivo; e sieno $\omega_{ij}, \omega_{i,p+j}$ i periodi che derivano per continuità da quelli, quando y varia a partire da γ. Finchè y non va a coincidere con un valore singolare o critico, ha luogo la relazione riemanniana:

$$\sum_{j=1}^{p} (\omega_{ij}\,\omega_{k.p+j} - \omega_{kj}\,\omega_{i.p+j}) = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, p)$$

[1] I punti attorno a cui si produce una sostituzione lineare a coefficienti interi sui cicli A_j, B_j sono soltanto i valori singolari (Picard). Veramente *a priori* potrebbe sembrare che analogo fatto si producesse in corrispondenza ai punti di contatto delle tangenti tripunte di F parallele all'asse z, in quanto anche in ciascuno di essi coincidono due punti di diramazione della superficie di Riemann variabile $f(x, y, z) = 0$. Ma un tal dubbio si rimuove subito, osservando che quei punti cessano d'essere di diramazione se, invece di x, si prende come variabile indipendente z.

e la diseguaglianza fondamentale

$$\sum_{j=1}^{p} (\omega'_j \omega''_{p+j} - \omega''_j \omega'_{p+j}) > 0 \,, \tag{19}$$

ove

$$\omega_j = \omega'_j + \omega''_j \sqrt{-1} \quad , \quad \omega_{p+j} = \omega'_{p+j} + \omega''_{p+j} \sqrt{-1}$$

sieno i periodi, lungo i cicli B_j, A_j, d'una qualsiasi combinazione lineare u, a coefficienti interi non tutti nulli, degl'integrali u_i. Tutto ciò perchè la curva variabile $f(x, y, z) = 0$ non s'abbassa di genere, le A_j, B_j non cessan di essere su essa retrosezioni e gl'integrali u_i non cessano d'esser su di essa linearmente indipendenti.

Immaginiamo ora il corpo Ω di funzioni abeliane relative alla tabella dei periodi ω_{ih} $(i = 1, \dots, p\,;\ h = 1, \dots, 2p)$, i quali son funzioni olomorfe di y nell'intorno di ogni valore non singolare. Per un teorema classico [1], queste funzioni abeliane si esprimono razionalmente mediante le funzioni Θ relative alla tabella

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \varrho_{11} & \dots & \varrho_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \varrho_{p1} & \dots & \varrho_{pp} \end{matrix} \qquad (\varrho_{ik} = \varrho_{ki}) \,,$$

ove le ϱ son definite dalle

$$\omega_{i.p+j} = \sum_{k=1}^{p} \omega_{ik} \varrho_{kj} \qquad (i, j = 1, \dots, p) \,, \tag{20}$$

e gli argomenti $w_1, \dots, w_p$ delle Θ son legati agli argomenti $v_1, \dots, v_p$ di quel corpo di funzioni abeliane, dalle relazioni

$$v_i = \sum_{k=1}^{p} \omega_{ik} w_k \qquad (i = 1, \dots, p) \tag{21}$$ [2].

La condizione di convergenza delle suddette serie Θ [che si può esprimere mediante la diseguaglianza (19)] [3], *resta sempre soddisfatta qualunque sia* y, *purchè diverso dai valori critici e singolari.* La forma delle relazioni (20), (21), che definiscono le ϱ, w, considerata insieme al fatto classico che il determinante delle ω_{ik} non è nullo pei valori considerati di y (perchè altrimenti gl'integrali u_i sarebbero dipendenti), ci assicura che le Θ, nel campo di variabilità considerato per y, restano sempre finite.

Consideriamo adesso le funzioni del corpo Ω quali funzioni sia degli argomenti $v_1, \dots, v_p$, come di y (attraverso ai periodi ω). Nel parallelepi-

(1) Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Leipzig, Teubner, 1903), pag. 127.

(2) Krazer, loc. cit., pag. 123.

(3) Krazer, loc. cit., pag. 124.

pedo dei periodi esse non hanno alcuna singolarità essenziale (Krazer, p. 115) come funzioni delle sole $v_1, \dots, v_p$. È facile da ciò dedurre che le dette funzioni sono, anche rispetto ad y, nell'intorno di ogni valore ordinario $y = \gamma'$, o olomorfe o meromorfe. Infatti, se una Φ delle funzioni di Ω è, per $y = \gamma'$, funzione olomorfa di $v_1, \dots, v_p$ nell'intorno di $v_1 = c_1, \dots, v_p = c_p$ (ove $c_1, \dots, c_p$ sieno valori finiti prefissati degli argomenti v), essa resta finita e uniforme, e perciò olomorfa, anche come funzione di y nell'intorno di γ'. Se invece per $y = \gamma'$ la suddetta Φ si esprime come quoziente $\frac{H}{K}$ di due funzioni H, K olomorfe nell'intorno di $(c_1, \dots, c_p)$, ciascuna delle H, K sarà olomorfa anche come funzione di y nell'intorno di γ' e quindi Φ sarà funzione meromorfa di y. Pertanto:

Ogni funzione abeliana del corpo Ω è funzione olomorfa o meromorfa di y attorno ad ogni valore non singolare nè critico.

Astronomia. — *Sulla applicazione del calcolo vettoriale alla Astronomia.* Nota del Socio A. Abetti [1].

Il prof. A. Antoniazzi, direttore dell'Osservatorio di Padova, successore del compianto illustre maestro Lorenzoni, già a sua volta successore di quell'altra gloria nostra che fu il toscano Santini [2], ha resa pubblica una sua Memoria [3], che è un primo passo di applicazione del calcolo vettoriale all'Astronomia sferica; e ciò dopo che ne aveva esperimentati i vantaggi applicandolo, nelle sue lezioni, all'Astronomia teorica, cioè alle trattazioni relative alle orbite planetarie [4].

Nella suddetta Memoria di pagine 60, circa la metà sono impiegate ad esibire quelle nozioni di calcolo vettoriale, che occorsero per applicarlo alla correlazione fra i vettori e le coordinate cartesiane ed i circoli della sfera celeste, ed inoltre per la trasformazione di coordinate, per i problemi di moto diurno e siderale e per le orbite planetarie. È sembrato allo scrivente tale l'importanza della prefata Memoria da sentirsi spinto ad incoraggiarne, con parole proprie, lo studio ai giovani astronomi a cui oggi spetta

(1) Presentata nella seduta del 20 marzo 1921.

(2) Di Caprese aretino n. 1787 m. 1877. Il suo testo del 1830, Padova, Tip. Seminario, tiene per noi Italiani altrettanto bene il luogo quanto il Chauvenet ed il Brünnow per gli Inglesi e Tedeschi.

(3) Antoniazzi A. M., *Di un rapido procedimento didattico per la trattazione dei principali problemi dell'Astronomia.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXXIX, Parte seconda (adunanza 8 luglio 1920).

(4) Un'applicazione simile venne a me sott'occhio colla quinta edizione degli *Elementi di Fisica* del collega prof. Ròiti e nel vol. II: *Elettricità e Magnetismo,* alle prime pagine sono date le nozioni preliminari sui campi vettoriali.

raccogliere ed aumentare il nostro patrimonio scientifico. Con questo intendimento è sembrato utile fare il tentativo di produrre ed illustrare quanto più popolarmente sia possibile uno degli esempi di quella Memoria, mettendo in evidenza la celerità con cui il calcolo vettoriale riesce a stabilire formole già note ed in uso e state dedotte per vie diverse e principalmente colla trigonometria sferica.

*
* *

Certe grandezze astratte come le forze, la velocità e l'accelerazione, sono rappresentabili con segmenti di rette [1] a cui fu convenuto di assegnare una lunghezza, ragguagliata ad una unità di misura, e presa per un verso, positivo o negativo secondo che si considera il segmento da un estremo oppure dall'altro, ed ancora di esso è assegnata la direzione fondamentale scelta per riferimento. Tali grandezze si chiamano « vettori » [2] e costituiscono un algoritmo geometrico a cui sono applicabili le operazioni algebriche e del calcolo infinitesimale, e per la sua proprietà di prendere in conto la direzione, ossia la posizione nello spazio, risolve prontamente ed elegantemente i problemi che del medesimo fanno al caso nostro.

Un vettore individuato da un segmento OA si rappresenta colla notazione A — O in cui si deve intendere il senso preso da O verso A e si legge A meno O, e giova, a quella rappresentazione simbolica, un' unica lettera in grassetto così che con

$$A - O = \mathbf{a}$$

si deve per noi intendere il vettore **a** che fisso in O variando la sua direzione in ogni senso è capace per via del punto A di descrivere la superficie di una sfera.

I raggi visuali che dal nostro occhio, centro della sfera celeste, sono diretti alle stelle sono altrettanti vettori, e poichè per la risoluzione dei problemi della sfera fu ideata la Trigonometria sferica, nonchè assegnate le correlazioni con un sistema di assi ortogonali, oggi l'applicazione del calcolo vettoriale all'Astronomia, rivelato nella Memoria dell'Antoniazzi, è un primo passo di correlazione del nuovo metodo coi precedenti. Siccome i raggi vettori abbisognano di riferimento, il più logico di tutti sarà quello dei tre assi

(1) Sia che si tratti di grandezze ad una, a due od a tre dimensioni, cioè grandezze lineari, superficiali o cubiche. Quest'ultime contengono il concetto di spazio per tutti i punti del medesimo i quali costituiscono una triplice infinità che viene rappresentata con la terza potenza dell'infinito, cioè ∞^3.

(2) Il calcolo vettoriale ebbe i suoi precursori, o padri che si vogliano dire, e fra questi va notato il Bellavitis dell'Università di Padova che inventò nel 1832 il metodo delle « equipollenze » e lo espose nel Cap, III del suo trattato: *Elementi di geometria, trigonometria e geometria analitica*. Padova, Tip. del Seminario, 1862.

ortogonali che partono dal centro O della sfera e la incontrano ai vertici A′A″A‴, oppure ABC od altrimenti, del ben noto trirettangolo e determinano colla nuova veduta tre vettori fondamentali. I tre piani comprendenti a due a due i tre assi formano un triedro che ha il vertice in O e per base, sulla sfera, il trirettangolo che dunque ha i tre angoli retti, e tali sono anche i diedri, ed ha per lati i tre archi di cerchio massimo di 90° intersezioni della sfera celeste coi tre piani coordinati.

Intendiamo ora di vedere il trirettangolo della sfera disegnato sul piano della carta come nella fig. 1; i tre vettori fondamentali che partono dal centro O della sfera la incontreranno nei tre punti XYZ.

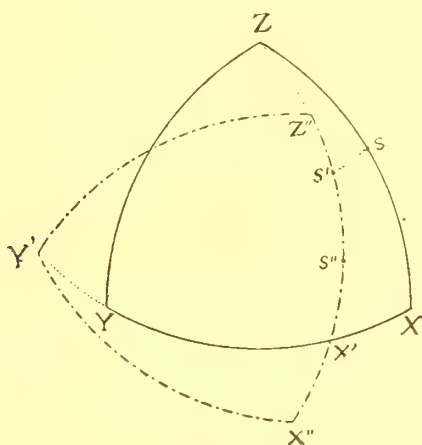



Fig. 1.

Supposto che sulla sfera il punto mobile S si stacchi dal piano fondamentale ZX verso di noi che guardiamo la figura, avremo, col soccorso dei vecchi precetti, che una qualunque sua nuova posizione (S) resta determinata da due coordinate sferiche, che sono l'angolo sferico in Z e la distanza polare Z(S). Ad ogni mutazione di posto della S corrisponde una variazione di queste coordinate e, nel tempo stesso, corrisponde una variazione del vettore S — O che passa in (S) — O. Ora questa variazione vettoriale può immaginarsi dipendente da una rotazione [1] suscettibile di essere riferita e decomposta, secondo i tre assi coordinati.

S'immagini ora il sistema dei quattro punti XYZS rigidamente congiunto, come si trattasse di una configurazione stellare, e ruoti esso da X verso Y intorno a Z e di più pensiamo a volontà che Z rappresenti o il polo del mondo, o quello dell'eclittica, o l'altro dell'orizzonte, cioè il zenit.

[1] Su questo concetto della rotazione vedasi nelle Astr. Nachr. 5011, l'articolo: *Ein didaktisches Hilfsmittel zur sphärischen Astronomie*, von E. Anding.

In causa della rotazione intorno a Z questo punto resta immobile e gli altri tre punti prendono le posizioni segnate con un apice. Alla posizione S′ corrisponde una variazione dv dell'angolo al polo, che secondo i casi sarà, senza considerazione di segno, $d\alpha$, $d\lambda$ oppure dA. Una seconda rotazione intorno ad Y′ porterà S′ in S″ aumentando la distanza polare di S di una quantità dp corrispondente, in valore assoluto, ad una variazione $d\delta$, $d\beta$ oppure dh. Queste due rotazioni possiamo anche pensarle concomitanti alternate, od anche inverse, nel qual caso però occorrono le considerazioni di segno, perchè in realtà il punto S può passare in S″ in un numero infinito di modi.

Notiamo ora che una qualunque rotazione intorno ad S non sposta questo punto del pari come non si spostò Z nella prima rotazione nè Y′ nella seconda, e quest'avvertenza ci fa conoscere che se noi avremo bisogno di una rotazione arbitraria per concludere i valori delle variazioni delle due coordinate sferiche potremo applicarla insieme alle due già viste, immaginando che per tutte tre il punto si sia trasportato da S in S″. Nel caso in parola è la somma delle due rotazioni intorno a Z e ad Y′ che porta S in S″, ed in questa somma di due termini si può immaginare un terzo termine, corrispondente ad una rotazione intorno ad X, il quale venga annullato da una rotazione arbitraria. Il punto S sulla sfera celeste può, come si disse, passare in S″ in un numero infinito di modi; ma noi possiamo dire che supposto di conoscere la rotazione per cui il vettore S — O è diventato S″ — O possiamo scomporla in tre secondo gli assi e ve ne possiamo aggiungere anche un'altra intorno ad S capace di annullare quella su X; allora le altre due daranno le formole per le variazioni delle due coordinate sferiche.

*
* *

Ora riporteremo l'esempio dato nella Memoria ai §§ 51, 52 relativo alle formole che esprimono la variazione annua in longitudine e latitudine delle stelle.

L'attrazione del Sole e della Luna sul rigonfiamento equatoriale dello sferoide terrestre combinata con la rotazione diurna produce un movimento del piano dell'equatore per cui la linea degli equinozî, ossia l'intersezione dei due piani, gira lentamente nel piano dell'eclittica in direzione opposta a quella in cui si contano le longitudini, che pertanto su di una eclittica fissa o media, corrispondente ad un'epoca t_0 come p. es. il principio dell'anno 1800, aumentano tutte della ben nota quantità chiamata la *precessione lunisolare*.

D'altra parte, le mutue attrazioni fra i pianeti e la Terra tendono continuamente a rimuovere questa dal suo piano, così che esso cambia di posizione senza influire su quella dell'equatore che in questo caso è riguardato come fisso o medio; ed è questa la *precessione planetaria* che modifica l'effetto della precedente e per cui si ha ciò che si chiama la *precessione*

generale. Per essa l'equinozio di primavera, origine delle longitudini e delle ascensioni rette, assume ad ogni istante una posizione celeste retrograda bene determinata.

Se ψ_1 è la precessione generale (1), l'equinozio nel tempo infinitesimo (2) dt retrograda con velocità (3) $\frac{d\psi_1}{dt}$ sull'eclittica del tempo t; e questa non è altro che una rotazione di senso retrogrado intorno al suo polo. D'altra parte l'eclittica ha un movimento di rotazione intorno alla linea che unisce

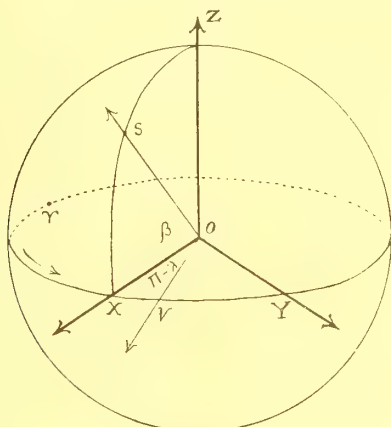



Fig. 2.

i due punti o nodi in cui si tagliano le due posizioni della medesima ai tempi t e $t + dt$. Ed è questa una variazione $\frac{d\pi}{dt}$ dell'inclinazione π dell'eclittica t rispetto alla media eclittica del tempo $1800 + t$ ossia una rotazione rappresentabile con un vettore diretto al nodo ascendente.

Nella fig. 2 è data disegnata prospetticamente la sfera celeste, intendendo che le longitudini siano contate dall'equinozio di primavera ♈ verso X e V nel senso della freccia. Si supponga che l'asse Z sia diretto al polo dell'eclittica, che VY sia il piano di questa al tempo t, che per il piano ZX resti determinato sulla sfera celeste il cerchio di latitudine della stella S di coordinate λ, β e finalmente che il segmento OV rappresenti il vettore $\frac{d\pi}{dt}$

(1) Cfr. Chauvenet, *A Manual of Spherical und Pratical Astronomy*, vol. I, *Precession*, §§ 364-370.

(2) Se si pensa che l'equinozio percorre in ciascun anno sull'eclittica un arco di 50″,2 e si fa il rapporto fra l'intera circonferenza di 360° e questo arco, si trova che occorrono circa 26000 anni affinchè l'equinozio percorra l'intera eclittica, supposto che conservi la velocità con cui si muove attualmente. Pertanto una unità di tempo dt di un anno o frazione del medesimo è da riguardarsi come un infinitesimo.

(3) Velocità che è la derivata dello spazio percorso rispetto al tempo.

la cui direzione è data dalla longitudine Π. Sarà allora l'angolo VOX la differenza fra le longitudini del vettore e della stella, cioè eguale a $\Pi - \lambda$.

Decomponiamo ora il vettore nelle due rotazioni complanari su X ed Y

$$\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda) \qquad \frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi - \lambda)$$

e ricordando che l'equinozio di primavera, da cui sono contate le longitudini di V e di S, è retrogradato per una rotazione $-\frac{d\psi_1}{dt}$ intorno a Z, diremo che lo spostamento totale del vettore S — O ha, rispetto ai tre vettori fondamentali, le tre componenti che seguono,

X	Y	Z
$\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda)$	$\frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi - \lambda)$	$-\frac{d\psi_1}{dt}$

Aggiungiamo ora una rotazione arbitraria intorno alla direzione della stella S; indicando con c una costante arbitraria potremo rappresentare quella rotazione con le tre componenti proiettate sui tre assi, e cioè con

$$c\cos\beta \quad | \quad 0 \quad | \quad c\operatorname{sen}\beta.$$

In base alle due formole vettoriali stabilite dal prof. Antoniazzi al § 29 della sua Memoria, deve la costante arbitraria c esser tale da annullare la rotazione intorno ad X, quindi deve essere

$$c\cos\beta = -\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda)$$

da cui

$$c = -\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda)\frac{1}{\cos\beta}.$$

Ed ora, conforme al precetto delle stesse formole, facciamo la somma delle tre colonne ed avremo il nuovo prospetto

per X	0
» Y	$\frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi - \lambda)$
» Z	$-\frac{d\psi_1}{dt} - \frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi - \lambda)\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}.$

Riferendoci alla fig. 1 vediamo che la prima rotazione che si fa intorno a Z esprime la variazione della longitudine e quella intorno ad Y la variazione in distanza polare, che qui per noi è il complemento della latitudine. D'altra parte la prima rotazione fa retrogradare l'equinozio, cioè l'ori-

gine delle longitudini, per cui queste aumentano, così che l'espressione del $\frac{d\lambda}{dt}$ sarà quella per Z mutata di segno, quindi

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{d\psi_1}{dt}+\frac{d\pi}{dt}\cos(\Pi-\lambda)\operatorname{tg}\beta\,.$$

L'espressione di latitudine, complemento della distanza polare, avrà l'espressione trovata per Y pure mutata di segno, cioè sarà:

$$\frac{d\beta}{dt}=-\frac{d\pi}{dt}\operatorname{sen}(\Pi-\lambda)\,.$$

Le due formole corrispondono pienamente a quelle del Chauvenet al problema del § 370 della determinazione della precessione annua in longitudine [1] e là si trovano indicate col numero (655), ben inteso che in esse i nostri $\frac{d\psi_1}{dt}$ e $\frac{d\pi}{dt}$ sono i coefficienti numerici calcolati dallo Chauvenet per l'epoca *1800* + *t*.

Chimica. — *A proposito di un lavoro del prof. E. Salkowski sopra le melanine.* Nota del Socio Angelo Angeli e di Antonio Pieroni [2].

Lo scorso anno [3] il prof. E. Salkowski ha pubblicato un lavoro sopra le melanine ricavate da alcuni tumori umani, nel quale dopo di avere esposto un metodo che permette di isolare questi interessanti pigmenti senza correre pericolo di alterarli in seguito a trattamenti con reattivi troppo energici, quale p. es. l'acido cloridrico concentrato consigliato da altri autori, descrive le proprietà dei prodotti così ottenuti e varie reazioni eseguite con lo scopo di trovare qualche fatto che permetta di formarsi un criterio almeno approssimato sopra la natura chimica di queste sostanze.

Siccome si tratta di un argomento del quale noi pure in questi ultimi anni, sebbene da un altro punto di vista, ci siamo occupati, così abbiamo reputato opportuno di sottoporre ad un attento esame i fatti importanti stabiliti dal Salkowski e soprattutto le conseguenze che egli ne ricava, ed a questo proposito dobbiamo subito dire che noi non condividiamo in tutto il suo modo di vedere.

(1) *To find the annual precession in longitude for a given date*, vol. I, ediz. 2ª, pag. 610, § 370.

(2) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

(3) Virchow's, Archiv. Band *227*, II (1920), pag. 121.

Uno dei fatti sperimentali più importanti descritti dall'A. è senza dubbio quello di avere trovato che *la melanina per fusione con eccesso di potassa fornisce pirrolo*; esso è in stretta relazione con le analogie, da noi ripetutamente poste in rilievo, che le melanine naturali presentano con i varî neri di pirrolo che noi abbiamo preparati sia ossidando il pirrolo coi soliti reattivi, come pure trattando il pirrolo stesso con i chinoni.

A questo fatto però l'A, fa seguire le parole che riportiamo integralmente:

« L'aver trovato pirrolo nella massa fusa non permette di trarre la « conclusione che la melanina contenga un complesso atomico della serie etero- « ciclica, p. es. acido pirrolidincarbonico, perchè il pirrolo viene fornito anche « dall'acido succinico, cioè da un composto della serie alifatica, per mezzo « di una cosiddetta reazione pirogenica (si deve essere molto cauti nel rica- « vare conseguenze dalle reazioni pirogeniche); piuttosto si può dedurre che « nella melanina è contenuto il complesso atomico dell'acido amminosucci- « nico. Io non vorrei essere frainteso; non è escluso che il pirrolo possa « provenire da acido α-pirrolidincarbonico preformato nella melanina, ma ciò « non è dimostrato ».

Questo curioso modo di ragionare è senza dubbio dovuto al fatto che l'A. considera in blocco come « pirogeniche » tutte le reazioni effettuate per mezzo del calore e fa quindi una confusione poco opportuna perchè non pensa che reattivi differenti aggiunti ad una stessa sostanza possono condurre a prodotti finali di natura completamente diversa.

Secondo quanto egli asserisce dall'acido succinico, per reazione pirogenica, si può avere pirrolo; ma in realtà quando egli vuole prepararsi una piccola quantità di pirrolo necessaria per le sue esperienze di confronto l'A. riscalda succinato ammonico con polvere di zinco; era ben prevedibile, ed anzi era già noto, che in questo modo doveva formarsi pirrolo.

Bisogna tenere ben presente che nel riscaldamento con polvere di zinco si compiono in prevalenza *processi di riduzione*; nelle fusioni con potassa invece, come è il caso del trattamento da lui fatto alla melanina, avvengono invece, come tutti sanno, *processi di ossidazione e di idrolisi* e quindi di demolizione delle molecole; quando invece si sottopongono a riscaldamento da sole sostanze che non volatilizzano senza alterarsi, possono compiersi i più svariati processi di sintesi e di demolizione ad un tempo.

Sarebbe ozioso il riferire qui esempî che tutti conoscono o che per il caso particolare poco interessano, e quindi ci limiteremo ad accennare ad alcuni casi presi in considerazione da un altro cultore della chimica biologica, Neuberg [1], allo scopo principalmente di mettere in guardia contro la

[1] Beiträge zur wissenschaf. Medizin und Chemie. Festschrift für E Salkowski. Berlin, 1904; cfr. anche K. Spiro, Zeit. für analyt. Chemie, *44* (1905), pag. 134.

colorazione rossa che può assumere un fuscello di abete bagnato con acido cloridrico, colorazione che, come è noto, viene data come caratteristica per i derivati del pirrolo e dell' indolo.

Il Neuberg trova p. es. che, oltre ai pirroli ed indoli, forniscono positiva questa reazione gli amminoacidi ed anche la taurina stessa quando vengano riscaldati da soli e meglio ancora in presenza di polvere di zinco ed ammoniaca; operando in questo ultimo modo la reazione viene presentata anche dagli acidi tartrico, levulinico, citraconico, dalla glucosammina ecc., vale a dire da tutta una serie di sostanze che non hanno nulla a che fare con i pirroli, e perciò egli pure consiglia di stare guardinghi sopra i risultati di questa reazione.

Per questo motivo abbiamo giudicato opportuno di eseguire noi pure alcune esperienze in proposito ed abbiamo osservato quanto segue.

La *glicocolla*, *leucina* e *tirosina* riscaldate da sole in tubo da saggio si decompongono trasformandosi in masse brune infusibili le quali soltanto, per ulteriore azione del calore, sviluppano vapori che arrossano la scheggia di abete; le stesse sostanze invece, fuse con potassa, come fa Salkowski per la sua melanina, dànno reazione completamente negativa.

Le sostanze che volatilizzano inalterate, come il *pirrolidone* e la *succinimmide* forniscono reazione negativa tanto da sole quanto fuse con potassa; la reazione riesce positiva solamente se i composti si riscaldano con polvere di zinco.

Come era ben prevedibile dunque, la reazione riesce positiva oppure negativa a seconda del modo con cui vengono effettuate queste reazioni che sono tutte « pirogeniche ».

Le sostanze proteiche che come è stato dimostrato contengono sicuramente residui dell'acido α-pirrolidincarbonico [1], assieme ad altri residui che ancora non tutti sono stati identificati, quali la *caseina* (noi abbiamo impiegato un preparato secondo Hammarsten, proveniente da Kahlbaum), e la *gelatina* forniscono entrambe positiva ed intensa la reazione tanto da sole quanto fuse con potassa [2].

Trovammo ancora che l'*ippomelanina*, il *nero di sepia*, il *nero di coroide* ed i *neri di pirrolo* dànno del pari reazione intensissima sia riscaldati da soli sia anche per fusione con potassa.

[1] Anche l'acido α-pirrolidincarbonico (prolina) e l'ossiprolina (e perciò anche l'acido α-carbopirrolico) si possono considerare come amminoacidi analoghi agli ordinarî peptidi, sebbene in questo caso il residuo ammidato concorra alla formazione di un anello chiuso: è quindi da aspettarsi che più molecole di queste sostanze possano congiungersi fra di loro per dare prodotti analoghi ai polipeptidi; ciò si verifica forse, almeno in parte, nella caseina, gelatina ecc.

[2] Come è noto, nella caseina sono contenuti anche residui indolici (triptofano) che finora non vennero riscontrati nella gelatina; la gelatina invece, per riscaldamento, fornisce notevoli quantità dell'anidride dell'acido α-carbopirrolico (pirocolla).

Si vede che questi risultati non sono in buon accordo con quanto riferiscono i due citati autori e veramente non si comprende come Salkowski asserisca che dalla formazione di pirrolo, da lui osservata, per fusione con potassa della melanina, si possa tutto al più dedurre che nella molecola di questa sostanza sia contenuto il complesso atomico dell'acido amminosuccinico; come mai il Salkowski concilia questa sua supposizione col fatto da noi prima riferito che l'α-pirrolidone, per fusione con potassa, non fornisce pirrolo?

Il Salkowski ha pure sottoposto la sua melanina all'ossidazione con permanganato; a tale scopo egli tratta la sostanza con eccesso di soluzione di permanganato bollente, in presenza di alcali ed alla fine elimina l'ossidante inalterato per mezzo dell'alcool. Trova che la melanina a questo modo viene completamente distrutta.

Che sottoponendo ad un processo di ossidazione così energico un composto che senza dubbio contiene numerosi doppî legami come una melanina, avvenga una profonda demolizione della molecola, era facilmente prevedibile; ma noi siamo pervenuti a risultati alquanto diversi effettuando l'ossidazione a freddo e con quantità limitate di permanganato.

Ippomelanina oppure nero di sepia vennero trattate a freddo con soluzione di permanganato al 2 %, in presenza di qualche goccia di potassa; in principio il reattivo viene prontamente ridotto e si interrompe l'aggiunta dell'ossidante quando il colore violetto persiste qualche minuto; abbiamo osservato che ogni grammo di melanina richiede intorno a 100 c.c. di soluzione di permanganato. Si separa il biossido di manganese e passa un liquido limpido, giallognolo che viene evaporato a b. m. Rimane un residuo cristallino che contiene molto ossalato di potassio; riscaldandone una piccola quantità in tubo da saggio sviluppa vapori che colorano in rosso intensissimo la scheggia di legno bagnata con acido cloridrico; inoltre trattato con soluzione diluitissima di un sale di diazonio, o meglio ancora con una traccia di fenilazossicarbonammide $C_6H_5 . NO : N . CO . NH_2$, si ottiene un liquido intensamente colorato in rosso aranciato, precisamente come noi abbiamo osservato nel caso degli acidi pirrolcarbonici.

Acidificando con cautela la soluzione del sale primitivo con acido solforico diluito ed estraendo il liquido, lievemente colorato in roseo, con etere, assieme ad acido ossalico si ottiene un prodotto quasi incoloro che intorno a 200° fonde in modo non netto con sviluppo gassoso e manda vapori che arrossano del pari fortemente la scheggia di abete.

La scarsa quantità di melanine che avevamo a nostra disposizione ed i bassi rendimenti in prodotto di ossidazione non ci hanno ancora permesso di sottoporlo a più minuto esame, ma le reazioni descritte rendono sommamente probabile che si tratti di qualche acido della serie del pirrolo ovvero dell' indolo. Come ognuno comprende, anche in questo caso sarebbe invero-

simile ammettere che le reazioni dei pirroli siano dovute alla presenza di derivati ammidati dell'acido succinico ed analoghi contenuti nella molecola della melanina di partenza.

Aggiungeremo inoltre che ippomelanina e nero di sepia vengono ossidate facilmente a caldo anche da acqua ossigenata al 30% (Peridrol Merck) diluita con acido acetico. Rimane indisciolto un piccolo residuo, e la soluzione giallognola evaporata lascia uno sciroppo che, per riscaldamento, sia da solo sia in presenza di potassa, fornisce del pari la reazione al fuscello di abete in modo intenso.

Il Salkowski ha trovato infine che bollendo la melanina con acido nitrico ed evaporando successivamente l'acido rimane un residuo giallo scuro che con potassa si colora fortemente in rosso bruno. Secondo l'A. questo comportamento più che alla presenza di residui fenolici nella melanina si potrebbe attribuire al triptofano, che fornisce del pari la medesima reazione. A questo proposito noi abbiamo osservato che anche i neri di pirrolo si comportano in modo analogo; ma in questo caso difficilmente si può attribuire la reazione al triptofano. Essa sarà dovuta a derivati del pirrolo o tutto al più, data la proprietà che ha il pirrolo, almeno in casi particolari, di trasformarsi in indolo, potrebbe spettare a quest'ultima sostanza ovvero ad un prodotto affine.

Senza tenere conto delle impurezze che possono essere trattenute fisicamente dalle melanine, dato il loro stato colloidale, è molto verosimile, come ancora molti anni or sono avevano supposto Nencki e Berdez, che in queste sostanze, oltre ai gruppi cromogeni caratteristici, sieno contenuti anche residui organici ciclici ed alifatici (e talora anche zolfo e ferro che possono però venire eliminati senza alterare sensibilmente il loro colore) ed è da aspettarsi che tali residui possano variare a seconda del tessuto da cui le stesse melanine provengono.

Il fatto però trovato da Salkowski che le melanine per fusione con potassa forniscono pirrolo, le analogie che si riscontrano fra melanine e neri di pirrolo, la proprietà che ha il pirrolo di fornire prodotti colorati in nero ed in bruno non solo per mezzo degli ordinarî ossidanti, ma anche per mezzo delle ossidasi tanto in vitro quanto nei tessuti viventi [1], il fatto posto in rilievo da Saccardi [2] che le iniezioni di pirrolo determinano negli animali una melanuria i cui caratteri sono simili a quella che Eppinger ha studiata in ammalati da melanosarcoma, ovvero in seguito ad iniezione di melanina da tumore melanotico, a nostro avviso, rendono sempre più probabile che il colore di tutti questi prodotti sia in gran parte dovuto ad una stessa sostanza fondamentale: il pirrolo.

(1) P. Rondoni, Lo Sperimentale, annata *74* (1920), fascicolo IV-VI, pag. 155.
(2) P. Saccardi, Gazzetta chimica, *50*, parte II (1920), pag. 118.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sui moti limiti di un sistema semirigido ruotante attorno ad un punto fisso e sottratto all'azione di forze esterne.* Nota di O. LAZZARINO, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

In una Nota precedente [2], alla quale mi riferisco per la parte bibliografica, ho esteso al caso generale di un solido avente un numero qualunque di cavità riempite da liquidi viscosi *compressibili* e ruotante attorno ad un punto fisso una notevole formola di Joukowski che dà la variazione nell'unità di tempo dell'energia cinetica del sistema.

Indicando con T questa energia, con P' e P'_r rispettivamente i vettori della velocità assoluta e relativa di un qualunque punto P delle masse fluide e con μ i coefficienti di viscosità dei liquidi, ho dimostrato che sussiste la formola

$$\text{(I)} \qquad \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_1^h \int_\sigma a \times P'_r \cdot d\sigma - \sum_1^h \int_\tau \mu I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) d\tau$$

dove gl'integrali s'intendono estesi rispettivamente alle superficie σ e agli spazi τ delle h cavità del sistema, e con a è designato il vettore della forza di attrito fra solido e liquidi.

Ora, supponendo che col variare del tempo i termini del 2° membro della (I) si annullino, si ha un particolare moto del sistema che può chiamarsi « *moto limite* » il cui studio, per via intrinseca, è oggetto della presente Nota.

1. MOTO LIMITE E SUE PRINCIPALI PROPRIETÀ. — Osservando che il coefficiente μ di viscosità è un numero positivo e che per i liquidi viscosi il vettore a della forza di attrito non è nullo nè perpendicolare al vettore P'_r, dalla (I) risulta chiaro che per l'annullarsi del 2° membro è necessario e basta che siano soddisfatte le condizioni

$$\text{(1)} \qquad P'_r = 0 \quad , \quad I_1\left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) = 0 .$$

Ora, per formole note [3], la seconda delle (1) può anche scriversi

$$I_1\left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K \frac{dP'}{dP}\right) = I_1 \frac{dP'}{dP} \cdot I_1 \frac{dP'_r}{dP} + I_2 \frac{dP'}{dP} + I_2 \frac{dP'_r}{dP} - I_2\left(\frac{dP'}{dP} + \frac{dP'_r}{dP}\right)$$

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] O. Lazzarino, *Sulla variazione dell'energia cinetica di un sistema semirigido ruotante attorno ad un punto fisso quando sia nullo il momento rispetto a questo punto delle forze esterne* [questi Rendiconti, ser. 5ª, vol. XXX, 1° sem., fasc. 4°, pag. 113].

[3] C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* (a. 1912, tom. I, pag. 34 [7] e pag. 44 [2]). Questo testo sarà indicato in seguito con la sigla AVG.

e da qui si vede che la 2ª delle (1) è conseguenza della 1ª, onde si può dire che il moto limite del sistema è caratterizzato dalla sola condizione $P'_r = 0$ la quale importa come soluzione unica

$$P' = \Omega \wedge (P - O) \tag{2}$$

cioè « *il moto limite del sistema è caratterizzato dal fatto che le masse fluide si comportano come se formassero un tutto rigido con la parte solida* ».

Si possono dimostrare alcune notevoli proprietà di questo moto.

Sostituendo l'espressione (2) di P' nella (VI') della Nota precedente [loc. cit. (1)], si ha

$$[\Omega \wedge (P - O)]' = \mathrm{grad}_P (\Pi - U) + \\ + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} \mathrm{grad\, div} [\Omega \wedge (P - O)] + \nu \Delta' [\Omega \wedge (P - O)]. \tag{3}$$

Ora, il 1° membro della (3) porge

$$[\Omega \wedge (P - O)]' = \Omega' \wedge (P - O) + \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 \cdot (P - O);$$

quanto al 2° membro si osserva che i due ultimi termini sono nulli: infatti, essendo $\mathrm{rot}_P (P - O) = 0$, $\Delta' (P - O) = 0$ ed Ω indipendente da P, per formole note si ha

$$\mathrm{grad\, div} [\Omega \wedge (P - O)] = \mathrm{grad} [\mathrm{rot}_P \Omega \times (P - O) - \mathrm{rot}_P (P - O) \times \Omega] = 0$$

$$\Delta' [\Omega \wedge (P - O)] = \\ = \Omega \wedge \Delta' (P - O) - (P - O) \wedge \Delta' \Omega + 4 \mathrm{V} \left(\frac{d(P - O)}{dP} \cdot \mathrm{K} \frac{d\Omega}{dP} \right) = 0 .$$

Quindi la (3) può scriversi

$$\Omega' \wedge (P - O) + \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 (P - O) = \mathrm{grad}_P (\Pi - U). \tag{4}$$

Osservando ora che il 2° membro della (4) è funzione dei punti P ma non del tempo, si ha $\Omega' = 0$ e quindi, se Ω_0 è un vettore *costante*, può scriversi

$$\Omega = \Omega_0 \tag{5}$$

e perciò si conclude che « *nelle ipotesi fatte, il moto limite del sistema è una rotazione uniforme attorno ad un asse fisso nello spazio* ».

Inoltre, poichè per $P'_r = 0$ risulta $M'_r = 0$, dalla (I) della Nota citata e dalla (5) si ha

$$\Omega_0 \wedge (\alpha \Omega_0 + M) = 0 \tag{6}$$

e, ponendo $\alpha \Omega_0 + M = \alpha_1 \Omega_0$, dove α_1 è l'omografia d'inerzia rispetto al punto fisso O di tutto il sistema, si può anche scrivere

$$\Omega_0 \wedge \alpha_1 \Omega_0 = 0 \tag{7}$$

cioè « *nel moto limite, l'asse costante di rotazione* $O\Omega_0$ *risulta parallelo ad una delle direzioni unite dell'omografia d'inerzia, relativa al punto fisso, del sistema totale costituito dalla parte rigida e dalla parte fluida considerata come formante un sistema rigido* ».

2. Casi possibili di moti limiti. — Supponendo che l'omografia α_1 d'inerzia sia arbitraria, si possono presentare diversi casi nei quali la (7) può essere soddisfatta.

a) Se α_1 è tale che l'ellissoide d'inerzia, di centro O, relativo al sistema totale risulti un ellissoide a *tre assi diseguali*, per soddisfare alla (7) è necessario che l'asse costante $O\Omega_0$ di rotazione coincida con uno degli assi principali del detto ellissoide. Perciò si conclude che « *il moto limite del sistema sarà, in questo caso, una rotazione permanente attorno ad uno dei tre assi principali dell'ellissoide d'inerzia di tutto il sistema rispetto al punto fisso* ».

b) Se poi α_1 è tale che l'ellissoide d'inerzia risulti di rivoluzione attorno ad un asse, allora « *nel moto limite, l'asse permanente di rotazione del sistema può coincidere col detto asse o con una qualunque delle rette del fascio di centro* O *avente per sostegno il piano principale di inerzia normale all'asse di rivoluzione dell'ellissoide* ».

c) Se, infine, α_1 è un numero, l'ellissoide d'inerzia si riduce ad una sfera di centro O e allora « *nel moto limite, l'asse permanente di rotazione può coincidere con uno qualunque dei raggi della stella di centro* O ».

In tutti questi casi la grandezza della velocità di rotazione è arbitraria ma costante e l'asse di rotazione si mantiene fisso per tutta la durata del moto. Tenendo conto della natura del sistema qui considerato, risulta evidente che i detti moti comprendono come casi particolari i noti moti di Dirichlet relativi ad un solido avente una sola cavità di forma ellissoidale o sferica riempita da liquido perfetto.

3. Condizioni per la permanenza dei moti delle masse fluide viscose. — Supposti permanenti i moti delle masse fluide, si ha *mod* $P' = cost$ in tutti i punti P dello spazio da esse occupato e risulta quindi $P'' = 0$. Allora dalla (IV) della Nota citata si ricava, per un punto qualunque P del contorno, $\Omega' \wedge (P - O) \times \mathbf{n} = 0$ e da qui segue $\Omega' = 0$, $\Omega = \text{cost}$, cioè « *la rotazione del sistema deve essere permanente* ». Allora l'energia cinetica risulta costante e dalla (I) si ha la relazione

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{h}\int_{\sigma} a \times P'_r \cdot d\sigma + \sum_{1}^{h}\int_{\tau} \mu\, I_1 \left(\frac{dP'_r}{dP} \cdot K\,\frac{dP'}{dP}\right) d\tau = 0$$

che, come si è dimostrato precedentemente, ammette come *soluzione unica*

$$P' = \Omega \wedge (P - O). \tag{8}$$

Ripetendo il ragionamento in senso inverso, si vede facilmente che la (8),

oltre ad essere *necessaria*, è anche *sufficiente* per la permanenza dei moti delle masse fluide. Si può quindi concludere che « *il solo caso possibile di moti permanenti delle masse fluide viscose è caratterizzato dalla* (8) *e corrisponde al fatto fisico che, per effetto della viscosità, il fluido debba aderire così perfettamente alle pareti della rispettiva cavità che risulti* $P'_r = 0$. *Allora il sistema ruota con moto uniforme attorno ad un asse fisso come se fosse completamente rigido* ».

Tenendo anche presente quanto è stato dimostrato nel § 1, si può ancora dire che « *l'unico caso possibile di moti permanenti delle masse fluide è un moto limite del sistema* ».

Idrodinamica. — *Circuitazione superficiale.* III: *Il teorema della forza sostentatrice nel caso di una corrente fluida spaziale.* Nota di Mario Pascal, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo [1].

Il teorema di Joukowski o della *forza sostentatrice* dà, come è noto [2], l'espressione di una delle componenti della resistenza totale incontrata da un contorno di ostacolo opposto ad una corrente fluida piana parallela, mediante il prodotto della densità del fluido, della velocità limite della corrente e della circuitazione delle velocità lungo una linea chiusa circondante l'ostacolo, circuitazione che, nel caso che le velocità dipendano da un potenziale, è uguale a quella calcolata lungo il contorno stesso dell'ostacolo.

Con la scorta del nuovo concetto di *circuitazione superficiale* che abbiamo introdotto e dei risultati che abbiamo raggiunto nelle Note precedenti [3], ci è possibile ora dimostrare il seguente teorema che può considerarsi come l'estensione del teorema di Joukowski al caso di una corrente fluida spaziale.

Se una corrente fluida spaziale di velocità limite V_0, *diretta nel senso negativo dell'asse* x, *investe un ostacolo, la risultante delle pressioni del fluido sulla superficie dell'ostacolo giace nel piano* yz. *Il valore delle sue componenti secondo gli assi* y *e* z *è rispettivamente uguale al prodotto della densità del fluido e della velocità limite della corrente per le componenti secondo gli assi suddetti del vettore della circuitazione superficiale, calcolata lungo la superficie dell'ostacolo.*

[1] Presentata nella seduta del 5 dicembre 1920.

[2] N. Joukowski, *Aérodynamique* [trad. par S. Drzewiecki], Paris, Gauthier Villars, 1916; H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1916, pag. 666. Ved. inoltre: P. Burgatti, *Sopra un teorema di Joukowski relativo alla forza sostentatrice nei corpi in moto traslatorio uniforme entro un fluido*. Rend. R. Acc. di Bologna, 1917-18.

[3] M. Pascal, *Circuitazione superficiale*. I: *Estensione dell'ordinario concetto di circuitazione*. Questi Rendiconti, vol. XXIX, 1920, 2° sem., pag. 353; II: *Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione* Questi Rendiconti, vol. XXX, 1921, 1° sem., pag. 117.

Dimostreremo tale teorema basandoci — come fa il Joukowski — sul teorema di Eulero, esprimendo cioè che tutte le forze che agiscono sopra una massa fluida in movimento sono equilibrate dalle forze dovute alle quantità di moto.

Sia H un corpo che formi ostacolo ad una corrente non vorticosa, di velocità limite V_0, diretta nel senso negativo dell'asse x; il potenziale di velocità sia

$$\varphi = - V_0 x + f(x, y, z)$$

in cui f è una funzione tale che le sue derivate sono nulle a distanza infinita.

Circondato l'ostacolo con una qualsiasi superficie chiusa, ad esempio una sfera σ, per il teorema di Eulero, applicato alla massa fluida compresa fra la superficie dell'ostacolo e quella della sfera σ, la somma delle pressioni $-X$, $-Y$, $-Z$ esercitate da H sul fluido; delle pressioni idrodinamiche p; e delle forze dovute alle quantità di moto, deve essere nulla.

Le componenti della velocità sono

$$u = - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \; ; \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} \; ; \quad w = \frac{\partial f}{\partial z} ,$$

e quindi, se α, β, γ sono gli angoli che la normale interna a σ forma con gli assi, e ϱ è la densità del fluido, la massa di fluido che nell'unità di tempo entra attraverso l'elemento $d\sigma$ è

$$\varrho \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma ;$$

una formola nota ci dà poi

$$p = \text{cost.} - \frac{\varrho}{2} \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \right\}^2 \right].$$

Si ha così

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \int_\sigma p \cos\alpha \, d\sigma + \\ &\quad + \varrho \int_\sigma \left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma \\ Y &= \int_\sigma p \cos\beta \, d\sigma + \\ &\quad + \varrho \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial y} \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma \\ Z &= \int_\sigma p \cos\gamma \, d\sigma + \\ &\quad + \varrho \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial z} \left[\left\{ - V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma . \end{aligned} \right.$$

Eseguendo le sostituzioni e gli sviluppi indicati, e trascurando i termini cha risultano essere infinitesimi di ordine superiore, oppure del tipo $\{ \text{cost.} \cos\alpha \, d\sigma \}$, si ottiene facilmente

$$X = \varrho V_0 \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha \, d\sigma - \varrho V_0 \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha \, d\sigma -$$
$$- \varrho V_0 \int_\sigma \left[\left\{ -V_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \right\} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma \right] d\sigma = 0$$

poichè l'ultimo integrale, non essendo altro che la quantità totale di fluido entrato nella sfera σ, è nullo.

Le altre due componenti diventano invece

$$(2) \quad \begin{cases} Y = \varrho V_0 \int_\sigma \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \cos\beta - \frac{\partial f}{\partial y} \cos\alpha \right\} d\sigma \\ Z = - \varrho V_0 \int_\sigma \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} \cos\alpha - \frac{\partial f}{\partial x} \cos\gamma \right\} d\sigma . \end{cases}$$

Gli integrali che figurano nelle precedenti espressioni sono rispettivamente le componenti secondo gli assi z e y del vettore della circuitazione superficiale dovuta alla parte di velocità che dipende dalla funzione f, e calcolata lungo la superficie σ.

Ma siccome il moto è stato supposto a potenziale, per un teorema dimostrato nella Nota precedente, e chiamando con I^{xy}, I^{zx} le componenti secondo z e y della circuitazione superficiale calcolata lungo la superficie dell'ostacolo H, le (2) possono scriversi:

$$(3) \quad \begin{cases} Y = \varrho V_0 I^{xy} \\ Z = - \varrho V_0 I^{zx} . \end{cases}$$

La risultante di queste due forze giace evidentemente nel piano yz, e potrebbe anche essere facilmente costruita. Tale risultante è quella che, nel caso che ci occupa, può assumere il nome di *forza sostentatrice.*

Matematica. — *Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che son luoghi di almeno ∞^2 rette.* Nota I di Eugenio G. Togliatti, presentata dal Socio C. Segre (*).

1. La dimensione dello spazio normale d'una V_3^4 irriducibile è ≤ 6 (1); ed è noto che una V_3^4 di S_6, che non sia un cono proiettante da un punto una superficie di Veronese, contiene una serie razionale ∞^1 di piani (2); escluso che V_3^4 sia un cono, quegli ∞^1 piani uniscono terne di punti omologhi di due rette a, b e d'una conica c, riferite proiettivamente (3).

Tale V_3^4 contiene ∞^3 rette Viceversa, se per un punto generico P di una V_3^4 irriducibile, che non sia un cono, passano infinite rette della V_3^4 (4), questa contiene ∞^1 piani (5), costituenti una serie razionale (perchè un iperpiano generico contenente uno di essi sega ancora V_3^4 in una F^3 rigata non cono), dimodochè la V_3^4 coincide con la precedente o con una sua proiezione (3).

La proiezione W_3^4 della V_3^4 di S_6 anzidetta da una retta generica r dell'S_6 sopra un S_4, σ, ha come superficie doppia una rigata cubica normale F (6): infatti, un S_4 proiettante generico sega V_3^4 in una C^4 razionale normale che ha tre corde incidenti ad r. Si vede poi subito che l'S_5 proiettante $r\,a\,b$ contiene due piani μ, ν di V_3^4, e perciò contiene un S_3 proiettante (intersezione degli S_4: $r\mu$, $r\nu$) che sega μ, ν in due rette m, n, e la cui traccia d su σ è quindi una retta doppia di W_3^4, anzi proprio la direttrice rettilinea di F, perchè le ∞^1 coniche di V_3^4 passanti per le sin-

(*) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(1) V. ad es. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa (1907), Cap. 9°, n. 6.

(2) V. ad es. Bertini, loc. cit., Cap. 14°, n. 10.

(3) Segre, *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, Atti Acc. Torino, 21 (1885-1886), pp. 95-115. Questa stessa V_3^4 trovasi in: G. C. Young, *Sulla varietà razionale normale* M_3^4 *di* S_6 *rappresentante della trigonometria sferica*, id., 34 (1898-1899), pp. 587-596.

(4) Anzi ∞^1, se no la V_3^4 conterrebbe l'S_3 che la tocca in P.

(5) Severi, *Intorno ai punti doppî improprî di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni, e a' suoi punti tripli apparenti*, Rendiconti Palermo, 15 (1901), pp. 33-51, n. 10.

(6) Aprile, *Sulla varietà, dell'* S_4*, del quarto ordine, con rigata cubica normale doppia*, Atti Acc. Gioenia, (5) 7, (1914), Mem. XXII, pp. 1-21.

gole coppie di punti di m, n situate su rette incidenti ad r (7) stanno in piani anche incidenti ad r, e si proiettano su σ in altrettante rette doppie di W_3^4 incidenti a d.

Tra le proiezioni particolari della V_3^4 di S_6, che non discutiamo minutamente, rileviamo solo la V_3^4 di S_4 con piano triplo, che si ha quando r sta nell'S_4 d'una rigata cubica della V_3^4 di S_6, rigata che può anche spezzarsi in un piano della V_3^4 e nella quadrica direttrice minima (8).

Le V_3^4 qui considerate sono le sole V_3^4 irriducibili, non coni, a curve-sezioni razionali (9).

2. Consideriamo ora in S_5 una V_3^4 rigata, irriducibile, normale, non cono; essa avrà curve-sezioni ellittiche, perciò sarà la base d'un fascio di quadriche di S_5 (10). Anche questa è notissima (11); la sua proiezione in S_4 da un punto generico O ha una quadrica doppia, traccia del cono quadrico intersezione della quadrica del fascio che passa per O col suo S_4 tangente in O (12). Viceversa, ogni V_3^4 irriducibile di S_4, non cono, a curve-sezioni ellittiche, è proiezione della precedente (13).

3. Fermiamoci sulle V_3^4 irriducibili, rigate, non coni, normali in S_4. Gli ∞^1 S_3 tangenti ad una tale V_3^4 nei punti d'una generatrice generica g inviluppano, di regola, un cono quadrico di 2ª specie avente g come retta doppia, ma possono formare fascio intorno ad un piano contenente g e che

(7) Rappresentando V_3^4 su un S_3 col sistema lineare ∞^6 di tutte le quadriche contenenti una stessa retta [Segre, loc. cit., nota (3)], le rette dell'S_3 rappresentano coniche di V_3^4.

(8) Quest'ultimo caso è noto: v. Fano, *Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni proiettive in sè*, Atti Ist. Veneto, (7) 7 (1895-1896), pp. 1069-1103, n. 4.

(9) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche*, Math. Ann., 46 (1895), pp. 179-199, n. 9 (ed anche la nota dello stesso A.: *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve iperellittiche*, questi Rend., (5) 2 (1893_2), pp. 281-287, nota (3) a p. 282).

(10) Enriques, *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche*, questi Rend., (5) 3 (1894_1), pp. 481-487, § 3 (vedi anche, nei Math. Ann., il n. 13 della Nota dello stesso A. citata nella nota prec.).

(11) Segre, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Mem. Acc. Torino, (2) 36 (1885), pp. 3-86, parte II.

(12) Casi speciali della V_3^4 di S_4 con F^2 doppia si trovano in: Snyder, *On cyclical Quartic Surfaces in Space of N dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc., (2) 6 (1899-1900), pp. 194-198; Aprile, *Di alcune congruenze, d'ordine due, di superficie nell'* S_4 *e di coniche nell'* S_3, Mem. Acc. Acireale, (3) 10 (1918-1919), § 2. Altri casi speciali notevoli sono: la V_3^4 luogo delle rette incidenti a due coniche generiche di S_4, la V_3^4 luogo delle rette che uniscono punti omologhi di due piani generici di S_4 riferiti in corrispondenza quadratica.

(13) Enriques, loc. cit. nella nota (10), § 1.

risulta tangente a V_3^4 lungo g, oppure possono coincidere tutti in uno stesso S_3 tangente a V_3^4 lungo g [14]. Siano: α un piano generico contenente g, γ la cubica piana intersezione ulteriore di α con V_3^4, ed A, B, C i punti comuni a g e γ. Nel 1° caso, due di questi punti, ad es. A, B, son punti di contatto di α con V_3^4, e C è punto doppio di V_3^4; il luogo di C, non potendo essere una linea direttrice di V_3^4 [14], sarà un piano π, doppio per V_3^4, unisecante le generatrici di V_3^4 (nn. 1 e 2).

Viceversa, una V_3^4 di S_4 con piano doppio π [15] è rigata, perchè luogo di ∞^1 quadriche a due dimensioni situate negli S_3 passanti per π, e non ammette, in generale, degli spazî tangenti fissi lungo ogni generatrice.

4. Se invece V_3^4 ammette lungo g un piano tangente fisso, uno solo dei punti A, B, C, ad es. A, è punto di contatto di α con V_3^4, mentre B, C sono multipli per V_3^4.

a) Se B, C sono distinti, e perciò doppî per V_3^4, essi non possono descrivere entrambi una superficie, doppia per V_3^4, perchè questa verrebbe di ordine > 1; nè possono descrivere due linee direttrici di V_3^4 (o un'unica direttrice bisecante le generatrici di V_3^4), se no V_3^4 avrebbe lungo g un S_3 tangente fisso [14]; perciò B, ad es., descrive un piano doppio π, e C descrive una linea doppia irriducibile L, unisecante le generatrici di V_3^4, la quale sarà quindi un caso speciale di quella del n. 3. Un S_3 generico contenente π sega ancora V_3^4 in una quadrica irriducibile che ha su ogni generatrice un punto doppio di V_3^4 non situato su π, e che perciò è un cono col vertice su L. Cioè L è luogo dei vertici di detti coni, ed è incontrata in un sol punto variabile dagli S_3 contenenti π; perciò L non può essere di ordine ≥ 5, se no un S_3 generico taglierebbe V_3^4 in una F^4 avente una retta doppia e, fuori di questa, almeno 5 punti doppî, tra i quali almeno due dovrebbero stare su una retta incidente a π [16], e quindi anche in un S_3, certo variabile, contenente π. Se poi L sta in un piano, segante π in un punto solo, essa è di ordine ≤ 3, perchè una retta generica del suo piano, essendo sghemba con π, sarebbe doppia per V_3^4 se ne contenesse più di tre punti doppî. Dunque L può essere: una retta sghemba con π; una conica incidente a π; una C^3 piana con un punto doppio su π; una C^3 sghemba con due punti (distinti o no) su π; una C^4 di 2ª specie, di un S_3, con tre punti allineati (distinti o no) su π; una C^4 razionale normale con tre punti (distinti o no) su π.

[14] Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazî*, Rend. Palermo, 30 (1910_2), pp. 87-121, nn. 9, 12 e § 5, 6.

[15] Marletta, *Sulle varietà del quarto ordine con piano doppio dello spazio a quattro dimensioni*, Giorn. di Matem., 40 (1902), pp. 265-274, 41 (1903), pp. 47-61 e 113-128.

[16] Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes*, II Theil, 3 Aufl., 1880, n. 337 a p. 445. V. anche Marletta, loc. cit. nella nota [15], n. 54; in quest'ultimo lavoro (nn. 51, 52, 53) si trovano gran parte delle V_3^4 qui determinate.

Scegliendo convenientemente in S_4 un sistema di coordinate proiettive omogenee $x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, è ovvio scrivere l'equazione di V_3^4 nei primi tre casi. Nel 4° e nel 6° caso, nelle ipotesi più generali, l'equazione di V_3^4 si ha uguagliando a zero una forma quadratica generica delle forme: $x_2 x_3$, $x_2 x_4$, $x_3^2 - x_0 x_4$, $x_4^2 - x_1 x_3$, o rispett. delle forme: $x_3\, \alpha_1^{(i)}(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + x_4\, \beta_1^{(i)}(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ per $i = 0, 1, 2$ ([17]). Nel 5° caso l'equazione di V_3^4 si può scrivere:

$$x_2^2 \varphi_2(x_3\, x_4) + x_2\, \psi_1(x_3\, x_4)\, f + x_2\, g + f^2 = 0,$$

con:

$$f \equiv x_3\, \alpha_1(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4) + x_4\, \beta_1(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4);$$

$$g \equiv x_3^2 \mu(x_0 \ldots) + x_3\, x_4\, \nu(x_0 \ldots) + x_4^2 \pi(x_0 \ldots).$$

b) In secondo luogo, se i punti B, C coincidono in un punto doppio per γ e triplo per V_3^4, essi descrivono una linea tripla irriducibile di V_3^4, L, unisecante le generatrici, e che può esser solo una retta, od una conica: $x_3 = x_4 = \varphi_2(x_0\, x_1\, x_2) = 0$ ([18]). Nel 2° caso l'equazione di V_3^4 si può scrivere:

$$\varphi_2(x_0\, x_1\, x_2)\, \psi_2(x_3\, x_4) + \sum_{i=0}^{3} \alpha_1^{(i)}(x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4)\, x_3^{3-i}\, x_4^i = 0,$$

e mostra che il piano della conica è doppio per V_3^4. Se la conica si spezza in due rette distinte, la V_3^4 è caso speciale di entrambe le precedenti e contiene due sistemi di rette; la conica tripla può anche ridursi ad una retta da contar due volte ([19]).

([17]) Indicheremo con $\alpha, \beta, \varphi, \psi, \ldots$ forme algebriche delle variabili indicate e dei gradi espressi dai loro indici. Non ci fermiamo sui casi speciali in cui V_3^4 acquista generatrici doppie o punti doppî isolati.

([18]) Perchè se L non fosse piana, il piano di tre suoi punti generici starebbe su V_3^4; e se L, di ordine ≥ 3, stesse in un piano π, un piano contenente una retta s di π segherebbe V_3^4 lungo s contata almeno 3 volte, cioè π sarebbe almeno triplo per V_3^4.

([19]) Un caso speciale in Fano, loc. cit. nella nota ([8]), n. 12.

Paleontologia. — *Patologia di alcuni mammiferi pliocenici e postpliocenici della Toscana.* Nota di LINA PIERAGNOLI, presentata dal Socio C. DE STEFANI [1].

Trattasi di alcune ossa plioceniche e post-plioceniche di varî animali, specialmente di *Equus* Limn. e di varia località, in massima parte del Valdarno superiore: appartengono tutte al Museo di Firenze: presentano varie lesioni, ma, eccettuato forse in un osso di *Cervus*, non trovo tubercolosi in nessuna di queste ossa, mentre la ritrovai frequentissima ed estesissima nell'*Ursus spelaeus* Blum. recente di Equi [2]. Trovo invece lesioni e deformazioni ossee che mancano nelle innumerevoli ossa fossili paleolitiche e neolitiche della Grotta di Equi. Da questa osservazione si potrebbe desumere che alcune malattie furono più particolarmente proprie di alcuni animali, come del resto anche oggi, e forse che hanno avuto maggior sviluppo in alcune epoche piuttosto che in altre, come già aveva ritenuto il Moodie.

***

1. *Equus Stenonis* Cocchi. — Articolazione tibio-metarsale sinistra. Pliocene lacustre di Olivola in Val di Magra.

Il metatarso presenta nella diafisi e nella epifisi superiore una esostosi grandissima, compenetrata interamente, come le due ossa (tibia metatarso), da carbonato di Ca. È un caso molto comune anche nel cavallo attuale. Trattasi di una osteo-artrite intertarsica ossificante o, com'è chiamata più comunemente, *artrite secca* del garetto del cavallo. La malattia ha principio da una osteite rarefacente semplice dell'*os tarsi*, in seguito alla quale si ha condensazione del tessuto osseo e degenerazione dello strato cartilagineo con osteite condensante e formazione di esostosi nel 3° tarsale e negli altri tarsali. Quando la malattia è assai avanzata, come in questo caso, le superfici articolari sono saldate per la formazione di granulazioni, che sorgono, come isolotti, nei punti opposti e corrispondenti alle erosioni, che crescendo si saldano le une alle altre. Gli osteofiti che si formano dal periostio, in parte per la tendenza delle osteiti centrali a spingersi verso la periferia, in parte perchè il periostio degli orli articolari viene coinvolto nel processo, possono essere di tutte le forme e di tutte le dimensioni. Considerai inutile

[1] Presentata nella seduta del 2 gennaio 1921.

[2] *Patologia dell'Ursus spelaeus della Grotta di Equi*, Pieragnoli, R. Acc. dei Lincei, estratto dal vol. XXIX, serie 5ª, fasc. 11, sem. 1°, seduta del 4 giugno 1920.

fare sezioni microscopiche dell'osso e sciuparlo, perchè completamente calcificato.

2. *Equus Stenonis* Cocchi. — Pliocene lacustre del Valdarno superiore.

Metacarpale il cui tessuto è in condizioni normali, benchè compenetrato quasi totalmente da carbonato di Ca e ossido di Fe. Nel centro della diafisi si presenta un rigonfiamento liscio, regolare, molto visibile che si estende anche verso le epifisi. Io credo debba trattarsi di un osteoma, che può avere origine traumatica e provenire dal callo: è un tumore osseo di struttura compatta (eburneo), circoscritto, forse proveniente dallo strato corticale dell'osso.

3. *Equus caballus* Limn. (*Equus Larteti* Cocchi). — Ramo mandibolare destro e sinfisi di un individuo vecchio. Nel canale maestro della Chiana presso Alberolo (prov. Arezzo): post-pliocene. Questo ramo mandibolare è stato oggetto di studio da parte del prof. Arnone (*Comparazioni antropologiche*, estratto dagli Annali di odontologia, 1° sett. 1917; e *Studio nei fossili sugli effetti della carie dei denti*, estratto dagli Annali di odontologia, anno V, n. 2, pag. 25, 1920).

La mandibola è mancante del 3° premolare e la cavità di questo dente è spugnosa e rareficata: inoltre in corrispondenza di questo dente mancante, al margine inferiore dell'osso, si vede un osteoma rotondo, peduncolato, e vicino il peduncolo più sottile di un altro perdutosi *post-mortem*. Il professore Arnone ritiene che il dente mancante fosse cariato, e siccome il processo di carie può passare al pericemento e da qui propagarsi al periostio alveolare ed osseo, ritiene anche che in questo caso esso si sia propagato lentamente attraverso il forame apicale della radice stessa al tavolato interno dell'osso, raggiungendo il margine inferiore del mascellare e determinando per la forte infiammazione le esostosi. Questa ipotesi egli avvalora col fatto di una linea di frattura derivante dalla fossilizzazione, a decorso irregolare, che dall'alveolo dove era il dente cariato va al punto dove si ha l'esostosi e che, essendo spezzata due volte, dimostrerebbe la differenza della rarefazione della parete esterna.

Esaminando quest'osso, ho notato subito che il tavolato esterno era perfettamente sano e che l'alveolo del dente non mostrava nessuna lesione dovuta a forte suppurazione e ad osteite: vi è solamente un poca di rarefazione, rarefazione che notasi anche nei margini degli alveoli dei molari e che con tutta probabilità è dovuta a vecchiaia; anormalità che ho avuto agio di notare anche in molti mascellari di *Ursus* vecchio della Grotta di Equi. Inoltre la frattura di cui parla il prof. Arnone nel suo lavoro, che è semplicemente dovuta alla compressione avvenuta durante la fossilizzazione, si dirama attraverso l'osteoma in altre due linee di frattura che si allungano per tutto il margine inferiore dell'osso e che sono più regolari della prima, perchè in quella direzione le trabercole sono parallele alla linea di frattura, mentre

nella parte anteriore sono perpendicolari. Come ben dice il prof. Arnone, senza esame microscopico dell'osteoma che mostri la disposizione delle trabecole ossee nei canali di Havers (cosa impossibile a farsi senza sciupare il fossile) o senza analizzare attentamente l'interno dell'osso, non potevasi sostenere l'ipotesi che si trattasse di un semplice osteoma; siccome però i pezzi dell'osso erano tenuti insieme da mastice, ho potuto dividerli gli uni dagli altri e mettere in evidenza anche la parte interna. Così mi sono assicurata che l'alveolo del dente mancante non presenta alcuna anormalità e che l'interno dell'osso è perfettamente sano, non mostrando alcuna modificazione dovuta a qualsiasi infiammazione: anche la superficie interna inferiore dell'osso che corrisponde all'osteoma è sana: trattasi dunque di un osteoma. Se l'esostosi fosse dipendente da un processo di carie (molto simile alla fistola dentaria), l'osteoma sarebbe meno regolare e la suppurazione che avrebbe dovuto essere abbondantissima per produrre una tale esostosi, avrebbe anche dovuto produrre delle lesioni ossee, che, se quasi invisibili all'esterno, dovevano essere visibilissime all'interno dell'osso.

4. *Cervus* sp. metatarsale sinistro. — Pliocene lacustre del Valdarno Sup. Collezione Strozzi.

La diafisi dell'osso è rigonfiata con modificazione evidente del tessuto, con fori dai quali doveva fuoruscire il pus. Se non è stata una infezione consecutiva a una ferita o ad una frattura, può trattarsi con molta probabilità di un caso di tubercolosi: si nota una corrosione lacunare a fori grossolani, delle caverne riempite ed orlate di osteofiti spugnosi e verrucosi, proprî della tubercolosi.

5. *Rhinoceros etruscus* Falc. — Tibia e perone sinistro, pliocene lacustre. Poggio di Monte al Pero presso Figline. Valdarno superiore.

Periostite consecutiva alla frattura del perone stesso. Dopo la frattura si è formato un processo d'infiammazione e forse di suppurazione, dopo il quale è sopraggiunta una osteite condensante, che ha legato il perone alla tibia. Il perone è risaldato, ma deforme.

6. *Bison priscus* Owen. — Cranio Post-pliocene, nelle sabbie del torrente Maspino presso Arezzo.

Porta sulla bozza frontale sinistra un grosso foro, con incrinature multiple e irregolari delle pareti, che limitano il foro stesso. La ferita è stata prodotta dalle zanne di un altro animale o piuttosto dalla cornata di un altro bisonte, ed ha portato l'infiammazione dell'osso poi risarcito in vita.

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXX. (1892-1921). Fasc. 7°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 7°-10°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 7.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile*

Pubblicazione bimensile. **N. 9.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXX.° — Fascicolo 9°

Seduta del 2 maggio 1921.

1° Semestre.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCAD. NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 maggio 1921.

V. Volterra, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Osservazioni varie.* Nota del Socio A. Angeli.

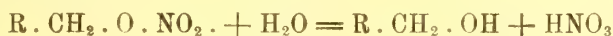
Nel corso delle mie ricerche ho avuto spesso occasione di osservare alcune reazioni e di notare certi fatti che forse non sono privi di interesse; e siccome per il momento non mi è possibile proseguire il loro studio così ho ritenuto opportuno accennare a qualcuno di essi in questa breve comunicazione.

Azione della piridina sopra gli eteri nitrici.

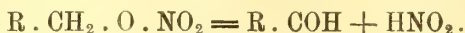
Due anni or sono ho descritta una trasformazione interessante che le nitrocellulose, già a freddo, subiscono per azione della piridina [1]; a caldo la reazione si compie in modo rapidissimo tanto che operando a bagno maria già dopo due ovvero tre minuti si avverte un forte sviluppo di ossidi dell'azoto,; lo stesso si verifica se invece di nitrocellulose si impiega nitroglicerina.

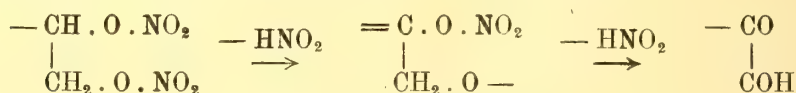
La reazione avviene invece in modo lentissimo con nitrato di etile e piridina, tanto che il loro miscuglio si può bollire per qualche tempo direttamente alla fiamma senza avvertire sviluppo di vapori nitrosi.

Come venne già esposto altrove [2] la reazione non ha l'aspetto di seguire l'eguaglianza:

$$R . CH_2 . O . NO_2 . + H_2O = R . CH_2 . OH + HNO_3$$

(1) Angeli, questi Rendiconti, *28* (1919), pag. 20.
(2) Angeli e Errani, Rivista di Artiglieria e Genio, IV (1919), pag. 5.

che corrisponderebbe alla saponificazione normale ed invece è molto più probabile che si tratti, almeno in gran parte, di una scissione della forma:

$$R . CH_2 . O . NO_2 = R . COH + HNO_2 .$$

Il fatto però che con le nitrocellulose e la nitroglicerina la reazione avviene in modo molto più rapido che col nitrato di etile, dimostra che i gruppi negativi uniti agli atomi di carbonio contigui accelerano in modo notevole il processo, tanto che gli atomi di idrogeno potrebbero forse provenire anche da quelli che sono legati ad altri atomi di carbonio; naturalmente in ogni caso si arriverebbe ai medesimi prodotti:

$$\begin{matrix} -CH . O . NO_2 \\ | \\ CH_2 . O . NO_2 \end{matrix} \xrightarrow{-HNO_2} \begin{matrix} =C . O . NO_2 \\ | \\ CH_2 . O - \end{matrix} \xrightarrow{-HNO_2} \begin{matrix} -CO \\ | \\ COH \end{matrix}$$

i quali a loro volta potranno subire ulteriori processi di idrolisi, di ossidazione e forse anche di condensazione.

Coagulazione di soluzioni di nitrocellulosa.

Si tratta di una osservazione che ho avuto occasione di fare a proposito di alcune esperienze eseguite con lo scopo di studiare i prodotti di ossidazione delle nitrocellulose.

Siccome si tratta di sostanze insolubili in acqua, così ho impiegato la soluzione in acetone del prodotto che ho trattato con soluzione pure acetonica di permanganato di potassio; è noto che quest'ultima è stata impiegata in altri casi e con buoni risultati, fra altri da R. Willstätter.

Quando in tal modo si ossida la nitrocellulosa si nota che il reattivo viene facilmente ridotto e si ottiene dapprima un liquido intensamente colorato in bruno; dopo poco tempo però il liquido perde la sua mobilità e finisce col rapprendersi completamente, come fanno le soluzioni di gelatina quando si raffreddano.

Aggiungendo altro acetone la massa non si scioglie; sminuzzando il coagulo con una bacchetta di vetro, i frammenti si mantengono separati dall'acetone aggiunto che rimane perfettamente incoloro; a bassa temperatura i coaguli si conservano per molte ore; il loro scomparire molto probabilmente è dovuto all'azione successiva dell'alcali, che si è formato, sopra la nitrocellulosa.

È moltro probabile che tale comportamento sia dovuto al fatto che l'idrato manganico colloidale formatosi in una prima fase determini la coagulazione dell'altro colloide presente, la nitrocellulosa. Avverrebbe ad un di presso quel che si verifica nelle soluzioni di gelatina cromata sotto l'influenza della luce; in questo caso è l'idrato di cromo formatosi in seguito al processo di riduzione che rende insolubile il resto della gelatina.

Sopra la produzione di alcune scintille.

In pirotecnica sotto il nome di « pioggia d'oro » si indica un fuoco d'artificio costituito da piccoli dadi o cilindri formati da un impasto di salnitro, zolfo e nerofumo che per lo più vengono lanciati per mezzo di razzi; i frammenti, una volta infiammati, nella caduta attraverso l'aria lasciano una lunga coda luminosa costituita da una miriade di piccole scintille. Tali scintille presentano una grande rassomiglianza con quelle che vengono fornite da quei minuscoli fuochi d'artificio conosciuti sotto il nome di « spiche giapponesi », perchè una volta venivano dal Giappone. Esse sono costituite da pochi centigrammi di un polverino che si involge all'estremità di una striscia di carta velina, il resto della quale viene attorcigliato in un filamento sottile; la loro forma ricorda così quella di una spica di grano e da ciò il loro nome. Tale polverino è stato analizzato la prima volta da Hofmann il quale l'ha trovato costituito da una polvere pirica incompleta, perchè molto più ricca di zolfo.

Quando si accendono, prima brucia lentamente il polverino e rimane indietro una goccia incandescente, che aderisce al filamento di carta e dalla quale si sprigionano un grande numero di bellissime scintille ramificate: soffiando leggermente contro la goccia, aumenta il numero delle scintille, evidentemente perchè si attiva il processo di ossidazione della massa fusa.

Secondo H. Schwarz [1] tale polverino si può preparare con salnitro gr. 6, zolfo gr. 10 e carbone gr. 10; molto meglio però corrisponde un miscuglio di salnitro gr. 15, zolfo gr. 8 e nerofumo gr. 3 [2]. Naturalmente tale composizione è anche subordinata alla qualità della carta velina che si impiega, giacchè se varia lo spessore di questa, varia anche la quantità della cellulosa.

Un'altra miscela è stata proposta da Perron [3] e si compone di polvere pirica gr. 30, salnitro gr. 15, zolfo gr. 15, olio di lino gr. 10, canfora gr. 2 in gr. 8 di alcool e gr. 4 di gomma arabica sciolta in acqua; se ne fa un impasto che si riduce in cubetti di qualche millimetro di lato; quando sono secchi, si fissano all'estremità di un fuscello di legno e si accendono; bruciano del pari in modo tranquillo ed anche in questo caso rimane indietro una goccia incandescente da cui si sprigionano un grande numero di piccole scintille.

Io però ho osservato che l'effetto è di gran lunga superiore se a questa stessa massa, o meglio ancora alla sua polvere, si aggiunge una piccolissima quantità di nerofumo e poi si avvolge in una strisciolina di carta come per il caso delle spiche giapponesi; in questo modo invece di sprigionarsi un

(1) Dingler Journal, *263*, 94.
(2) Techn. Rundschau, 1908, pag. 379.
(3) Dingler Journal, *134*, 79.

grande numero di piccole scintille, si hanno grandi scintille, ramificate e fragorose; il loro diametro si può valutare a qualche centimetro e si portano anche ad un mezzo metro di distanza. La goccia incandescente è animata da un moto di rotazione ed è costituita senza dubbio da solfuri e tiosali che all'aria bruciano con forte sviluppo di anidride solforosa. Si ha l'impressione come se dalla superficie della goccia venissero proiettate minutissime particelle incandescenti che poi ad un certo punto esplodono; per analizzare il fenomeno sarebbe necessario ricorrere alla fotografia, cosa che non ho potuto fare per mancanza di mezzi.

Io ho impiegato nerofumo del commercio, nero di lampada che io stesso ho preparato ed anche nero di acetilene, che mi è stato regalato da una fabbrica germanica; l'effetto è stato sempre il medesimo, vale a dire in ogni caso si sono avute grandi scintille, mentre invece con la polvere di carbone e con la grafite (io ho adoperato un campione di grafite di Boemia, in polvere) sia da sole oppure mescolate a sostanze organiche ricche di carbonio si ha solamente un grande numero di piccole scintille. Ciò rende a mio avviso molto probabile che questo curioso fenomeno dipenda principalmente dall'ordine di grandezza delle particelle di carbonio [1].

Non è inverosimile che anche altre scintille, del resto molto rassomiglianti, abbiano una origine analoga, p. es. quelle che manda l'acciaio quando batte la pietra focaia, e quelle che si sprigionano dal ferro incandescente. A questo proposito giova rammentare che nei trattati si legge che il ferro brucia nell'ossigeno proiettando scintille; ma poi per l'esecuzione dell'esperienza si prescrive sempre di prendere una molla di acciaio. Forse ad un processo analogo sono dovute anche le scintille che mandano quei piccoli fuochi d'artificio composti da un filo d'acciaio rivestito in parte da una pasta formata da polvere di alluminio, limatura di ferro, nitrato di bario e destrina, oppure da nitrato di piombo, carbone e limatura d'acciaio impastati con soluzione alcoolica di gommalacca [2].

Resta a vedere se il carbonio prende parte anche nella produzione delle scintille che si sprigionano dall'acciaio al cerio.

Esperienza per dimostrare le proprietà esplosive di alcuni diazoderivati.

Sono ben noti i caratteri eminentemente esplosivi di alcuni sali di diazonio, quali p. es. il nitrato, clorato, perclorato, cromato ecc., ma si sa pure che questa proprietà si osserva per lo più sopra i prodotti allo stato secco; in alcuni casi soltanto, come il perclorato, i cristalli, al pari di quelli dell'azotidrato mercurico, possono talora esplodere quando si frantumano sotto

(1) Per l'esame microscopico di alcuni di questi neri veggasi: I. Perrot e R. Thiessen, Journal of Ind. and Engineering Chemistry, vol. 12 (1920), pag. 324.

(2) Lange O., Chem. Technische Vorschriften. Leipzig, 1916, pag. 552.

acqua ovvero quando urtano la parete del vaso che contiene il liquido in cui sono immersi ([1]).

In causa di queste proprietà, la preparazione di tali composti richiede le maggiori cautele; quando sono allo stato secco essi costituiscono senza dubbio le sostanze più pericolose che si conoscano e come tali hanno causato un grande numero di disgrazie; Victor Meyer raccomanda espressamente di non preparare il nitrato di fenildiazonio in quantità superiori a gr. 0,2 per volta. Questo fatto rende quindi sconsigliabile o per lo meno poco agevole il mostrare ad un uditorio tale proprietà di queste sostanze e perciò io sono ricorso ad un artifizio per mezzo del quale si può eseguire l'esperienza in modo assai semplice senza pericolo di sorta ed impiegando soluzioni acquose molto diluite dei sali dei diazocomposti, quali il cloridrato, solfato ecc.

A tale scopo si pesa in una bevuta un grammo di anilina, cui si aggiungono 10 cc. di acqua e 10 cc. di acido cloridrico concentrato ed in un'altra bevuta si sciolgono gr. 0,75 di nitrito sodico in 10 cc. di acqua. Si raffreddano i due liquidi con acqua corrente (non è necessario impiegare ghiaccio) e poi si aggiunge, poco per volta, la soluzione di nitrito alla soluzione cloridrica di anilina, che si mantiene agitata in una bacinella d'acqua. Lo sviluppo gassoso è appena apprezzabile.

Si pongono allora circa 5 cc. del liquido così ottenuto in un bicchiere a calice (e quindi a pareti robuste) al di sopra del quale si colloca, capovolto ma in modo che non tocchi il bicchiere, un largo imbuto di vetro, fermandone la coda per mezzo di un morsetto; questo imbuto ha lo scopo di evitare che spruzzi di liquido vengano proiettati all'intorno. Si aggiungono allora al liquido 3 oppure 4 grossi cristalli di permanganato di potassio, ciò che si può fare attraverso la coda dell'imbuto, e tosto incomincia un rapido succedersi di piccole ma violenti esplosioni che avvengono in seno al liquido stesso; ogni esplosione è accompagnata da forte sviluppo di gas. Operando in un bicchiere a pareti sottili, c'è pericolo che questi si rompa. Con soluzioni più diluite e meno acide le esplosioni sono meno frequenti ma più forti.

Si comprende subito che riesce molto difficile poter dire a quale composto sieno dovute tali esplosioni che avvengono in seno al liquido, fortemente agitato perchè si succedono rapidissime: con tutta probabilità si tratta di minime quantità di un prodotto che si forma nelle regioni di contatto fra liquido e cristalli di permanganato.

Siccome l'esperienza riesce anche impiegando il solfato di anilina invece del cloridrato, resta escluso che vi prendano parte prodotti clorurati; l'esperienza riesce invece negativa se in luogo del permanganato si adoperano

([1]) A. Stettbacher, Zeit. für Schiess- und Sprengstoffwesen, *11* (1916), pag. 147.

cristalli di bicromato, persolfato ovvero clorato di potassio. Come è noto, quando sono diluite e fredde, le soluzioni di permanganato ossidano l'idrato di diazobenzolo in gran parte ad acido diazobenzolo $C_6H_5 . N : NOOH$, sostanza non esplosiva e che in ogni caso si decompone senza sviluppo di azoto; il forte sviluppo di gas invece che si osserva nella esperienza descritta rende quindi probabile che le esplosioni siano dovute alla formazione effimera di qualche sale di fenildiazonio, forse di permanganato, ovvero all'azione del permanganato stesso sopra qualche altro derivato del diazobenzolo; così p. es. è noto che anche gli ossidi dei diazocomposti, scoperti da E. Bamberger, sono dotati di carattere eminentemente esplosivo, tanto che finora non fu nemmeno possibile determinarne con esattezza la composizione.

È poco verosimile che lo sviluppo gassoso sia dovuto all'urto dell'esplosione sopra la soluzione del sale diazoico ambiente.

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio C. De Stefani [1].

VI.

Strati interni della zona cristallina occidentale.

Costa di S. Alberto.

Alla Costa di Sant'Alberto presso Sestri Ponente nel bel mezzo della zona degli Schisti cristallini ad occidente del Gazo, è un Micaschisto quarzoso con Quarzo in grossi grani ed in microscopici prismi bipiramidati con inclusioni liquide, Limonite pseudomonfa e in macchie diffuse, abbondante Sericite e Muscovite, abbondanti aciculi di Rutilo altamente rifrangente, otticamente positivo, con sfaldature secondo 110, Apatite e raro Zircone. Esso è molto spugnoso perchè probabilmente in origine era un Calceschisto siliceo dal quale è stato asportato il Carbonato calcico, comprese, come dirò, parti di Silicospongia calcificata. Nei tratti più a lungo esposti alle intemperie e più spugnosi, specialmente nelle parti più ferruginose si notano le sfioriture di Quarzo cristallino precisamente come nella roccia spongifera calcarifera di altri luoghi trattata con gli acidi. Con lente in costa agli strati, in ispecie in mezzo alla parte ferruginosa ma pure in quella micacea, e meglio in alcune sezioni a non forte ingrandimento, si vede l'intreccio hexactinico dictyonale di 3 ordini. Le Megasclere con evidentissime Lychnische formano regolari maglie quadrate nel cui centro è talora una grossa *Oxyhexactinia.* Le Microsclere fanno un complesso ed irregolare reticolato interno nel quale sono poi microscopiche *Hexactiniae* semplici isolate, anche una sola per ogni quadrato. Talora il Quarzo è concresciuto intorno alle

[1] Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

spicole, delle quali rimase solo il modello in negativa perchè reputo che essendo state calcificate, il carbonato calcico fu poi portato via dalle acque. Vi sono le solite *Ostia* di *Epirhize* puntiformi, ed altre più grandi, circolari, di *Aporhize* con breve intreccio radiale o talora con uno a 3 giri di intreccio periferico nei quali le *Hexactiniae* espanse ai punti d'incrocio formano maglie con forellini circolari. Si vedono pure isolate tali placche dermali forate. Vi sono pure *Hexactiniae dilophe, Tetractiniae, Diactiniae* e forse *Uncini.*

Stazione ferroviaria di Voltri.

Quivi nello schisto sono piccole lenti di Calcare alquanto magnesiaco interamente costituito da una *Hexasterosa dictyonina* originariamente silicea, trasformata in calcare: sciogliendo questo negli acidi esso abbandona alquanto Quarzo, Limonite, qualche particella carboniosa, spicole monaxoniche rarissime e qualche residuo del delicatissimo intreccio dictyonale siliceo. L'intreccio risalta pure sulla superficie quando questa sia stata a lungo esposta alle intemperie od artificialmente acidulata. Esso è prevalentemente cubico, e diretto in tutti i sensi con *Hexactiniae* di varî ordini e quelle minori formanti anche maglie triangolari. Le Megasclere hanno rari aculei e *Lychnische*, le quali talora si espandono lasciando piccole lacune rotondeggianti, specialmente forse nelle parti dermali. I canali inalanti ed esalanti tubiformi traversano l'intreccio con disposizione alternata. L'intreccio intorno ai Canali acquiferi è disposto a losanga come nel genere *Hexactinella* Carter della famiglia delle *Tretocalycidae*; perciò il reticolato mi dava l'îdea di Nummuliti lentiformi intersecantesi fra loro. Alcune irregolari striscie serpeggianti, divaricate, riempite da Calcite, che traversano lo Spongiario, sono forse dovute a vermi od altri animali.

Oltre le Spicole monaxoniche, vi sono indizi di *Dichotriaene*, di *Tetraxoni* formati da *Caltroys* con zigosi poco complicate, lisci, con qualche spina o breve appendice embrionale che accennerebbe a *Tetra cladinidae* fossili questi nella Creta superiore e viventi.

Mele.

Tracce simili alle precedenti della Stazione di Voltri raccolsi presso l'entrata al Camposanto di Mele. Ivi in mezzo ai Calceschisti più o meno quarzosi e micacei è un Calcare molto siliceo d'aspetto simile ai così detti Calcari screziati eocenici dell'Appennino toscano. Ne ho raccolto 6 o 7 frammenti aventi tutti la stessa costituzione. È costituito da frammenti diversi or silicei or calcarei: qualche pezzo scuro più siliceo, ha struttura più compatta. Mineralogicamente, con Calcite, Quarzo e Opale sono Sericite e Clorite, rara Pirite o Pirrotina, macchie e cubetti limonitici, microliti di Apatite e pulviscolo carbonioso. Già dall'esterno, nelle parti silicee più sporgenti

e nelle sottili sezioni ad ingrandimento non forte, vedesi che la roccia è costituita da frantumi di spongiario, parte siliceo, di silice colloide o trasformato in Quarzo, parte convertito in carbonato calcico, cementati da Calcare nel quale non sono più tracce dei primitivi costituenti organici calcitici. L'intreccio hexactinico dictyonale di tre ordini è pure convertito in Pirite e quello microsclerico in Limonite a contorni sbavati: in tali casi è meglio conservato; talora passa direttamente dalla Calcite al pulviscolo limonitico o carbonioso. La Calcite riempie gl'interspazi delle macrosclere silicee; mentre le microsclere silicee più raramente si conservano al di fuori del Quarzo: a volte è il Quarzo che occupa il centro delle maglie; a volte la Limonite occupa quello delle maglie quarzose.

L'intreccio a tratti è molto regolare, quadrato; a tratti irregolarissimo quadrato, parallelogrammo, triangolare. Le Macrosclere sono talora fornite di brevissime spine e talora, sembra, di Lychnische, quindi di espandimenti che rendono le maglie stesse rotonde ed irregolari e dànno luogo anche a placche dermali e gastrali forate. Vi sono le solite *Ostia* puntiformi di Epirhize entro piccole losanghe trasversali, d'intreccio ridotto così forse per schiacciamento, ed *Ostia* maggiori circolari di *Aporhize* con intreccio radiale. A volte intorno alle une ed alle altre l'intreccio è disposto a spirale, circostanza notata pure alla Biscazza e a Casa Buzzano.

Sottoponendo ad acido idroclorico qualche lastrina parallela agli strati rimane l'intreccio di limpidissimi prismetti bipiramidati di Quarzo, differentemente orientati, come sfioriture verticali nelle quali all'ingrosso risaltano i Canali acquiferi; in brevi punti è perfettamente conservato l'intreccio microsclerico. Il Quarzo ha inclusioni liquide e carboniose alcune delle quali con assetto *microhexactinico*: vi si distinguono pure nettamente in bianco *Hexactiniae* con maglie parallelogramme con *Ostia* puntiformi, e *diactiniae*.

La presente specie sarebbe dunque una *Lychniscosa* ed è possibile che fra le due specie viventi *Anlocystis Zitteli* Mars. e *A. Grayi* Mars., come altre *Lichniscosa* dei terreni esaminati, risponda meglio a quest'ultima la quale oltre alle *Hexactiniae* con regolari Lychnische presenta *Hexactiniae* semplici dappresso alla base. Anche nel genere Cretaceo *Tremabolites* Zittel della famiglia delle *Camerospongidae* Schrammen sono nella rete dictyonale *Hexactiniae* semplici ma solo nelle regioni dermale e gastrale: però l'appartenenza a questa famiglia è da escludere per la mancanza di numerosi *Cavedii*. Le spugne dell'Eocene sono assai poco note ed è prudente non fare ravvicinamenti. Forse la nostra specie appartiene alla famiglia *Ventriculitidae* Zittel che principiando nel Giura è tanto estesa nella Creta, o meglio alle *Sporadoscinidae* Schrammen, pur della Creta con *Ostia* di Epirhize trasversalmente ovali o ridotte a semplici fenditure e *Postica* rotonde di più ampie Aporhize.

Le medesime parvenze vidi nello Schisto spugnoso sopra Mele, simile

a quello descritto della Costa di S. Alberto, ma più scuro e meno ferruginoso: probabilmente esso pure era un Calceschisto dal quale fu asportata la parte calcitica. Nelle lenti quarzose si vedono benissimo le grosse maglie hexactiniche isolate.

Campo Ligure.

Una interessante roccia fossilifera che meriterebbe di essere descritta litologicamente a lungo è il Calceschisto a Glaucofane di Campo Ligure sulla destra della Stura d'Ovada. Fra i tanti schisti anfibolici a Glaucofane della regione è la sola roccia calcitica da me ritrovata. È bene stratificata, scura, costituita a sua volta da lamine calcitiche, quarzose, o prevalentemente micacee ed anfiboliche. Si trova in mezzo a svariati schisti anfibolici, andalusitici e serpentinosi, alla base della formazione serpentinoso-gabbrosa-diabasica e sono d'accordo con quelli che la ritengono un tufo metamorfico. Al microscopio presenta abbondante Calcite in lamine ed aggregati ben distinti da apparenti sfaldature di geminazione prodotte, come dicono, da fenomeni di compressione o *milonizzazione* attestati anche da rotture ed interruzioni delle lamine stesse. Si accompagnano più rari, grani di Quarzo, chiazze di Silice idrata e sferoidi di Calcedonio. Abbondante è la Muscovite o Sericite, talora con aggegati o lamine di Clorite. Tremolite in fibre ed in certi tratti Actinoto sono abbastanza diffusi. Il Glaucofane è raro, talora nella parte centrale dell'Actinoto. Pare vi siano tracce di Diopside o di Augite con scheletro di Magnetite in lunghi prismi macroscopici od in fasci aggregati di cristalletti, talora incurvati e rotti forse derivanti da Serpentino. Residui limonitici e pulviscoli carboniosi si intromettono per tutto, ma specialmente intorno alla Calcite, alla minutissima Sericite, all'Anfibolo perfino nei piani di sfaldatura.

Svariatissimi componenti secondari sono Magnetite, Pirite, Rutilo in taluni punti abbondante, Sfeno, Apatite, Epidoto, rare tracce di Plagioclasio e forse Andalusite.

A prima vista nulla apparisce di organico, principalmente sulla superficie degli strati, ma guardando questi, con la lente, in costa negli straterelli silicei esposti più a lungo alle intemperie che sottrassero la parte calcitica, notansi frammenti d'intreccio hexactinico dictyonale, visibile pur nelle sezioni sottili con ingrandimenti fino a 90 D. Il tessuto con maglie di 3 ordini è in parte rotto e frammentizio o forse alquanto largo o cavediale di sua natura, nel qual caso si tratterebbe di una specie diversa dalle altre. Le Macrosclere raramente ben conservate, formano maglie irregolari, ma spesso quadrate, talora schiacciate per compressione. A quanto pare hanno spine, ad esempio come gli *Sphenaulax* Cretacei, ma più sottili, ed hanno Lychnische, talora espanse alle zygosi per modo che il tessuto qualche volta è convertito in placche o piastrine sottilissime con fori rotondi sostituiti alle

maglie poligonali. Il reticolo interno più minuto, in parte rotto e corroso, spesso convertito in Limonite, che dalla Silice passa pure alla Calcite e perfino alla Pirite, a forti ingrandimenti presenta contorni sbavati. Al polariscopio il reticolo si vede meglio tanto nelle parti chiare per le diverse orientazioni cristallografiche, quanto in quelle scure le quali risultano maggiormente isolate da interspazi bianchi. Si vedono alcune *Hexactiniae* limonitiche isolate e qualche *Diactinia*. *Ostia* puntiformi o ridotte a fine fenditura, credo di *Epirhize*, ed altre grandi, pur talora schiacciate, di *Aporhize*: talora penetrano anche a traverso i sottilissimi veli sericitici i quali lasciano trasparire anche il tessuto. In alcune sezioni alternano i canali delle *Aporhize* cechi ad una delle estremità. Essi hanno all'intorno un reticolo radiale.

Intaccando la superficie con acido acetico per eliminare solo il Carbonato calcico, in qualche tratto rimane la Silice in bianco bene spiccata sul nero dello Schisto: sono sfioriture verticali, di Quarzo ialino, trasformazione della Silice colloide primitiva, in microscopici prismi piramidati a spigoli in apparenza lievemente arrotondati, attestanti, cred'io, il permanente passaggio di acque, con inclusioni liquide, carboniose e limonitiche, in origine piritose. In mezzo alle fioriture appaiono spazi irregolarmente rotondi, attribuibili a relativamente grandi canali verticali di *Aporhize* con un giro di intreccio radiale a numerosi raggi. Rimangono in alcuni punti evidenti residui del finissimo intreccio microsclerico a maglie parallelogramme e triangolari in serie pur talora radiale. Vi si notano *Diactiniae* e forse *Uncini*, sì che parrebbe si trattasse di *Uncinataria*.

Applicando soluzioni di Eosina queste imbevono di vivace color rosso alcune parti dei frammenti silicei colloidi, probabilmente di megasclere e compenetrano di leggerissimo colore roseo le parti limonitiche nel Quarzo e talora nella Calcite, in serie così regolare da segnalare maglie microscopiche le quali altrimenti non sarebbero visibili, di cui la Limonite occupa il centro. Così pure vedesi il reticolato disposto radialmente con maglie anche triangolari.

Fra i corpi estranei sono rari Rhabdi di *Rhizomorinae* e qualche foraminifera indeterminabile (*Orbulina* o *Globigerina*) alle quali fu dovuta la parte calcarea che in piccola parte trasformò lo Spongiario siliceo.

Non è la prima volta che negli schisti a Glaucofane sono indicati fossili. Brugnatelli indica Glaucofane negli schisti a Radiolarie del M. Cruzean illustrati dal Parona.

Franchi cita la Crocidolite nei Diaspri a Radiolarie pure studiati da Parona e Rovereto della Casa delle Isole, località vicina alla Crocetta e ad altri luoghi che accennerò poi.

Fisica terrestre. — *Il gradiente termico verticale nell'atmosfera.* Nota del Socio Luigi De Marchi [1].

In questi ultimi tempi furono avanzate obbiezioni alla dimostrazione, data comunemente nei trattati, dello stabilirsi di un gradiente termico verticale costante in una corrente d'aria asciutta, nell'ipotesi adiabatica. La discussione più completa in argomento credo sia quella fatta recentemente dal sig. S. Róna nella *Meteorologische Zeitschrift* dell'ottobre e novembre 1920.

La dimostrazione è basata sull'equazione d'adiabaticità $C_p\, dT = Av\, dp$ (A equivalente termico del chilogrammetro) e sull'equazione dell'equilibrio idrostatico $dp = -\gamma dz$ $\left(\gamma = \frac{1}{v}\right.$ peso specifico dell'aria all'altezza $\left.z\right)$, fra le quali si elimina la dp. Il Róna osserva che tale eliminazione non è legittima, perchè il $v\,dp$ non ha lo stesso significato nelle due equazioni: nella prima si riferirebbe alla massa in moto verticale; nella seconda alla condizione preesistente, di densità e pressione, nell'atmosfera circostante. Io non credo esatta tale formulazione di un argomento sostanzialmente giusto, perchè anche l'equazione dell'equilibrio (a cui converrà, come vedremo in altra Nota, sostituire quella del moto) si deve riferire alla situazione attuale di ogni istante *entro* la colonna ascendente. Io credo che più generalmente debba dirsi che, essendo la p in generale funzione non della sola z, ma anche dal tempo t, la dp nell'equazione termodinamica è espressa dal binomio

$$\frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial z}dz,$$

di cui l'equazione d'equilibrio, o di moto, non darebbe che il secondo termine.

Che la p sia funzione anche di t lo prova anzitutto l'equazione di moto

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma - a\gamma f(w) + \frac{\gamma}{g}\frac{dw}{dt} \tag{1}$$

(w velocità verticale, $a\gamma f(w)$ forza di attrito che si ritiene una funzione rapidamente crescente di w e proporzionale alla densità) [2], perchè in generale il movimento non è permanente. Inoltre abbiamo le continue variazioni di pressione nell'atmosfera sovrastante ed ambiente che si riflettono anche nella colonna d'aria in moto e possono anche non modificare il gradiente $\frac{\partial p}{\partial z}$.

[1] Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

[2] In un moto puramente verticale la forza deviatrice della rotazione terrestre non ha componente verticale.

Come variazioni autoctone della pressione, indipendenti dalla stratificazione preesistente, e non dovute tuttavia a scambi di energia coll'esterno, possiamo considerare anche quelle derivanti dalla condensazione del vapor d'acqua o dalla evaporazione dell'acqua e fusione del ghiaccio, colle conseguenti variazioni della tensione del vapore.

Ma la debolezza fondamentale della dimostrazione sta nell'applicazione dei principî stessi che formano la base dell'equazione termodinamica: la reversibilità e l'adiabaticità del processo. Solo in una espansione reversibile il lavoro elementare è espresso da $p\,dv$, da cui si deduce la $v\,dp$ mediante l'equazione dei gas, che è pure applicabile solo nell'ipotesi di equilibrio fra la pressione esterna e la tensione interna della massa, e tutti i processi che derivano da condizioni d'equilibrio labile non sono reversibili. Ora una corrente verticale persistente non può formarsi che nel presupposto di un equilibrio labile o indifferente. Questo secondo caso si verifica solo quando preesista nell'atmosfera la stessa stratificazione adiabatica che è determinata dal moto verticale: solo in questo caso si verifica la condizione di reversibilità, e quindi il gradiente termico *normale*, quello cioè dedotto dalle equazioni di equilibrio adiabatico e idrostatico, può verificarsi nell'aria in moto solo nel caso che esso preesista nell'aria ferma. Questa conclusione fu già messa in evidenza da altri autori [1] e dallo stesso Róna. Senonchè essi ammettono implicitamente la condizione di reversibilità, supponendo che si stabilisca istantaneamente l'equilibrio di pressione tra la colonna ascendente e l'aria esterna allo stesso livello. Essi suppongono infatti che all'altezza h pressione, temperatura e volume specifico siano nell'aria in moto p, T, v e nell'aria ferma p, T', v', per cui $v : v' = \mathrm{T} : \mathrm{T}'$; e deducono allora dalle equazioni, pel caso di gradiente costante, il valore

$$\frac{d\mathrm{T}}{dh} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}_p}\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'}$$

e in generale (Róna m. c. equaz. 7)

$$\frac{dh}{f(h)} = -\frac{\mathrm{C}_p}{\mathrm{A}}\,\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}}$$

dove $f(h)$ esprime la legge di variazione verticale della temperatura preesistente nell'aria ferma; equazione che il Róna applica ai casi speciali, compreso quello di una stratificazione labile, al quale non è applicabile l'equazione termodinamica.

Tale supposto di un equilibramento istantaneo equivale a supporre $\frac{\partial p}{\partial t}$ infinita. In realtà un equilibramento completo non si verificherà mai, specialmente quando si tratta di un movimento verticale molto esteso, com'è

[1] Vedi in particolare Exner, *Dynamische Meteorologie.* Leipzig, 1917, pag. 47.

il caso nei grandi movimenti dell'atmosfera, perchè, prima che si verifichi, la massa unitaria considerata si è portata a un livello diverso. Che così sia lo prova la deformazione continua delle superficie isobariche entro e attorno una corrente ascendente o discendente, mentre nell'ipotesi dell'equilibramento istantaneo la situazione barica non dovrebbe cambiare.

Ma se tra la corrente verticale e l'aria ambiente si stabilisce e si mantiene un dislivello di pressione, si mantiene anche un continuo ricambio d'aria e quindi di moto e di energia dall'esterno all'interno o viceversa. I classici studî del compianto Margules [1] sull'energia delle tempeste dimostrarono che l'energia di moto prodotta da un dislivello orizzontale di pressione è grandissima rispetto all'energia di posizione corrispondente al dislivello stesso, e che la sua fonte principale deve cercarsi nell'energia potenziale della distribuzione verticale di massa in tutto lo spazio perturbato, energia potenziale di cui il gradiente orizzontale non è che una manifestazione, non la misura. Quando questo gradiente esiste, non possiamo isolare la corrente verticale da tutta la massa circostante che la determina e ne è perturbata; non possiamo cioè considerare il processo come adiabatico, poichè vi sarà o moto convergente o moto divergente con variazioni di pressione, densità e temperatura indipendenti dal moto verticale, con assorbimento o sviluppo di energia.

Scambi laterali di quantità di moto tra filetti contigui si verificano nel moto dei liquidi per la turbolenza, che rappresenta un enorme disperdimento di energia meccanica trasformata in calore: lo stesso dobbiamo ammettere anche per l'aria, specialmente negli strati vicini al suolo. Anche di questo disperdimento non è tenuto conto nelle equazioni di equilibrio, e nemmeno in quelle di moto, a meno che non si voglia compenetrarlo, come in modo non in tutto giustificato fa il Boussinesq, nel termine di attrito, attribuendogli un valore molto più elevato di quello dell'attrito fisico.

Non è possibile calcolare l'energia che viene scambiata tra la massa in moto e l'ambiente o viene trasformata in calore nella massa stessa per la turbolenza del moto, ma si comprende come, specialmente la prima, possa

[1] Vedine un largo e più facile riassunto nella citata opera di Exner, cap. VII. Mi sembra tuttavia non giustificata la conclusione (su cui l'A. insiste anche nel suo recente necrologio di Margules nella *Meteor. Zeit.*, nov. 1920) che sia falsa la comune concezione che il gradiente genera il vento, quando senza gradiente l'aria non si mette in moto, e le equazioni del moto rappresentano una necessaria correlazione quantitativa fra gradiente, velocità e accelerazione. Un gradiente orizzontale anche piccolo mantenuto per lungo tempo nella direzione di un movimento genera velocità grandissima: che se per mantenerlo a lungo è necessario il consumo di una grande somma di energia fornita da tutta la massa (come in un circuito elettrico chiuso per mantenere a lungo anche una piccola differenza di potenziale), questo è un problema ulteriore, la ricerca della causa della causa.

essere tutt'altro che trascurabile rispetto a quella rispondente al lavoro di dilatazione per sollevamento. Indicando con $E\,dt$ questa quantità di energia scambiata nel tempuscolo dt, e ammettendo come applicabili, almeno approssimativamente, la condizione di reversibilità e l'equazione dei gas (per le quali il lavoro esterno possa esprimersi con $p\,dv$, o con $AR\,dT - v\,dp$), le equazioni dell'equilibrio termodinamico e idrostatico darebbero

$$C_p\,dT = -A\,dz + E\,dt$$

donde

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{A}{C_p} + \frac{E}{C_p}\,\frac{1}{w}.$$

Questa formola ci dice che il gradiente termico verticale si accosta tanto più al valore normale quanto più rapido è il moto verticale; una corrente verticale molto rapida, un getto d'aria, si manterrebbe quasi isolata dall'ambiente. Fuori di questo caso il gradiente è di regola minore del normale, poichè con moto ascendente ($w > 0$) la pressione interna è minore dell'esterna e vi è afflusso d'energia ($E > 0$), con moto discendente tanto E quanto w cambiano di segno, e quindi $E : w$ è sempre positiva.

Che se attorno a una colonna ascendente si forma un moto vorticoso così forte da determinare per forza centrifuga una proiezione d'aria verso l'esterno, il gradiente potrà diventare anche maggiore del normale, finchè w non cambia segno per l'inversione di densità prodotta dal rapido raffreddamento o per chiamata d'aria dall'alto. Tali condizioni potranno verificarsi nelle trombe.

Le irregolarità nella distribuzione verticale della temperatura, in particolare il fatto che le misure di temperatura in aria libera segnalano un gradiente termico di regola minore del così detto gradiente adiabatico (0°,98/100 m.), ma in qualche caso anche notevolmente maggiore, possono quindi spiegarsi colla considerazione che, anche indipendentemente dal variabile assorbimento del calore solare e dalle trasformazioni dell'acqua, i movimenti convettivi non possono considerarsi come adiabatici. Rigorosamente nemmeno come reversibili, cosicchè le equazioni dalle quali fu dedotto il gradiente normale non sono legittimamente applicabili. Tale deduzione rappresentò però sempre un risultato di alta importanza, come l'espressione di un caso ideale a cui la realtà più o meno si accosta, e come la prima dimostrazione di un limite che i moti convettivi impongono al gradiente termico verticale, mentre, in condizioni di puro equilibrio radiante, questo può assumere valori molto maggiori, fino a 3°,4 per 100 m.

Geometria. — *Sulla teoria proiettiva delle congruenze* W. Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

1. Recentemente il sig. Jonas nel tomo 29 degli Jahresber. d. d. math. Gesell. (1920) ha paragonato le teorie metriche delle congruenze W, dando alcune notevoli formole. Però le equazioni fondamentali, da cui egli parte, sono già state date da me in una mia Memoria del tomo 43 del Circolo Matem. di Palermo (1918-19). Nella via indicata in questo mio lavoro si potrebbero anche studiare le relazioni tra le due falde focali; le formole risultano però complicate. È merito grande dello Jonas l'avere osservato che tutte le formole si semplificano introducendo *una sola* funzione $\varDelta$. Tale funzione, che lo Jonas introduce per via *metrica*, ha però, come proveremo, significato *proiettivo*. Per tali ragioni riprendo qui lo studio *proiettivo* di una congruenza W di data prima falda focale (problema *proiettivo*, che di solito si studia per via *metrica*), partendo dalle mie equazioni fondamentali, e ricorrendo per il resto del calcolo alla funzione $\varDelta$ dello Jonas, e formole relative. Resterà così ben chiaro anche il legame con le teorie metriche usuali delle congruenze W.

2. Siano u, v assintotiche d'una superficie S; sia $2D'\,du\,dv$ la seconda forma di Gauss, ed $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ l'elemento lineare metrico, rispetto al quale calcoleremo i simboli di Christoffel. La superficie è determinata a meno di una collineazione dagli invarianti proiettivi

$$\beta = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \gamma = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad L = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta_v - \beta\,\theta_v,$$

$$M = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma_u - \gamma\,\theta_u$$

ove

$$\theta = \log\left(\sqrt{D'}\,\sqrt[4]{EG - F^2}\right) + \text{cost.} \quad , \quad \theta_u = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \quad \theta_v = \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Con x indicheremo una qualsiasi delle *quattro* quantità $x, y, z, 1$, essendo le prime tre le solite coordinate cartesiane ortogonali. Con $\bar{x}$ indichiamo le quantità che se ne deducono, moltiplicando le x per $\sqrt{\beta\gamma e^{-\theta}}$. Le $\bar{x}$ sono le coordinate proiettive *normali*, le quali, per ogni collineazione, subiscono soltanto una trasformazione lineare a coefficienti *costanti* (senza alcun fattore di proporzionalità, che potrebbe essere funzione delle u, v).

Con t indicheremo infine coordinate omogenee qualsiasi. Se S è prima falda focale di una congruenza, da ogni suo punto esce una retta della con-

[1] Presentata nella seduta del 17 aprile 1921.

gruenza, i cui punti avranno coordinate omogenee del tipo

$$t_1 = \mu \bar{x} + 2(A \bar{x}_u + B \bar{x}_v) . \tag{1}$$

Affinchè la congruenza sia W e questo punto t_1 descriva la seconda falda focale S_1, nella mia Memoria cit. è dimostrato che si deve poter scegliere il fattore di proporzionalità delle t in guisa che

$$A_v = - B\gamma \quad ; \quad B_u = - A\beta ; \tag{2}$$

$$\mu = - B_v - A_u - B \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} - A \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} . \tag{3}$$

Le prime due sono appunto le stesse equazioni ritrovate più tardi dallo Jonas; dalla terza si deduce l'equazione analoga dello Jonas, passando a coordinate cartesiane. Posto $\bar{x} = \sqrt{\beta\gamma e^{-\theta}}\, x$, si trova infatti

$$t_1 = \sqrt{\beta\gamma e^{-\theta}} \left[(- B_v - A_u - A\theta_u - B\theta_v)\, x + 2A\, x_u + 2B\, x_v \right] .$$

Ricordando che l'ultima delle x vale 1, e dividendo per l'ultima delle t, per ottenere coordinate cartesiane x_1 del punto della seconda falda focale S_1, si trova

$$x_1 = x + \frac{A x_u + B x_v}{R} , \tag{1$_{bis}$}$$

ove

$$R = - \frac{1}{2} (B_v + A_u + A\theta_u + B\theta_v) \tag{3$_{bis}$}$$

che è appunto la formola di Jonas (il quale indica con a, $-b$ le nostre A, B). Date le L, M, cioè data la superficie a meno di una collineazione, si hanno due equazioni per determinare la θ, le quali sono integrabili ([1]). Per ogni valore di θ si ha dalla $(3)_{bis}$ una soluzione R della

$$R_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma)\, R .$$

Questa è l'equazione che si presenta nelle classiche trattazioni *metriche* delle congruenze W; ed ecco così trovato il legame tra esse e lo studio puramente proiettivo. Lo studio della seconda falda focale si potrebbe, come è detto nella mia Memoria cit., proseguire direttamente partendo dalle (1). Ma qui la idea elegantissima dello Jonas semplifica grandemente i calcoli; egli ha posto

$$\Delta = AR_u - BR_v + \frac{1}{4} (A_u + A\theta_u)^2 - \frac{1}{4} (B_v + B\theta_v)^2$$

([1]) Le condizioni di integrabilità sono soddisfatte in conseguenza delle relazioni, che legano β, γ, L, M:

$$L_v = - (2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma) \quad ; \quad M_u = - (2\gamma\beta_v + \gamma_v\beta) ;$$

$$\beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu} .$$

che, in virtù di $(3)_{bis}$, diventa

$$(4) \qquad \varDelta = -\frac{1}{2}A^2L + \frac{1}{2}B^2M + \frac{1}{2}\left(BB_{vv} - \frac{1}{2}B_v^2\right) - \frac{1}{2}\left(AA_{uu} - \frac{1}{2}A_u^2\right).$$

La $\varDelta$ non dipende da θ, ma soltanto da L, M; *dunque $\varDelta$ ha carattere proiettivo*; essa soddisfa all'equazione

$$(5) \qquad \varDelta_{uv} + \frac{B}{A}\gamma\varDelta_u + \frac{A}{B}\beta\varDelta_v = 0.$$

Partendo dalle formole di Jonas, o direttamente, si prova che le quantità $\beta_1, \gamma_1, L_1, M_1$ della seconda falda focale sono date dalle

$$(6) \qquad -\beta_1 = \beta + \frac{B}{A}\frac{\varDelta_u}{\varDelta}\ ;\ L_1 = L + \frac{\varDelta_{uu}}{\varDelta} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varDelta_u}{\varDelta}\right)^2 + \frac{\varDelta_u}{\varDelta}\frac{A_u}{A}$$

ed analoghe per γ_1, M_1. Si potrebbero anche trovare le coordinate proiettive *normali* $\overline{x}_1$ della seconda falda focale che si ottengono dalle cartesiane x_1 moltiplicandole per $\sqrt{\beta_1\gamma_1 e^{-\theta_1}}$. Si trova che esse sono

$$(1)_{ter} \qquad \overline{x}_1 = \sqrt{\frac{\beta_1\gamma_1}{\beta\gamma}}\frac{1}{\varDelta}t_1 = \sqrt{\frac{\beta_1\gamma_1}{\beta\gamma}}\frac{1}{\varDelta}(\mu\overline{x} + 2A\overline{x}_u + 2B\overline{x}_v).$$

Il sig. Jonas ha continuato lo studio per il teorema di permutabilità. Dette $A_1, B_1, \varDelta_1$ le quantità finora indicate con $A, B, \varDelta$, e dette $A_2, B_2, \varDelta_2$ le quantità analoghe per una seconda congruenza W, di cui S è la prima falda focale, ed un'altra superficie S_2 è la seconda, il teorema di Bianchi ci accerta che S_1 ed S_2 sono trasformate per congruenze W di ∞^1 superficie S' (una delle quali è S). Se per es. A'_1 e B'_1 sono i valori di A, B relativi alla congruenza W di cui S_1 è la prima falda focale, e una tale S' è la seconda, le formole di Jonas, spogliate di quanto ha carattere metrico, dicono che

$$(7) \qquad \frac{\varDelta_1}{A_1}(A'_1 + A_2) = -\frac{\varDelta_1}{B_1}(B'_1 - B_2),$$

e che, detto ω il valore comune di questi rapporti, si ha, indicate con $\varDelta_u, \varDelta_v$ le derivate di $\varDelta_1$:

$$(8) \qquad \omega_u = \frac{A_2}{A_1}\varDelta_u \quad , \quad \omega_v = \frac{B_2}{B_1}\varDelta_v.$$

Perciò ω è determinato a meno di una costante additiva; ciò che corrisponde appunto al fatto che le S' dipendono da una costante arbitraria. ossia sono ∞^1, come afferma il teorema di permutabilità di Bianchi.

Si vede così quanta semplicità dia alla teoria proiettiva delle congruenze W *l'introduzione delle funzioni* A, B *da me fatta nella Memoria cit., e della funzione $\varDelta$ dello Jonas.*

La ricerca di una congruenza W di data prima falda focale è ridotta all'integrazione di (2). Le (1) o $(1)_{bis}$ od $(1)_{ter}$ dànno poi in coordinate omogenee, o cartesiane, o normali i punti della seconda falda focale; gli invarianti proiettivi, e quindi anche le forme fondamentali di questa sono dati dalle (6); le formole del teorema di reciprocità del Bianchi dalle (7), (8).

Queste formole si troverebbero, senza bisogno di ricorrere ad alcun artificio, seguendo il metodo da me indicato nella Memoria cit. Lo spazio mi vieta sia di iniziare un tale calcolo, sia di vedere come esso si dovrebbe modificare nel caso di falda focale rigata (cioè $\beta = 0$, oppure $\gamma = 0$).

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota IV del Corrispondente Francesco Severi.

8. Fissiamo ora in uno P dei punti base (impropri) del fascio $y =$ cost. la comune origine dei cammini d'integrazione per gl'integrali u_i, considerati come integrali abeliani della curva $f(x, y, z) = 0$, con y parametro. Indicati allora con $x_1(x_1, y, z_1), \ldots, x_p(x_p, y, z_p)$ p punti della curva $f(x, y, z) = 0$ per y generico, le equazioni

$$u_i(x_1) + \cdots + u_i(x_p) \equiv c_i \qquad \text{(modd. periodi } \omega), \tag{22}$$

ove le c_i sieno costanti arbitrarie ed i cammini d'integrazione che vanno allo stesso punto x_j sono i medesimi per tutti gl'integrali u_i, in base al teorema d'inversione di Jacobi, saranno soddisfatte da un gruppo ben determinato di p punti della sezione stessa. Il luogo di questi gruppi di p punti è una curva C, la quale può *a priori* risultare trascendente, perchè può passare infinite volte per qualcuno dei punti base del fascio $y =$ cost. Per cercare le condizioni di algebricità della curva C sostituiremo anzitutto ad essa una curva C′ costruita nel modo seguente:

Sia M_{p+1} la varietà algebrica, a $p+1$ dimensioni, i cui punti rappresentano le serie lineari complete d'ordine p appartenenti alle ∞^1 curve $y =$ cost. Essa contiene un fascio lineare di varietà N_p, ciascuna delle quali rappresenta le g_p complete appartenenti ad una sezione $f(x, y, z) = 0$ di F. Alla curva C corrisponde su M_{p+1} una curva C′ secante in un sol punto variabile le N_p.

La sostituzione della curva C′ alla C si presenta opportuna per ciò che, pur essendo le costanti c_i del tutto generiche, così che il gruppo dei p punti da esse individuato sulla generica curva $f(x, y, z) = 0$ non è speciale (cioè forma una g_p^0 completa), tuttavia accadrà che in corrispondenza ad un insieme finito, o comunque discreto, di sezioni $y =$ cost., le costanti c_i po-

tranno diventare le *costanti caratteristiche di un gruppo speciale di p punti*. In corrispondenza ad ogni tal sezione le equazioni (22) son soddisfatte da almeno ∞^1 gruppi di p punti appartenenti ad una g_p completa di dimensione ≥ 1; e perciò il gruppo dei p punti di C apparisce *a priori* indeterminato. Questa indeterminazione sparisce senz'altro, allorchè si considera la C′ in luogo della C.

È chiaro che C risulterà algebrica insieme a C′; sicchè noi potremo studiare le condizioni di algebricità di C′.

La M_{p+1} può supporsi immersa in uno spazio lineare S_r ($r \geq p+2$): una qualunque, ξ, delle coordinate del punto X variabile su C′, risulta funzione uniforme di y; e si tratterà di cercare le condizioni perchè $\xi(y)$ sia algebrica, cioè razionale. La $\xi(y)$ (che è una funzione razionale delle funzioni intere simmetriche delle coordinate dei p punti $x_1, \ldots, x_p$), risulta una funzione abeliana, appartenente al corpo Ω, dei parametri $c_1, \ldots, c_p$. Essa pertanto non può che essere olomorfa o presentare al più singolarità polari per ogni valore di y non singolare nè critico (n. prec.).

Esaminiamo che cosa accade in corrispondenza ad un valore singolare $y = b$, premettendo che, per una conveniente scelta degl'integrali u_i (definiti sempre come al n. 6) esso può supporsi distinto dai valori critici (n. 5). Anzitutto occorrerà chiarire come deve definirsi la varietà N_p sulla sezione $f(x, b, z) = 0$, perchè questa sezione ha il genere $p-1$, avendo acquistato il punto doppio $a(a, b, c)$.

Il limite della varietà dei gruppi di p punti della $f(x, y, z) = 0$, quando y tende a b, è la varietà dei gruppi di p punti di $f(x, b, z) = 0$. E un gruppo speciale della sezione variabile ha per limite un gruppo della $f(x, b, z) = 0$, il quale giace sopra una curva d'ordine $m-3$ passante pei d nodi di $f(x, b, z) = 0$, che son limiti dei nodi di $f(x, y, z) = 0$ variabili sulla linea doppia di F e non pel nuovo nodo a (*curva virtualmente aggiunta*, rispetto a quei d nodi) [1]. Orbene su $f(x, b, z) = 0$ la N_p è la varietà i cui punti rappresentano le serie g_p *virtualmente complete* rispetto a quei d nodi assegnati [2].

[1] Ved. le mie *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921), pag. 349.

[2] Ibidem, pag. 350. Sopra una curva con un certo numero dei suoi nodi assegnati (considerandosi gli altri virtualmente inesistenti) si può costruire una teoria degli integrali abeliani, che presenta varie analogie coll'ordinaria teoria. Avrò occasione di occuparmene altra volta e di mostrare come quella teoria si riattacchi alle proprietà delle funzioni abeliane degeneri. Qui mi basterà di enunciare, pel seguito, la seguente estensione del teorema d'inversione di Jacobi: Sia $f(x, y) = 0$ una curva algebrica irriducibile, d'ordine m e genere effettivo π, dotata di $d + \varepsilon$ nodi, dei quali $\varepsilon \geq 1$ si considerino inesistenti, sicchè f risulti di genere virtuale $p = \pi + \varepsilon$; e sieno $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_p = 0$ p curve indipendenti, d'ordine $m-3$, virtualmente aggiunte, rispetto ai d nodi assegnati. Consideriamo gl'integrali abeliani di 3ª (ed in particolare di 1ª) specie $u_i = \int \frac{\varphi_i}{f'_y} dx$,

L'estensione del teorema d'inversione enunciata nella nota a pie' di pagina, tenendo presente che gl'integrali u_i sono indipendenti anche per $y = b$ (b non è un valor critico), permette senz'altro di concludere che anche sul piano $y = b$ la curva C ha un gruppo ben determinato di p punti e che quindi, se $\xi(y)$ è finita per $y = b$, essa è olomorfa.

Esaminiamo il caso in cui $\xi(y)$ diventa infinita per $y = b$. Essendo essa eguale ad un quoziente del tipo $\frac{\eta}{\zeta}$, ove η, ζ son funzioni intere delle funzioni simmetriche elementari dei p punti $x_1, \ldots, x_p$, finchè il gruppo dei p punti è determinato, la ξ non può diventare infinita che quando ζ si annulla o quando η diviene infinita (per il che occorre che qualcuno dei punti $x_1, \ldots, x_p$ divenga improprio). In ambedue i casi la funzione $\frac{\zeta}{\eta}$, *che è continua e uniforme* nell'intorno di $y = b$, si annulla ivi. Ciò significa che $\frac{1}{\xi}$ è olomorfa in $y = b$ e quindi che ξ è meromorfa ivi.

I soli valori che dobbiamo ancora esaminare sono i valori critici. In corrispondenza ad uno $y = \alpha$ (o eventualmente $y = \infty$) di essi, gl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ divengono dipendenti, sicchè sulla corrispondente sezione $f(x, \alpha, z) = 0$ le equazioni (22) non definiscono un gruppo determinato di p punti. Ma c'è di più. Poichè fra i valori critici ce n'è sempre uno in corrispondenza al quale gl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ si annullano identicamente (n. 6), se le costanti $c_{q+1}, \ldots, c_p$ furono assunte non tutte nulle, in corrispondenza a questo valore critico si presenta una vera e propria discontinuità, giacchè le ultime $p - q$ somme (22) passano bruscamente da valori costanti non tutti nulli a valori nulli! Dunque:

La condizione necessaria affinchè la curva analitica C *sia algebrica è che per le costanti* $c_{q+1}, \ldots, c_p$ *si assumano valori tutti nulli. Proveremo ora che tale condizione è anche sufficiente,* e ne trarremo le conseguenze preannunciate.

Invero, se $y = \alpha$ è un valore critico, agl'integrali $u_1, \ldots, u_q, u_{q+1}, \ldots, u_p$ si possono sostituire gl'integrali analoghi $u_1, \ldots, u_q, u'_{q+1}, \ldots, u'_p$, in guisa che $y = \alpha$ non sia più critico rispetto al nuovo sistema d'integrali (n. 5). Però il determinante A della sostituzione lineare a coefficienti razionali in y

$$u'_{q+i} = \sum_{j=1}^{p-q} a_{ij}\, u_{q+j}\,, \qquad (i = 1, \ldots, p - q)\,,$$

e, scelta una comune origine delle integrazioni, si scrivano le equazioni $u_i(x_1) + \cdots + u_i(x_p) \equiv c_i$ (modd. periodi ciclici e polari), ove $x_1, \ldots, x_p$ sieno p punti variabili sulla f e c_i costanti. Le suddette equazioni, per valori generici delle c_i, son soddisfatte da un sol gruppo di p punti. Un'indeterminazione è possibile soltanto quando le c_i sieno le costanti caratteristiche di un gruppo virtualmente speciale.

che lega $u'_{q+1}, \dots, u'_p$ agl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$, diventa infinito per $y = \alpha$, e il determinante $\frac{1}{\mathrm{A}}$ della sostituzione lineare inversa

$$u_{q+i} = \Sigma \mathrm{A}_{ji} u'_{q+j},$$

si annulla per $y = \alpha$.

Indicata con c'_{q+j} la somma dei valori di u'_{q+j} nei p punti $x_1, x_2, \dots, x_p$, ove i cammini d'integrazione sieno i medesimi lungo cui si calcolavano gli integrali u_i, si hanno le relazioni:

$$c'_{q+i} = \Sigma a_{ij} c_{q+j} \quad , \quad c_{q+i} = \Sigma \mathrm{A}_{ji} c'_{q+j}$$

valide in tutto l'intorno di $y = \alpha$, salvo, eventualmente, in $y = \alpha$. Ma, se le $c_{q+1}, \dots, c_p$ son tutte nulle, le precedenti relazioni ci dicono che le $c'_{q+1}, \dots, c'_p$ sono pure tutte nulle, qualunque sia y; e viceversa, se sono nulle queste, risultano nulle quelle. Ciò significa che i p punti soddisfacenti alle p equazioni:

$$(23) \quad \begin{cases} u_i(x_1) + \cdots + u_i(x_p) \equiv c_i, & (i = 1, \dots, q), \\ u_{q+j}(x_1) + \cdots + u_{q+j}(x_p) \equiv 0, & (j = 1, \dots, p-q), \end{cases}$$

coincidono per ogni y coi p punti soddisfacenti alle equazioni:

$$\begin{aligned} u_i(x_1) + \cdots + u_i(x_p) &\equiv c_i, & (i = 1, \dots, q), \\ u'_{q+j}(x_1) + \cdots + u'_{q+j}(x_p) &\equiv 0, & (j = 1, \dots, p-q), \end{aligned}$$

e quindi la curva definita da queste ultime, al variare di y, coincide con quella definita dalle prime.

La curva C′, imagine di C sulla varietà M_{p+1} (n. 8), può pertanto definirsi pure mediante le funzioni abeliane corrispondenti ai periodi degli integrali $u_1, \dots, u_q, u'_{q+1}, \dots, u'_p$; e poichè per questi integrali $y = \alpha$ non è critico (nè singolare), così una qualunque ξ delle coordinate del punto X variabile su C′ risulta funzione olomorfa o meromorfa di y, anche per $y = \alpha$.

In conclusione ξ possiede in tutto il campo di variabilità di y sole singolarità polari, epperciò è una funzione razionale; e la curva C′, cioè C, risulta algebrica; c. d. d.

Osservazione 1ª. — Poichè le p costanti, con cui si definisce la curva C, non sono tutte arbitrarie (le prime q soltanto lo sono), così può darsi che per ogni sezione $f(x, y, z) = 0$ un gruppo generico di valori $(c_1, \dots, c_q, 0, \dots, 0)$ delle solite p somme, corrisponda ad un gruppo speciale di p punti. In tal caso le (23) non definiscono più, neanche per y generico, un gruppo di p punti, ma tutta una serie lineare infinita (completa). Sia δ la dimensione di questa serie, per y generico. Si potrà allora determinare un intero $\delta'(\geq \delta)$ tale che vi sia un sol gruppo della serie stessa,

il quale abbia un punto δ'-plo nel punto base P, del fascio $y = \text{cost.}$, sopra fissato. Detti $x_1, x_2, \ldots, x_{p-\delta'}$, gli ulteriori punti di questo gruppo, poichè in P gl' integrali $u_1, \ldots, u_p$ assumono valori congrui a zero, la somma dei valori assunti da u_i nei punti $x_1, \ldots, x_{p-\delta'}$, sarà eguale alla costante prefissata c_i. La curva C si definirà allora, al variare di y, come il luogo di questo gruppo di $p - \delta'$ punti. E si potranno per essa ripetere tutte le considerazioni precedenti.

Si noti che dovrà in ogni caso risultare $p - \delta' \geq q$.

OSSERVAZIONE 2ª. — Se per le costanti $c_1, \ldots, c_q$ si scelgono valori tutti nulli, come per le altre $p - q$ costanti, la curva C definita riducesi al punto P.

OSSERVAZIONE 3ª. — Le considerazioni svolte in questo num. estendono la validità della proposizione stabilita alla fine del n. 7 anche all' intorno dei valori singolari. E, se nella funzione abeliana di cui si parla in quell'enunciato, si limita la variabilità dei p argomenti, prendendo nulli gli ultimi $p - q$, si ottiene una funzione analitica di y priva di singolarità essenziali.

Chimica. — *Un nuovo procedimento per vulcanizzare a freddo la gomma elastica* [1]. Nota del Corrisp. G. BRUNI.

Oggetto di questa Nota è un nuovo procedimento per vulcanizzare a freddo la gomma elastica, o mescolanze od oggetti di gomma naturale o sintetica di qualsiasi natura, basato su un principio completamente diverso da quelli finora applicati e tale da presentare notevoli vantaggi.

I processi finora usati per la vulcanizzazione a freddo sono sostanzialmente i seguenti:

1°) L'antico processo al cloruro di zolfo, inventato da Parkes nel 1846, consistente nel trattare gli oggetti da vulcanizzare col monocloruro di zolfo, o con soluzioni di questo corpo in solventi, o nell'esporre gli oggetti ai vapori della medesima sostanza. Questo procedimento, assai diffuso nella pratica sopratutto per gli articoli ad immersione e per le riparazioni, ed usato in forme svariate ma sempre chimicamente equivalenti, dà una vulcanizzazione assolutamente superficiale, ciò che costituisce una grave inferiorità di

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Ricerche chimiche e chimico-fisiche della Società Pirelli diretto dall'autore.

N.B. — Il contenuto della presente Nota fu da me inviato all'Accademia il 14 agosto 1920 in plico suggellato; il medesimo pervenne agli uffici dell'Accademia il 16 agosto, e del deposito fu dato annunzio nel fasc. 9° dei Rendiconti, 2° sem., 1920, a pag. 303. G. B.

fronte alla vulcanizzazione a caldo in cui lo zolfo è diffuso uniformemente in tutta la massa.

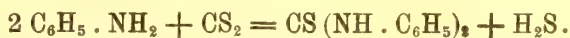
Il problema di ottenere a freddo una vulcanizzazione in cui lo zolfo sia distribuito nella massa ha una notevole importanza. Questo risultato si può ottenere coi procedimenti seguenti:

2°) Il processo recentemente brevettato dal sig. S. J. Peachey (Brev. Ingl., 129, 826 del 1919) secondo il quale si fa formare lo zolfo allo stato nascente nell'interno della massa di gomma mediante l'azione reciproca dell'idrogeno solforato sull'anidride solforosa. Questo procedimento assai ingegnoso ed interessante teoricamente, ha però l'inconveniente che nella medesima si formano, come è noto, acidi politionici che danneggiano la qualità della gomma [1].

3°) Il procedimento basato sull'impiego, in aggiunta allo zolfo, di sali metallici di certi acidi solforati, come gli alchilditiocarbammati di metalli bivalenti o trivalenti, e specialmente di zinco, secondo il brevetto da me chiesto in data 15 marzo 1919 e il completivo al medesimo chiesto il successivo 19 marzo e concessi sotto i nn. 173-322 e 173-364, vol. 496. Questo procedimento è esente degli inconvenienti presentati dai due precedenti.

Ai sunnominati si aggiunge ora il processo qui descritto. Esso consiste nel far formare nell'interno della gomma certi acceleranti della vulcanizzazione, i quali quando si originino così allo stato nascente esercitano un'azione assai più rapida che quando vengano aggiunti già formati, ed agiscono così bene anche a temperatura ordinaria.

Uno degli acceleranti più largamente usati nella pratica è la *tiocarbanilide* o difenilsolfourea. Questa sostanza si origina per azione dell'anilina sul solfuro di carbonio secondo la equazione:

$$2\,C_6H_5\,.\,NH_2 + CS_2 = CS\,(NH\,.\,C_6H_5)_2 + H_2S\,.$$

La tiocarbanilide quando è usata da sola è un accelerante assai debole; è più energica in presenza di ossido di zinco, ma per avere la vulcanizzazione si deve sempre scaldare a temperature notevolmente superiori a 100°, p. es. a 135-145° per almeno 30 e 45 minuti. L'azione accelerante è invece di gran lunga più intensa quando la reazione di formazione della tiocarbanilide si faccia avvenire nell'interno della massa. Ciò può ottenersi in due diversi modi:

a) si può mescolare alla gomma lo zolfo necessario, un ossido metallico adatto ed una quantità conveniente di anilina ed esporre la mescolanza così ottenuta all'azione dei vapori di solfuro di carbonio a temperatura ambiente;

[1] Sembra che Peachey sia ora riuscito a togliere od a neutralizzare in pratica questo inconveniente.

b) oppure si può sciogliere una mescolanza come quella sopra indicata in un solvente inerte come benzolo, benzina di petrolio, tetracloruro di carbonio o simili ed aggiungere alla soluzione ottenuta una quantità di solfuro di carbonio che rappresenti un forte eccesso su quella stechiometricamente necessaria per la reazione. Con la soluzione si preparano oggetti per immersione ed evaporazione del solvente e del solfuro di carbonio in eccesso e si abbandonano pure a temperatura ordinaria.

In entrambi i casi si ha una perfetta vulcanizzazione.

Invece della anilina si possono usare i suoi omologhi, come orto-, meta-, o para-toluidina, xilidine, od altre ammine aromatiche come α- e β- naftilammine che dànno le corrispondenti tiouree bisostituite per reazioni perfettamente analoghe.

La presenza dell'ossido metallico è necessaria per fissare l'idrogeno solforato liberato nel processo; il solfuro metallico finamente diviso così formato ha pure una parte fondamentale nel processo di vulcanizzazione.

Si ottengono con questo procedimento i vantaggi della vulcanizzazione a freddo combinati con quelli della vulcanizzazione a caldo; ossia che questa è uniforme in tutta la massa. Questo processo presenta su quello Peachey il vantaggio di evitare l'impiego di sostanze gassose acide e nocive come l'anidride solforosa e l'idrogeno solforato e la formazione di acidi politionici come prodotti secondarî della reazione. Sul processo già da me brevettato presenta il vantaggio di richiedere l'impiego di composti assai più economici.

Esempi. — Una mescolanza di:

Gomma	parti 100
Zolfo	» 8
Ossido di zinco	» 20
Anilina	» 6

viene esposta a temperatura ordinaria ai vapori di solfuro di carbonio.

Oppure: una mescolanza come sopra viene sciolta (o meglio sospesa finamente) in parti 600 di benzolo e ad essa si aggiungono parti 100 di solfuro di carbonio. La massa, o le pellicole da essa formate per immersione e successiva evaporazione, si abbandonano a temperatura ordinaria.

Riassunto. — Procedimento per vulcanizzare a freddo oggetti di gomma elastica o di mescolanze di gomma, consistente nel far formare nell'interno della massa tiocarbanilide od altre tiouree bisostituite aromatiche per azione del solfuro di carbonio, sia in soluzione, sia allo stato di vapore, sulle relative ammine aromatiche incorporate alla gomma in presenza di ossido di zinco o di altri ossidi metallici.

Appendice, 9 aprile 1921. — In una seduta della Rubber Division della 60ª Riunione della American Chemical Society tenuta a Chicago dal 6 al 10 settembre 1920, i sigg. Winfield Scott della Goodyear Tire and Rubber C°. di Akron, Ohio, e C. W. Bedford della Queker City Rubber C°.

di Philadelphia, hanno presentato una interessante comunicazione dal titolo: *Reazioni degli acceleranti durante la vulcanizzazione*, il cui testo fu pubblicato per la prima volta nel Journ. of ind. and. eng. Chem. del febbraio 1921, pag. 125 e nel The Rubber Age di New York del 10 marzo 1921. In essa descrivono, fra altro, una esperienza perfettamente analoga a quella sopra da me esposta, ma usando la piperidina anzichè l'anilina.

Mi riservo di discutere poi ampiamente le conclusioni teoriche che essi traggono per la teoria della vulcanizzazione. Mi basta per ora di dimostrare la priorità ed indipendenza delle mie osservazioni di fronte a quelle dei distinti chimici americani.

Essi non conoscono od almeno non citano i miei brevetti sui ditiocarbammati metallici, per quanto delle relative domande inglesi, n. 140,378 del 4 marzo 1920 e n. 140,388 del 5 marzo successivo siano pubblicati dei sunti sufficientemente ampî nei Chemical Abstracts della American Chemical Society, fasc. n. 14 del 20 luglio 1920, pag. 2278, e nell'India Rubber Journal del 10 luglio 1920.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sui disolfuri di tiourame come agenti di vulcanizzazione della gomma* [1]. Nota di E. Romani, presentata dal Corrisp. G. Bruni.

È noto da parecchi anni che i prodotti di addizione di basi amminiche, specialmente secondarie, con solfuro di carbonio, sono buoni acceleranti della vulcanizzazione. Così agiscono p. es. il *piperidildıtiocarbammato di piperidina* (più propriamente *ciclopentametilenditiocarbammato di piperidonio*) ed il *dimetilditiocarbammato di dimetilammonio*, brevettati dalle Farbenfabriken vorm. F. Bayer. Più tardi G. Bruni scoperse che gli *alchilditiocarbammati* di metalli, e sopratutto quelli di zinco, sono acceleranti di gran lunga più energici, in quanto agiscono in pochi minuti alle temperature comunemente usate (135°-145°) e sono anche capaci di agire a temperature assai inferiori, e fino a temperatura ordinaria (vedi brevetto italiano n. 173-322, 15 marzo 1919 e completivo n. 173-364, 19 marzo 1919).

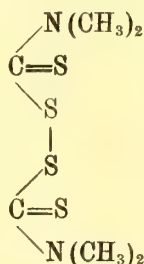
Anche queste sostanze come tutti gli acceleranti sinora proposti, o introdotti nell'uso, richiedono la presenza di zolfo libero, ossia sono solo capaci

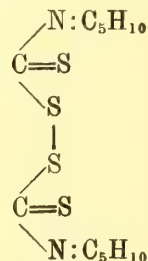
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di ricerche chimiche e chimico-fisiche della Società Italiana Pirelli, diretto dal prof. G. Bruni.

N.B. — Il contenuto della presente Nota fu inviato all'Accademia l'8 ottobre u. s. in plico suggellato raccomandato, il medesimo pervenne agli uffici dell'Accademia il 10 ottobre, e del deposito fu dato annunzio nel fasc. 9° dei Rendiconti, 2° sem., 1920, a pag. 303.

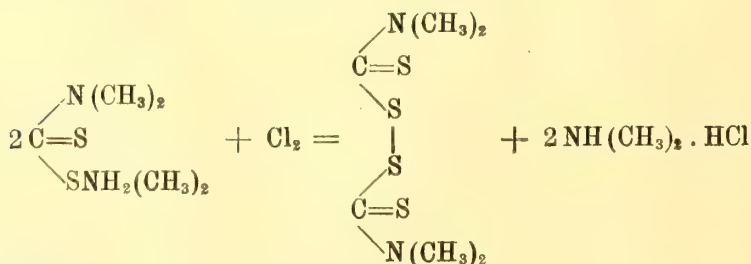
di accelerare la vulcanizzazione per opera dello zolfo. Nel caso dei ditiocarbammati di zinco lo zolfo libero presente può ridursi a piccole quantità, fino a 0,2 %, ma esso è sempre necessario; lo zolfo contenuto nella molecola di queste sostanze non è cioè capace di funzionare come zolfo di vulcanizzazione, come è stato dimostrato da numerose esperienze. Si è ora scoperto che esiste una categoria di sostanze capaci di vulcanizzare senza aggiunta di zolfo libero e contemporaneamente di dare una vulcanizzazione assai celere, che potremmo chiamare *auto-ultra-acceleranti*. Queste sostanze sono i *disolfuri di tetralchiltiourame*.

Per es. il disolfuro di tetrametiltiourame

$$\begin{array}{l} \;\diagup N(CH_3)_2 \\ C{=}S \\ \;\diagdown S \\ \quad\; | \\ \;\diagup S \\ C{=}S \\ \;\diagdown N(CH_3)_2 \end{array}$$

e il disolfuro di diciclopenta-metilentiourame:

$$\begin{array}{l} \;\diagup N{:}C_5H_{10} \\ C{=}S \\ \;\diagdown S \\ \quad\; | \\ \;\diagup S \\ C{=}S \\ \;\diagdown N{:}C_5H_{10} \end{array}$$

Essi sono delle sostanze cristalline che fondono rispettivamente a 146° e a 130° (1). Nello stesso modo si comportano i loro omologhi.

Queste sostanze si preparano con grande facilità ossidando i ditiocarbammati delle basi imminiche corrispondenti. Gli autori precedenti li prepararono facendo agire il iodio sui ditiocarbammati. Io ho trovato che il modo più rapido di agire è quello di fare passare una corrente di cloro sulla soluzione acquosa dei suddetti ditiocarbammati:

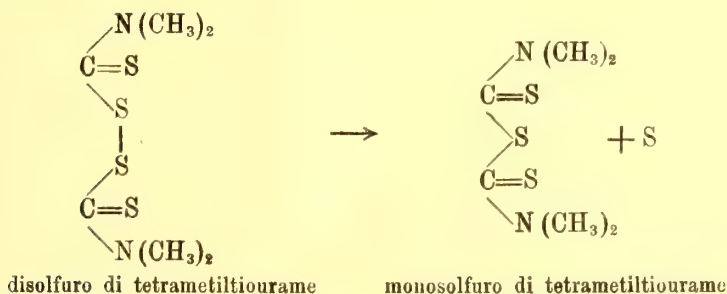
$$2\begin{array}{l} \;\diagup N(CH_3)_2 \\ C{=}S \\ \;\diagdown SNH_2(CH_3)_2 \end{array} + Cl_2 = \begin{array}{l} \;\diagup N(CH_3)_2 \\ C{=}S \\ \;\diagdown S \\ \quad\; | \\ \;\diagup S \\ C{=}S \\ \;\diagdown N(CH_3)_2 \end{array} + 2\,NH(CH_3)_2 \,.\, HCl$$

(1) Beilstein, vol. IV, pag. 13.

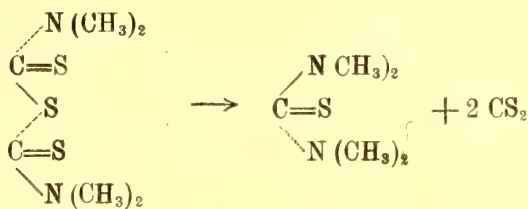
Il cloridrato si può riutilizzare per la preparazione di nuovo ditiocarbammato.

Anche con una corrente di aria si può del resto ottenere il prodotto, anzi questo si forma spontaneamente, per quanto lontanamente ed incompletamente, lasciando all'aria i ditiocarbammati delle basi imminiche. Questi composti si possono pure ottenere dai ditiocarbammati metallici, p. es. da quelli di zinco.

Il loro modo di agire consiste anzitutto in ciò che essi si scindono, eliminando zolfo libero e dando il monosolfuro corrispondente:

$$\begin{matrix} \diagup N(CH_3)_2 \\ C{=}S \\ \diagdown S \\ | \\ \diagup S \\ C{=}S \\ \diagdown N(CH_3)_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \diagup N(CH_3)_2 \\ C{=}S \\ >S \\ C{=}S \\ \diagdown N(CH_3)_2 \end{matrix} + S$$

disolfuro di tetrametiltiourame — monosolfuro di tetrametiltiourame

È anche da notare che il monosolfuro è ancora capace di scindersi in solfuro di carbonio e nella corrispondente tiourea tetra-sostituita.

$$\begin{matrix} \diagup N(CH_3)_2 \\ C{=}S \\ >S \\ C{=}S \\ \diagdown N(CH_3)_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \diagup N(CH_3)_2 \\ C{=}S \\ \diagdown N(CH_3)_2 \end{matrix} + 2\,CS_2$$

I disolfuri che si ottengono da basi primarie e dalla fenilidrazina non sono attivi, o solo in misura minima, se in assenza di zolfo libero.

Esempio del modo di operare.

Una miscela di:

Gomma	parti	100
Disolfuro di tetrametiltiourame . .	»	5
Ossido di zinco	»	5

si vulcanizza scaldando per 15 minuti a 145°. Lo zolfo che si può mettere in libertà è in proporzione di parti *0,65*. L'azione del composto è assai *più energica se si opera in presenza di certi ossidi metallici*, p. es. di ossido di magnesio o meglio ancora di *ossido di zinco*.

Beninteso si può operare con vantaggio aggiungendo anche zolfo libero in eccesso.

Appendice. 9 aprile 1921. — In una seduta della Rubber Division della 60ª Riunione della American Chemical Society tenuta a Chicago dal 6 al 10 settembre 1920 i sigg. Winfield Scott della Goodyear Tire and Rubber Co. di Akron, Ohio e C. W. Bedford della Quaker City Rubber C°. di Philadelphia, Pa. hanno presentato una comunicazione dal titolo: *Reazione degli acceleranti durante la vulcanizzazione*, in cui espongono una loro teoria secondo la quale la accelerazione sarebbe dovuta alla formazione di polisolfuri. Di tale comunicazione fu dato per la prima volta un brevissimo sunto nell'India Rubber Journal di Londra del 2 ottobre, pag. 21 e nell'India Rubber World di New York del 1° ottobre, pag. 7. In questo sunto si dice che *tiouree e ditiocarbammati si crede che formino qualche tipo di polisolfuri attraverso all'aggruppamento* C — SH, ed in esso cioè nessun accenno è fatto ai disolfuri di tiourame.

La Memoria completa è stata pubblicata nel Journ. of ind. and eng. Chem. del febbraio 1921, pag. 125 e nel The Rubber Age di New York del 10 marzo 1921, pag. 447. In essa è detto che « Tiouree, ditiocarbammati, *tiourami* e mercaptani si crede che formino polisolfuri direttamente o formando prima *disolfuri* ».

Riservandoci di discutere poi i fatti e le teorie esposti dai distinti chimici americani, mi limito per ora a far notare la indipendenza delle mie osservazioni dalle loro. In linea di fatto il mio lavoro era compiuto molto prima della riunione di Chicago e l'invio all'Accademia del relativo plico fu ritardato di due mesi dal fatto che il manoscritto relativo fu inviato per la revisione al prof. Bruni che si trovava allora in viaggio per l'Estremo Oriente.

Mi preme frattanto di rilevare che i sigg. Scott e Bedford non hanno osservato che i disolfuri di tiourame sono capaci di vulcanizzare da soli senza aggiunta di zolfo libero, ciò che costituisce la circostanza fondamentale da me scoperta.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Volterra dà il triste annunzio delle perdite fatte dall'Accademia nelle persone del Corrisp. prof. Gino Galeotti, mancato ai vivi il 6 aprile 1921, che commemora con brevi e commosse parole; e di quella del Socio straniero Riccardo Lydekker, morto sino dal 16 aprile 1915.

Lo stesso Presidente comunica i ringraziamenti trasmessi dalle famiglie dei defunti Soci Augusto Righi e Michele Rajna, per le espressioni di cordoglio ricevute dall'Accademia in occasione delle commemorazioni dei due Soci predetti.

Annuncia inoltre di aver inviato alla Società Geologica di Stoccolma, per l'occasione della celebrazione del suo cinquantenario, congratulazioni ed auguri a nome dell'Accademia.

PRESENTAZIONE di LIBRI

Il Segretario CASTELNUOVO presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci PINCHERLE e SILVESTRI, e il 1° fascicolo della pubblicazione: *Note e Memorie di matematica* del Circolo matematico di Catania, della quale ebbe a parlare nella scorsa seduta. Richiama poi l'attenzione della Classe, per la loro importanza, sopra cinque volumi delle *Opere di Leonardo Eulero*, pubblicati sotto gli auspici della Società Elvetica di scienze naturali, e sui voll. 13° e 14° delle *Opere complete di Cristiano Huygens*, offerti dalla Società Olandese delle scienze di Harlem.

AFFARI DIVERSI

Il Presidente VOLTERRA presenta le domande inviate dal Corrisp. BRUNI e dal dott. ROMANI, per l'apertura di due pieghi suggellati da essi trasmessi in addietro. I pieghi vengono aperti dal PRESIDENTE; le due Note contenute nei pieghi: *Un nuovo procedimento per vulcanizzare a freddo la gomma elastica* e *Sui disolfuri di tiurame come agenti di vulcanizzazione della gomma*, in seguito a richiesta del Corrisp. BRUNI, verranno inserite nei Rendiconti accademici [1].

[1] V. pp. 280 e 283.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 aprile 1921.

Adams H. L. — A note on the annealing of optical glass (Repr. from the « Iournal of the optical Society of America », vol. IV, pp. 213-223). Washington, 1920. 8°.

Agamennone G. — Bibliografia generale dei terremoti (Estr. dal « Bollettino della Società sismologica Italiana », vol. XXII). Modena, 1919. 8°, pp. 1-7.

Allievi L. — Théorie du Coup de Bélier traduit par Daniel Gadeu, préface de René Neeser (Texte et planches). Paris, 1921. 8°, pp. I-XV, 1-134.

Amaduzzi L. — Commemorazione di Augusto Righi (Estr. da « l'Elettrotecnica », anno VIII). Roma, 1921. 4°, pp. 1-8.

Battaglia M. — Gli emoconi (Estr. dal « Policlinico », anno 1920). Roma, 1920. 8°, pp. 1-7.

Bianchi L. — Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici e principî d'aritmetica analitica. Corso d'analisi 1920-21. Pisa, 1921. 8°, pp. I-VIII, 1-444.

Billows E. — Su la trimidite di Zovon negli Euganei. Cagliari, 1921. 12°, pp. 1-10.

Bowen N. L. — Optical properties of anthophyllite (Repr. from the « Journal of the Washington Academy of Sciences », vol. X, pp. 411-414). Washington, 1920. 8°.

Cipolla M. — Esercitazioni matematiche. Catania, 1921. 8°, pp. 1-52.

Day L. A. — Optical glass and its future as an american industry (Repr. from the « Journal of the Franklin Institute », pp. 453-472). Washington, 1920. 8°.

Foà P. — Trattato di anatomia patologica. Parte III. Torino. 1921. 8°, pp. 1-230.

Guidi C. — La trave solidale coi piedritti. Torino, 1920. 8°, pp. 1-32.

Guidi C. — Lezioni sulla scienza delle costruzioni. Parte I-V, Esercizi, Appendice. Torino, 1920. 8°, pp. I-VII, 1-150, 1-376, I, IV, 1-139, I, VIII, 1-533. 1-112. 1-206, 1-264.

Guidi C. — Sulla statica delle dighe di sbarramento per laghi artificiali (Estr. dagli « Annali del Consiglio superiore delle acque ». Roma, 1921. 8°, pp. 1-54.

Loria G. — Storia della geometria descrittiva (manuale Hoepli). Milano, 1921. 12°, pp. I-XXIV. 1-584.

Maggi G. A. — Dinamica dei sistemi. Pisa, 1921. 8°, pp. I VII, 1-408.

Micchiardi B. — La stazione radiotelegrafica di Roma-San Paolo (Estr. dal Giornale « l'Elettrotecnica », n. XIII-XIV). Milano, 1920. 4°, pp. 1-12.

Milanese S. — Ephemerides meteorologicas da Cidade de Cuyabá. Rio de Janeiro, 1919. 8°. pp. 1-107.

Morey W. G. — Classification and nomenclature of optical glass. (Repr. from the « Journal of the Optical Society of America », vol. IV, pp. 205-212). Washington. 1920. 8°.

Pearl R. — A contribution of genetics to the practical breeding of dairy cattle (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. VI, pp. 225-233). Washington, 1920. 8°.

Pearl R. — On a single numerical index of the age distribution of a population (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. IV, pp. 427-431). Washington, 1920. 8°.

Pearl R. — On the embryological basis of human mortality (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. V, pp. 593-598). Washington, 1919. 8°.

Pearl R. — Some landmarks in the history of vital statistics (Repr. from « Quarterly Pubblications of the American Statistical », pp. 221-223). Washington, 1920. 8°.

Pearl R. — The relative influence of the constitutional factor in the etiology of tuberculosis (Repr. from the « American Review of Tuberculosis », vol. IV, pp. 688-712). Washington, 1920. 8°.

Pession G. — La stazione radiotelegrafica di Roma-San Paolo (Estr. dal Giornale « l' Elettrotecnica », nn. XIII-XIV). Milano, 1919. 4°, pp. 1-12.

Re S. S. J. — El clima de Punta Arenas a través de 31 años de observaciones. Punta Arenas, 1920. 8°, pp. 1-123.

Reed J. L. — On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation (Repr. from the « Proceedings of the National Academy of Sciences », vol. VI, pp. 275-288). Washington, 1920. 8°.

Reed J. L. — The mathematics of biometry (Repr. from the « American Mathematical Monthly », vol. XXVII, pp. 409-411). Washington, 1920. 8°.

Scipioni S. — Esperienze con il concime potassico « Leucite ». Perugia. 1921. 8°, pp. 1-7.

Shepherd E. S. — Two gas collections from Manna Loa (From « Bulletin of the Hawaiian Volcano Observatory », vol. VIII). Washington, 1920. 8°, pp. 1-3.

Simpson G. C. — British antarctic expedition 1910-1913. Meteorology, vol. I, II. Calcutta, 1919. 4°, pp. I-VIII, 1-326, 1-138.

Travis Howard W. — The natural history of typhoid fever in Baltimore 1851-1919 (From the « Johns Hopkins Hospital Bulletin », vol. XXXI, pp. 275-334). Baltimore, 1920. 8°.

Vallauri G. — La stazione radiotelegrafica di Roma-San Paolo (Estr. dal Giornale « l' Elettrotecnica », 1920, nn. XIII-XIV). Milano, 1920. 4°, pp. 1-12.

Vallauri G. — Misura del campo elettromagnetico di onde R. T. transoceaniche (Estr. dal Giornale « l'Elettrotecnica », 1920, n. XVII). Milano, 1920. 4°, pp. 1-6.

Vallauri G. — Problemi relativi all'impianto delle reattanze di protezione (sistema Petersen) (Estr. dal Giornale « l' Elettrotecnica », 1920). Milano, 1920 4°, pp. 1-9.

Veress A. — Matricula et Acta Hungarorum in Universitatibus Italiae studentium, vol. I. Budapest, 1915. 8°, pp. I-XVIII, 1-344.

White W. P. — Methods of increasing the precision of thermostats (Repr. from the « Journal of the Washington Academy of Sciences », vol. X, pp. 429-432). Washington, 1920. 8°.

Williamson E. D. — A note on the annealing of optical glass (Repr. from the « Journal of the Optical Society of America », vol. IV, pp. 213-223). Washington, 1920. 8°.

Wright E. F. — Dispersion in optical glasses I and II (Repr. from the « Journal of the Optical Society of America », vol. II). Washington, 1920. 8°, pp. 1-21.

Wright E. F. — Certain relations between chemical composition and refractivity in optical glasses (Repr. from the « Journal of the American Ceramic Society », vol. III, pp. 783-832). Washington, 1920. 8°.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXX. (1892-1921). Fasc. 8°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 11°-12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 7.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 maggio 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

AFFARI DIVERSI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile*

Pubblicazione bimensile. N. 10.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXX.° — Fascicolo 10°

Seduta dell'8 maggio 1921.

1° Semestre.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCAD. NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell' 8 maggio 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica terrestre — *Sulla profondità dei ghiacciai.* Nota I del Socio Carlo Somigliana [1].

Per la valutazione della massa di un ghiacciaio è necessario conoscerne lo spessore; il quale può essere determinato direttamente mediante trapanazioni, come qualche volta fu fatto. Ma operazioni di questo genere sono così laboriose e, specialmente ora, costose che possono considerarsi come praticamente ineffettuabili, in particolar modo nella misura che sarebbe indispensabile per un rilievo completo del fondo.

Si è quindi pensato se non fosse possibile arrivare alla conoscenza dello spessore, o della profondità, di un ghiacciaio indirettamente, mediante qualche altro elemento più accessibile alle misure. Si è trovato questo elemento nella velocità superficiale. I varî strati di ghiaccio scorrono, per effetto della gravità, gli uni sopra gli altri, in modo che le velocità relative si sommano ed all'ingrosso può dirsi che la velocità risulta così massima in superficie, minima al fondo. Non si può però ammettere, come fa il signor W. Werenskiold [2], che la velocità superficiale in un punto dipenda esclusivamente dalla profondità in quel punto, cosicchè questi due elementi si possano senz'altro dedurre l'uno dall'altro.

(1) Presentata nella seduta del 3 aprile 1921.

(2) W. Werenskiold, *Die Tiefe eines Gletscher,* Zeitschrift für Gletscherkunde, Bd. IX, 1915.

La quistione va posta in modo più largo, cercando di collegare la velocità superficiale di tutti i punti di una sezione del ghiacciaio, colla curva del profilo della sezione.

È questo il problema che, per la prima volta, porremo e che è suscettibile di una soluzione perfetta e assai semplice. Cosicchè — almeno nei limiti di validità della nostra teoria — *è possibile un vero rilievo del profilo di una sezione di un ghiacciaio mediante la conoscenza esclusiva della velocità superficiale dei punti della sezione stessa.*

I.

Le equazioni del moto.

Un tale risultato presuppone naturalmente una teoria del moto di un ghiacciaio. Noi adotteremo l'ipotesi, ormai generalmente accettata, di considerare il moto del ghiacciaio come quello di un fluido vischioso pesante,

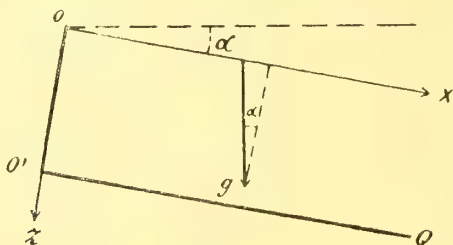



Fig. 1.

la cui compressibilità è trascurabile. Supporremo che il moto avvenga in un canale cilindrico di sezione qualsiasi; la superficie libera del ghiaccio supporremo piana e con inclinazione uguale a quella del canale.

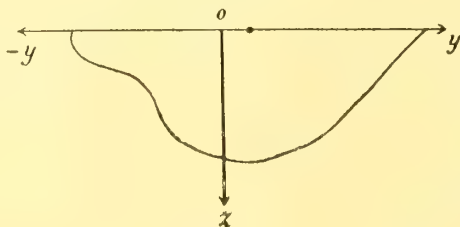



Fig. 2.

Scegliamo per origine un punto della superficie libera, per asse delle x una parallela alla direzione del canale, per asse delle y una normale che determinerà la sezione che vogliamo considerare. Sia α l'angolo d'inclinazione del canale sull'orizzonte; l'asse delle z avrà parimenti un'inclinazione α sulla verticale (fig. 1). La linea del fondo sarà una parallela ad Ox, indicata da $O'Q$. La sezione sarà una curva del piano yz, limitata superiormente da una porzione dell'asse delle y (fig. 2).

Indichiamo con u, v, w le componenti della velocità in un punto (x, y, z) ed osserviamo che nel movimento di un ghiacciaio le accelerazioni sono di un ordine di grandezza trascurabile rispetto alle velocità.

Supposto inoltre il movimento stazionario, le equazioni del moto sono [1]

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta_2 u = \mathrm{X} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \Delta_2 v = \mathrm{Y} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \Delta_2 w = \mathrm{Z}$$

ove $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ sono le componenti delle forze unitarie di massa, p la pressione idrostatica, μ il coefficiente di attrito. Per l'incompressibilità poi dovrà essere

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

Se g è l'accelerazione di gravità, ϱ la densità del ghiaccio, nel nostro caso avremo

$$\mathrm{X} = \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad \mathrm{Y} = 0 \qquad \mathrm{Z} = \varrho g \cos \alpha .$$

È naturale poi di supporre nulla la componente trasversale della velocità, cioè $v = 0$. Avremo così

$$(1) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta_2 u = \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \Delta_2 w = \varrho g \cos \alpha \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \end{gathered}$$

Dovendo limitare le nostre considerazioni ad una porzione assai breve del canale, le variazioni del moto nella direzione del canale saranno assai piccole, e potremo quindi supporre

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ,$$

Per l'ultima delle (1) dovrà essere anche $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$; ed avremo così

$$(3) \qquad u = u(y, z) \qquad w = w(y) .$$

Dalle (1) risulta allora che p deve essere lineare rispetto ad x ed a z; cioè

$$(4) \qquad p = \mathrm{A}x + \mathrm{B}z + \mathrm{C}$$

con $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ costanti. Le equazioni (1) si riducono allora alle due equazioni

$$\mu \Delta_2 u = \mathrm{A} - \varrho g \operatorname{sen} \alpha \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} (\mathrm{B} - \varrho g \cos \alpha) .$$

[1] V. Kirchhoff, *Meccanica*, Lez. XXVI, § 3.

Consideriamo ora le equazioni che devono essere soddisfatte alla superficie. Dalle formole generali per le componenti di tensione (v. Kirchhoff, loc. cit.) si ha nel nostro caso

$$X_x = Y_y = Z_z = p$$

$$Y_z = -\mu \frac{\partial w}{\partial y} \qquad Z_x = -\mu \frac{\partial u}{\partial z} \qquad X_y = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Se n è la normale interna al contorno della sezione, si ha su questo contorno $\cos(nx) = 0$ e quindi per le componenti della pressione superficiale P

$$X_n = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(nz) \right) = -\mu \frac{\partial u}{\partial n}$$

$$Y_n = p \cos(ny) - \mu \frac{\partial w}{\partial y} \cos(nz)$$

$$Z_n = p \cos(nz) - \mu \frac{\partial w}{\partial y} \cos(ny) .$$

Se P_n è la componente di P secondo la normale, si ha

$$P_n = p - 2\mu \frac{\partial w}{\partial y} \cos(ny) \cos(nz)$$

e se **S** è il vettore-spostamento superficiale, si deve avere vettorialmente, indicando ν il coefficiente d'attrito superficiale,

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_n = -\nu \mathbf{S}$$

ossia

$$X_n - P_n \cos(nx) = -\nu u$$
$$Y_n - P_n \cos(ny) = -\nu v$$
$$Z_n - P_n \cos(nz) = -\nu w .$$

Queste equazioni nel caso nostro divengono

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n} = \nu u \quad , \quad (1 - 2\cos^2(ny)) \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\mu \cos(ny)\,(1 - 2\cos^2(nz)) \frac{\partial w}{\partial y} = \nu w .$$

Alle ultime due non si può soddisfare che supponendo $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ e quindi $w = 0$ in tutto il campo. Dalle (1) segue allora

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \varrho g \cos \alpha = B$$

e resta l'unica equazione al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nu u$$

la quale, per la superficie libera, vale a dire sull'asse delle y, poichè ivi l'attrito coll'ambiente esterno si può supporre nullo, diviene

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{per } z = 0 .$$

Sulla rimanente parte del contorno, se ν fosse grandissimo, si avrebbe

$$u = 0 .$$

Ora effettivamente per quanto risulta dalle osservazioni la velocità di moto a contatto col terreno risulta estremamente piccola, almeno nei casi di non eccessiva inclinazione. Il prof. Mercanton calcola pel ghiacciaio del Rodano uno spostamento annuo sul fondo di poco più di 4 metri all'anno, vale a dire poco più di un centimetro al giorno [1]. Possiamo pertanto ritenere trascurabili, o almeno dello stesso ordine di grandezza degli errori di osservazione, questi spostamenti rispetto a quelli superficiali, che possono raggiungere anche 50 centimetri al giorno, nei nostri ghiacciai. Volendo tenerne conto si potrebbe aggiungere alla componente u una costante, supponendo il moto uguale lungo tutto il profilo della sezione. I risultati finali però subirebbero modificazioni insensibili.

Noi possiamo anche supporre che la pressione varii pochissimo nella direzione del movimento, almeno in prossimità della sezione che dobbiamo considerare e quindi si abbia nella (4) $A = 0$. La pressione si riduce alla pressione idrostatica dovuta alla gravità

$$p = z \varrho g \cos \alpha + p_0$$

ove p_0 indica la pressione atmosferica. *Delle equazioni del moto resta quindi soltanto la prima*

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \varrho g \operatorname{sen} \alpha = 0 \tag{5}$$

mentre le equazioni al contorno sono

$$(6) \qquad \begin{array}{ll} \textit{per } z = 0 & \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \textit{sul fondo} & u = 0 . \end{array}$$

[1] Commission des Glaciers de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. *Mensuration au Glacier du Rhône 1874-1915.* § 11, pag. 169.

Sono queste le equazioni sulle quali in ultima analisi dobbiamo basare le nostre considerazioni.

La equazione (5) non differisce dall'equazione che determina il movimento di un fluido vischioso pesante in tubo capillare inclinato. Questo risultato, che può sembrare a prima vista paradossale, è giustificato dal fatto che la velocità del ghiacciaio è sempre inferiore alla *velocità critica*, oltre la quale avvengono quei modi turbolenti, che rendono inapplicabile la teoria del movimento continuo dei fluidi [1].

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota V del Corrispondente Francesco Severi.

9. Al variare delle costanti $c_1, \dots, c_q$ la curva C, costruita nella nota IV [2], varia in un sistema continuo $\{C\}$. La generica curva di questo sistema, in quanto si assegnino colla loro molteplicità effettiva i suoi punti multipli, che eventualmente coincidano coi punti base del fascio $y =$ cost., definisce un sistema lineare $\infty^0 |C|$. E invero, per valori generici delle $c_1, \dots, c_q$ il gruppo dei p (o dei $p - \delta'$) punti mediante cui fu definita C, *non* sta in una serie lineare infinita d'ordine p (o $p - \delta'$). Il sistema continuo $\{C\}$ consta pertanto di ∞^q sistemi lineari distinti (il generico di questi sistemi essendo ∞^0).

D'altronde, come risulta immediatamente dal concetto di serie caratteristica di un sistema continuo (Severi, Atti R. Acc. Scienze Torino, 1904), ogni tal sistema di curve tracciate su F, non può constare di più che ∞^q sistemi lineari distinti; dunque « ogni sistema continuo completo di curve algebriche tracciate su F non può contenere più che ∞^q sistemi lineari distinti, e vi sono su F sistemi continui per cui il massimo è raggiunto ». Donde poi si deduce agevolmente (Severi, Atti Ist. Veneto, 1906) che « su F ogni sistema lineare, irriducibile o no, di caratteri virtuali (grado e genere) n, π e d'indice di specialità i, per cui sia $n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0$, appartiene ad una serie ∞^q di sistemi lineari distinti; ed anzi ogni siffatta serie, come totalità di sistemi lineari, è *individuata* da una qualunque delle sue curve »; ecc. ecc.

Tenendo infine conto del teorema di Castelnuovo, circa il massimo della deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve tracciate su F, ne segue senz'altro che:

[1] V. Boris Weinberg, *Ueber den Koefficienten der inneren Reibung des Gletschereises und seine Bedeutung für die Theorie der Gletscherbewegung.* Zeitschrift für Gletscherkunde, I Bd., 1906.

[2] Questi Rendiconti, pag. 276.

Un sistema continuo completo, tracciato su F, *la cui curva generica sia irriducibile e soddisfaccia coi suoi caratteri* n, π, i *alla diseguaglianza* $n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0$, *ha la serie caratteristica completa.*

È questo, come si sa, un importante teorema dovuto ad Enriques, il quale lo ha dato direttamente, prescindendo dalla diseguaglianza supposta sopra [1].

Dal teorema ultimamente enunciato si deduce, come facemmo per vie diverse, Castelnuovo ed io, che il numero degli integrali semplici di 1ª specie di F non è inferiore a q, donde poi, combinando coi risultati ch'io aveva in precedenza conseguiti, traemmo la conclusione che *il numero degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad* F *è* q *e che* $2q$ *è il numero*

[1] A tale diseguaglianza si può sostituire l'ipotesi che il sistema continuo $\{C\}$ consti di ∞^q sistemi lineari. Col nostro procedimento la validità del teorema concernente la completezza della serie caratteristica d'un sistema completo resta pertanto dubbia solo nel caso in cui $\{C\}$ consti di $\infty^{q'}$ sistemi lineari $(0 \leq q' < q)$. Sistemi continui siffatti possono esistere (per $q' > 0$) soltanto quando F possegga sistemi regolari d'integrali riducibili; il che non accade in generale. Questo ho creduto opportuno d'avvertire innanzi d'accennare ad un punto del procedimento geometrico con cui si dimostra la completezza della serie caratteristica, che abbisogna di qualche ulteriore indagine, la quale potrà eventualmente portare a limitazioni inessenziali, lasciando però integra la sostanza del fatto. A un certo punto del ricordato procedimento si ha da considerare, sopra un piano α, un sistema continuo completo Σ di curve C, d'ordine m, la cui generica C_0 è dotata di d nodi $P_i\,(i = 1, \ldots, d)$ e tocca in λ punti $Q_j\,(j = 1, \ldots, \lambda)$ una curva (irriducibile) K. Ogni curva di Σ infinitamente vicina a C_0 passa per P_i, Q_j e *viceversa* — si dice — ogni curva d'ordine m, infinitamente vicina a C_0, passante per P_i, Q_j, ha d nodi infinitamente vicini a quelli di C_0 e λ contatti con K infinitamente vicini ai Q_j. Ora il « viceversa » non è senz'altro lecito. Prendiamo infatti le curve d'ordine m di α come « punti » di un S_N lineare $\left(N = \dfrac{m(m+3)}{2}\right)$. Le ∞^{N-1} curve prossime a C_0, che hanno un nodo prossimo a P_i, formano allora una « falda lineare » F_i di S_N (ved. le mie citate *Vorlesungen*, pag. 314). Similmente si ha una falda lineare Φ_j costituita dalle ∞^{N-1} curve prossime a C_0 e tangenti a K in un punto dell'intorno di Q_j. L'iperpiano H_i (o I_j) tangente ad F_i (o Φ_j) nel « punto origine » C_0, è l'imagine delle ∞^{N-1} curve d'ordine m che passano per P_i (o per Q_j). Le curve d'ordine m, prossime a C_0, dotate di d nodi e λ-tangenti a K (che son poi tutte le curve di Σ prossime a C_0) son quelle comuni alle $d + \lambda$ falde F_i, Φ_j. Esse costituiscono una falda V, di origine C_0, che è pure lineare, perchè C_0, come punto generico di Σ, è semplice. Lo spazio lineare tangente a V — cioè a Σ — in C_0 è contenuto nello spazio H comune ai suddetti $d + \lambda$ iperpiani; ma — *ed è qui il punto essenziale* — non è detto che i due spazi coincidano. Non può insomma escludersi che la dimensione di Σ sia inferiore a quella del sistema lineare H delle aggiunte d'ordine m a C_0, passanti pei λ punti Q_j. Se Σ è di dimensione inferiore a quella di H, la serie caratteristica di Σ non è completa. Nè ad escluder ciò giova avvertire che C_0 è un punto semplice di Σ, perchè le $d + \lambda$ falde F_i, Φ_j potrebbero benissimo toccarsi lungo tutta la V, senza che C_0 cessasse d'esser semplice. Quel che si può affermare è che la dimensione di Σ eguaglia certo quella di H, quando i λ punti Q_j impongono condizioni indipendenti alle aggiunte d'ordine m a C_0; cioè quando la serie caratteristica di Σ è non speciale.

degl'integrali semplici di 2ª specie ed il numero dei periodi degli uni e degli altri.

10. Passerò ora a considerare i legami fra la teoria degl'integrali semplici di 1ª specie, i criterî di equivalenza per le curve tracciate sulla superficie F e la teoria della base relativa alla totalità di queste curve.

Richiamo anzitutto la forma più utile di quel teorema che ho dato altra volta sotto il nome di *teorema d'Abel sulle superficie* (Annali di Mat., 1905):

« La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema continuo di « curve algebriche C, tracciate sulla superficie F, sia contenuto totalmente « in un sistema lineare, è che la somma dei valori di ogni integrale sem- « plice di 1ª specie di F, nei punti comuni a C e ad una curva irriduci- « bile A, fissata entro un fascio lineare, resti costante al variare con- « tinuo di C ».

In particolare come curva A può assumersi la sezione della superficie F $[f(x, y, z) = 0]$ con un generico piano $y = \text{cost}$.

La ragione intima del fatto che basta la costanza delle somme fornite nel gruppo variabile (C, A) dagl'integrali semplici di 1ª specie di F, per affermare la variabilità di C in un sistema lineare, è questa: che le somme dei p integrali abeliani di 1ª specie appartenenti ad A, nei punti del gruppo (C, A), riduconsi a q linearmente indipendenti. Ciò è stato già notato da Castelnuovo, profittando del fatto che quelle p somme son integrali semplici di 1ª specie delle varietà di Picard annessa ad F.

Gioverà precisare maggiormente questo fatto, provando che di quelle p somme le $p - q$ inerenti agl'integrali abeliani di 1ª specie individuati su A delle curve del sistema aggiunto $|A'|$, son costanti (mentre le q somme date dagl'integrali di 1ª specie di F sono in generale indipendenti fra di loro). A questo scopo poniamo in modo generico:

$$u = \int \frac{\varphi(x, y, z)}{f'_z} dx, \tag{24}$$

ove $\varphi = 0$ sia una superficie d'ordine $m - 2$ aggiunta ad F e passante per la retta impropria r dei piani $y = \text{cost.}$; e indichiamo con $x_1(x_1, y, z_1)$, ..., $x_n(x_n, y, z_n)$ gli n punti d'incontro di una curva C d'ordine n, tracciata su F, col piano $y = \text{cost}$.

Fissiamo inoltre, per un determinato valor iniziale y_0 di y, cui corrispondano i punti $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ di C, i *cammini d'integrazione iniziali* $\sigma_1^{(0)}, \ldots, \sigma_n^{(0)}$ lungo cui si calcolano i valori $u(x_1^{(0)}), \ldots, u(x_n^{(0)})$ dell'integrale u, a partire da un'origine comune dei detti cammini, che sceglieremo in uno, P, dei punti base del fascio $y = \text{cost}$.

Variando y, a partire da y_0, variano con continuità i punti di diramazione della riemanniana $f(x, y, z) = 0$ (su cui si distende la funzione z di x,

riguardando y come un parametro) e vengono così definiti per continuità, a partire dai cammini iniziali, i cammini d'integrazione $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ su ciascuna sezione $y = \text{cost}$. Resterà pertanto definito, per ogni y, il valore della somma $U(y) = u(x_1) + \cdots + u(x_n)$, il quale dipenderà, in generale, oltrechè dai cammini $\sigma^{(0)}$, che si sono scelti come iniziali, anche dal cammino con cui, sul piano ove si distende la variabile complessa y, si va da y_0 al valore considerato di y. *Vediamo in che cosa consista la polidromia della funzione* $U(y)$. È a priori ben chiaro che U aumenta di un periodo di u, quando y circola; ma pel seguito ci occorre d'indagare più davvicino quali sono i valori di y attorno ai quali si produce la polidromia e come questa si produca.

Una circolazione di y, da y_0 ritornando ivi, fa ritornare in sè ogni cammino σ (o meglio lo trasforma in un cammino omologo all'iniziale) semprechè il ciclo descritto da y non contenga nel suo interno nessuno dei valori singolari, come $y = b$. Pertanto, poichè u non diviene mai identicamente infinito, comunque varî y (n. 6), U risulta funzione olomorfa di y nell'intorno di ogni valore non singolare.

In verità, se $y = \beta$ è uno dei piani $y = \text{cost}$. tangenti a C, girando attorno a β si scambiano *due* dei punti $x_1, \dots, x_n$, p. es. x_1, x_2, e si scambiano pure i cammini σ_1, σ_2. Ciò però non produce alcuna alterazione sul valore di U. Infatti, attesa la genericità degli assi coordinati, β si può supporre diverso da un valore singolare e i due punti x_1, x_2, all'inizio della circolazione di y attorno a β, possono ritenersi vicinissimi, sicchè insomma i cammini σ_1, σ_2 risultano omologhi all'inizio e quindi anche alla fine della circolazione, la quale perciò non produce che uno scambio nei primi due termini di U. Dunque U è olomorfa nell'intorno di β.

Resta da esaminare che cosa accade attorno ad un valore singolare $y = b$, relativo al punto di contatto (a, b, c) del piano tangente $y = b$. Sieno ξ_1, ξ_2 i due punti di diramazione della riemanniana $f(x, y, z) = 0$, i quali, col tendere di y a b, tendono a fondersi nel punto (a, b, c) (che diventa un punto di combaciamento di due fogli). Si avvertirà, anzitutto, che i punti ξ_1, ξ_2 connettono i medesimi due fogli della riemanniana $f(x, y, z) = 0$, perchè appunto al limite, sovrapponendosi, devono dar luogo ad un punto doppio di $f(x, b, z) = 0$. Ciò posto, se uno dei cammini d'integrazione, p. es. σ_i, incontra la linea di passaggio $\xi_1 \xi_2$, dopo la circolazione di y attorno a b, esso si muta in un cammino omologo a $\sigma_i + \tau$, ove τ è il ciclo (nullo, sulla riemanniana a 4 dimensioni imagine della superficie F), che circonda la predetta linea di passaggio. Invece i cammini σ che non incontrano tale linea di passaggio si mutano in cammini omologhi, per una circolazione di y attorno a b.

Dunque la variazione di U dipende soltanto degli eventuali cammini incontranti la linea di passaggio $\xi_1 \xi_2$. Comunque, poichè il ciclo τ, sulla

riemanniana a 2 dimensioni $f(x, y, z) = 0$, è omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei $2p$ cicli fondamentali, così in definitiva, per effetto della circolazione attorno a b, la U si altererà per un periodo $\Sigma m_i \omega_i$ di u, ove $\omega_1, \ldots, \omega_{2p}$ sono i $2p$ periodi fondamentali dell'integrale u. Si avvertirà che *gl'interi m dipendono soltanto dalla scelta dei cammini iniziali* $\sigma^{(0)}$ *e dalla natura della circolazione che si è fatta compiere ad y*.

Osservazione 1ª. — Se l'integrale u possiede un valore critico $y = \alpha$, cosicchè risulti $\varphi \equiv (y - \alpha)\psi$, $\psi = 0$ essendo un'aggiunta d'ordine $m - 3$, per $y = \alpha$ la somma U si annulla identicamente. In particolare ciò accade per $y = \infty$, quando φ, anzichè esser un'aggiunta d'ordine $m - 2$ passante per r, sia un'aggiunta d'ordine $m - 3$.

Osservazione 2ª. — Come abbiamo detto, *la* U *è funzione olomorfa di y attorno ad ogni valore non singolare*. È facile vedere ch'*essa presenta una singolarità di tipo logaritmico in un valore singolare* $y = b$. Invero, perchè in $y = b$ si abbia una singolarità di U occorre (ma neppure basta), che uno almeno dei cammini σ_i, quando si gira attorno a b, si muti in un cammino omologo a $\sigma_i + \tau$. Detto allora $u(x_i)$ il valore di u lungo il cammino σ_i e $\omega_i(y)$ il periodo di u lungo τ, verrà nell'intorno di $y = b$:

$$u(x_i) = \eta_i(y) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\omega(y)\log(y - b),$$

ove $\eta_i(y)$, $\omega(y)$ son funzioni olomorfe di y attorno ad $y = b$. Se sono λ (λ intero $\leq n$) i cicli σ_i per cui accade questo fatto, nell'intorno di b la funzione U sarà del tipo:

$$\mathrm{U} = \mathrm{H}(y) + \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{-1}}\,\omega(y)\log(y - b),$$

in cui $\mathrm{H}(y) = \Sigma\eta_i(y)$ è olomorfa nell'intorno considerato.

Osservazione 3ª. — La funzione U è una di quelle che Poincaré chiama *funzioni normali* v, relative alla curva C.

11. Supponiamo ora che la curva C sia suscettibile di variare con continuità sulla F, e sia $\bar{C}$ una curva ad essa vicinissima. Per la genericità degli assi, le C, $\bar{C}$ non contengono alcun punto singolare (punto di contatto di piani $y =$ cost.).

Si potrà sempre supporre che $\bar{C}$ sia così prossima a C, che indicate con $\bar{x}_1^{(0)}, \ldots, \bar{x}_n^{(0)}$ le intersezioni di $\bar{C}$ col piano $y = y_0$, cioè colla riemanniana $f(x, y_0, z) = 0$, rispettivamente prossime a $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, il punto $\bar{x}_i^{(0)}$ appartenga, su tale riemanniana, allo stesso foglio cui appartiene $x_i^{(0)}$. Indicheremo inoltre con $\bar{\sigma}_1^{(0)}, \ldots, \bar{\sigma}_n^{(0)}$ i cammini, vicinissimi a $\sigma_1^{(0)}, \ldots, \sigma_n^{(0)}$, che vanno da P ai punti $\bar{x}_1^{(0)}, \ldots, \bar{x}_n^{(0)}$. I cammini $\sigma_i^{(0)}, \bar{\sigma}_i^{(0)}$ saranno omologhi fra di loro.

Facendo variare y a partire da y_0 viene a definirsi, in corrispondenza alla curva $\bar{C}$, la somma $\bar{U}$ analoga ad U. Quando y compie un giro attorno al valor singolare $y = b$, $\bar{U}$, in forza del n. prec., subisce lo stesso aumento $\Sigma m_i \omega_i$ subìto da U, cosicchè la differenza $\bar{U} - U$ resta inalterata. Tale differenza è perciò funzione olomorfa di y in tutto il piano y, ivi compresi i valori singolari ed il valore $y = \infty$. Essa è perciò una costante. E sarà una costante nulla, se l'integrale u possiede un valore critico (n. 10, Oss. 1ª). In particolare questo accadrà quando u provenga da un'aggiunta di ordine $m - 3$. Possiamo concludendo enunciare:

Se C *è una curva suscettibile di variare con continuità sulla superficie* F *e* φ *è un'aggiunta d'ordine* $m - 2$ *ad* F, *passante per la retta impropria dei piani* $y = cost.$, *la somma* U *dei valori assunti dall'integrale* (24) *nei punti ove* C *sega il piano variabile* $y = cost.$, *considerata come funzione del parametro* y, *si altera per una costante additiva tutte le volte che* C *si sposta di poco nel proprio sistema continuo.*

SE φ È UN'AGGIUNTA D'ORDINE $m - 3$ AD F, LA VARIAZIONE DI U PER UN PICCOLO SPOSTAMENTO DI C, È ADDIRITTURA NULLA; *e ciò anche se lo spostamento di* C *non avviene entro un sistema lineare.*

Fisica. — *L'analogo termico dell'effetto Oersted-Ampère.* Nota II del Socio O. M. Corbino [1].

Si è visto nella Nota I sullo stesso argomento che se si attribuisce il trasporto dell'elettricità e del calore nei metalli al movimento dei soli elettroni negativi si dovrebbe poter constatare con un disco percorso da un flusso calorifico radiale e disposto normalmente a un campo magnetico, una azione di trascinamento analoga a quella manifestata dalla ruota di Barlow. Invece la teoria di Drude che spiega il trasporto del calore e della elettricità col contemporaneo movimento di ioni dei due segni prevede un'azione meccanica nulla.

Era perciò importante esaminare i risultati dell'esperienza opportunamente condotta; e poichè il fenomeno ricercato sta in relazione con le correnti circolari create per effetto del campo in un disco percorso da un flusso termico radiale, occorreva servirsi di un metallo come il bismuto che manifesta quelle correnti in misura cospicua.

All'esperienza furono date due forme concettualmente equivalenti.

In una prima attuazione, disposto un elettromagnete in modo da creare fra le masse polari un campo verticale, fu sospeso a mezzo di un filo sottile

[1] Presentata nella seduta del 7 novembre 1920.

metallico passante nel canale dell'elettromagnete un disco di bismuto orizzontale. Dal canale inferiore dell'elettromagnete sporgeva una piccola ansa di platino riscaldabile con una corrente elettrica; l'ansa era disposta vicino al centro del disco, nel quale si poteva così creare a volontà un flusso di calore radiale centrifugo. I movimenti di rotazione del disco nel suo piano intorno al filo verticale di sospensione, potevano esser constatati a mezzo di uno specchietto fissato all'equipaggio che sostiene il disco. Particolari cure vennero prese per assicurare la verticalità della direzione media del campo fra le facce polari e il parallelismo del disco alle facce medesime, cosicchè eccitando il campo a disco freddo non si avevano spostamenti sensibili nella posizione di riposo del disco.

Riscaldando il centro del disco con l'ansa, a campo eccitato, si manifestò una lieve rotazione del disco fino a una nuova posizione di equilibrio; il senso della rotazione coincideva con quello previsto sulla base dell'azione di trascinamento dovuta agli elettroni negativi. Ma il risultato ottenuto era fallace, come fu constatato con la seguente prova.

La testa del filo di sospensione poteva essere rotata progressivamente, così da dare al disco diverse posizioni di riposo iniziali. Se lo spostamento constatato riscaldando il centro fosse stato dovuto alla causa supposta, per qualunque posizione di partenza del disco esso avrebbe dovuto ruotare dal medesimo angolo e sempre nello stesso senso.

Invece si trovò che lo spostamento mutava col variare della posizione di partenza; e precisamente dando alla testa del filo delle rotazioni iniziali progressive di 0,90°, 180° e 270°, gli spostamenti prodotti dal riscaldamento mutavano di valore e di segno, così da dare, per le quattro posizioni suddette, una media sensibilmente nulla.

Evidentemente il disco non era simmetrico nella sua costituzione rispetto al centro; e non era neanche simmetrico il campo rispetto all'asse polare; le correnti termoelettriche create nel disco per il riscaldamento imprimevano ad esso un movimento corrispondente a una coppia media nulla per un giro completo. Ma l'azione ricercata era inesistente nei limiti di sensibilità della disposizione adottata.

Per eliminare tale azione perturbatrice, e creare nel sistema mobile condizioni che rendessero facile la previsione quantitativa dell'effetto cercato, si sostituì al disco un cilindro cavo, sempre di bismuto, alto cm. 2, del diametro esterno di cm. 4,6 e del diametro interno di cm. 3,5. Esso era sostenuto, con l'asse verticale, mediante una bacchettina di vetro passante per due forellini diametrali del cilindro; la bacchettina era a sua volta fissata mediante una piccola forchetta pure di vetro al filo di sospensione.

Il cilindro cavo di bismuto era circondato, a un mezzo millimetro di distanza, da un cilindro di rame coassiale, funzionante da riscaldatore esterno, in virtù di un sistema di spire in nichel-cromo isolate con mica e nelle

quali si poteva inviare una corrente elettrica. Questo cilindro riscaldatore si appoggiava sulla faccia inferiore dell'ettromagnete, formando come un involucro a temperatura costante intorno al cilindro di bismuto. Questo veniva poi raffreddato nella sua parete interna mediante una scatoletta cilindrica di rame sottile, situata a piccolissima distanza (meno di 1 mm.) e nella quale si faceva circolare acqua fredda. Le due superficie laterali del cilindro di bismuto e quella esterna del cilindro raffreddatore di rame erano coperte di nero fumo per facilitare gli scambi termici. Si potè così produrre un regolare e forte gradiente termico fra le pareti esterna ed interna del cilindro di bismuto.

Si ricercò anzitutto l'azione del campo sul cilindro a freddo, e la si constatò appena sensibile, dimostrandosi così soddisfacenti le condizioni di simmetria del cilindro nel campo e trascurabili le forze ponderomotrici dovute al diamagnetismo.

Creando poscia il gradiente termico, ed eccitando il campo nei due sensi si riscontrarono delle rotazioni lievi del cilindro, che si invertivano all' invertire del campo. Ma anche in questo caso, come in quello del disco, mutando la posizione di riposo iniziale del cilindro con lo spostare la testata superiore del filo, i movimenti riferiti, che erano del resto di piccola entità, si manifestarono mutevoli al variare della posizione di partenza: cosicchè effettuando delle letture per 24 posizioni della testa del filo angolarmente distanti di 15°, la media delle letture si trovò assai prossima a zero, e mutevole nella serie di esperienze successivamente eseguite in identiche condizioni.

Il risultato dell'esperienza può quindi considerarsi negativo.

Volendo assicurarmi che nelle condizioni indicate esistesse realmente quella corrente elettrica circolare che è il fondamento della previsione di un'azione meccanica di trascinamento, l'elettromagnete fu riportato nella posizione normale, cioè ad asse orizzontale, e il cilindro, sempre col suo asse parallelo alle linee di forza, fu sospeso a un filo verticale. Collocati come prima il cilindro riscaldatore e il raffreddatore, si cominciò a ricercare, a freddo, l'azione orientatrice nel campo dovuta al diamagnetismo; tale azione tendeva a mantenere il cilindro nella sua posizione iniziale, scelta in modo che il cilindro aveva il suo asse parallelo alle linee di forza. Sotto l'azione del campo tale posizione di riposo dovuta al diamagnetismo era così stabile che una rotazione della testata superiore del filo capace di imprimere al sistema, senza campo, uno spostamento di 330 millimetri sulla scala, determinava uno spostamento di soli 60 millimetri sotto l'azione del campo. Esisteva cioè una notevole forza direttrice dovuta al diamagnetismo. Ma facendo anche agire il riscaldamento si aggiungeva alla precedente una ulteriore forza orientatrice dovuta alla corrente circolare, cosicchè allo stesso spostamento della testata del filo corrispondeva una rotazione di soli 35 mm.

(anzichè 60) nel cilindro. Ciò dimostra l'esistenza di una corrente circolare permanente nel cilindro, dovuta al gradiente termico, mentre il riscaldamento avrebbe dovuto (se questa corrente non esistesse) far diminuire l'azione orientatrice prodotta dal diamagnetismo, a causa della nota diminuzione del diamagnetismo del bismuto in conseguenza del riscaldamento.

Si potè così stabilire che il cilindro cavo di bismuto, nelle condizioni dell'esperienza, era percorso circolarmente da una corrente totale di circa 5 centesimi di ampère.

Conosciuto il valore della corrente si può calcolare l'entità numerica dell'effetto meccanico che dovrebbe esistere in base alla ipotesi monistica. La forza elettromotrice che mette in movimento gli elettroni nel senso circolare sarà

$$X = \frac{j}{\sigma}$$

dove j è la densità della corrente circolare e σ la conducibilità del metallo. Se si hanno n elettroni per centimetro cubo, portanti ciascuno la carica e, tale forza elettromotrice che agisce su ciascun elettrone determinerà sull'insieme degli elettroni esistenti in un centimetro cubo una forza globale data da

$$F = n e X$$

la quale si trasmetterà integralmente alla materia del conduttore, mancando la controazione dovuta ai centri positivi che sono fissi, e perciò non subiscono azione da parte del campo magnetico.

Questa forza agirà tangenzialmente per ogni unità di volume dell'intero cilindro e con un braccio b pari al raggio medio del cilindro, equivalendo a una coppia di momento

$$M = X n e v b$$

dove v è il volume del cilindro.

Ora nella ipotesi monistica il prodotto ne è all'incirca eguale all'inverso del coefficiente R di Hall, che è circa 10 nel bismuto.

Si ha inoltre

$$X = \frac{j}{\sigma} = \frac{0{,}0045}{8 \times 10^{-6}}\,; \quad v = \text{cm}^3\ 14{,}3\,; \quad b = \text{cm.}\ 2\,.$$

Sostituendo si ottiene

$$M = 1600 \text{ dine-centim.}$$

E poichè il filo di sospensione reagisce con la coppia di circa 41 dine-cm. per la torsione di radiante fra i due estremi, risulta che la coppia torcente dovuta al riscaldamento avrebbe dovuto produrre una rotazione del sistema

di oltre sei giri completi. Invece l'effetto cercato, se pure esisteva, era certo inferiore a una rotazione di 2 millesimi di radiante, e quindi, sempre se esiste, inferiore a un ventimillesimo del valore previsto in base alle considerazioni precedenti.

Il risultato negativo dell'esperienza sembrerebbe pertanto inconciliabile con qualunque teoria della conducibilità elettrica e calorifica che si fondi sulla mobilità dei soli centri negativi. Esso mi ha spinto ad approfondire l'indagine sulla esistenza o meno delle correnti elettriche di origine termomagnetica, in base alla teoria di Lorentz, com'è stata completata dal Gans per il calcolo dell'effetto del campo magnetico sul flusso elettronico. Il risultato di questa nuova indagine, i cui particolari saranno esposti in una prossima Nota, è il seguente: come con la teoria di Drude, anche con la teoria di Lorentz-Gans si giustifica l'esistenza delle correnti circolari elettriche di origine termomagnetica da me osservate; ma insieme con esse si genera un flusso circolare (vorticoso) di energia termica senza differenza di temperatura lungo il cerchio, e in senso opposto al flusso elettronico. *L'azione meccanica complessiva sul disco risulta però eguale a zero*, come l'esperienza ha confermato.

Pertanto il risultato negativo dell'esperienza è giustificabile tanto con la teoria di Drude quanto con quella di Lorentz-Gans; cioè non conduce, come pareva a prima vista, alla necessità dell'esistenza di ioni mobili positivi.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Determinazioni astronomiche di latitudini e longitudini eseguite nell'Asia Centrale.* Nota di Giorgio Abetti, pres. dal Socio V. Volterra [1].

Il programma di osservazioni astronomico-geodetiche che il Comandante A. Alessio e lo scrivente dovevano svolgere durante la spedizione De-Filippi nell'Asia Centrale negli anni 1913-14 comprendeva determinazioni di coordinate astronomiche, sia per fissare punti particolarmente interessanti nelle regioni percorse, sia per stabilire, dal confronto delle coordinate astronomiche con quelle geodetiche, la deviazione della verticale in quelle stazioni nelle quali si fosse potuto effettuare il collegamento con i vertici della triangolazione indiana.

I risultati ottenuti per le latitudini e longitudini astronomiche di varie località del Baltistan, del Ladàk e del Turchestan si comunicano in questa Nota, mentre sono in corso di stampa nelle memorie della spedizione, le

[1] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

relazioni dello scrivente contenenti le osservazioni e la loro riduzione e discussione.

Le latitudini sono state determinate con un telescopio zenitale di Troughton e Simms di 63 mm. di apertura, usando il metodo di Horrebow-Talcott. Le stelle vennero scelte in massima parte dal Preliminary General Catalogue di Lewis Boss. Osservatori furono: Alessio e lo scrivente per le prime otto stazioni, il marchese Ginori e lo scrivente per le ultime tre.

Le longitudini vennero determinate mediante la telegrafia senza fili. Per accordi presi fra l'Ufficio Geodetico dell'India (Trigonometrical Survey) che ha sede in Dehra Dun, e la spedizione, segnali radiotelegrafici emessi dalla stazione radiotelegrafica militare di Lahore vennero ricevuti contemporaneamente a Dehra Dun e nelle varie stazioni della spedizione.

I segnali emessi dalla stazione di Lahore con lunghezze d'onda di 1800 e 2000 metri, mediante scintille musicali date da uno scaricatore a disco del tipo Marconi, venivano ricevuti: dalla spedizione con un aereo orizzontale della lunghezza di 180 metri e con un apparato ricevente della Regia Marina con detector a cristallo di carborundum; a Dehra con un'antenna verticale di 30 metri di altezza, con 7 fili sospesi ad « ombrello » e un apparato ricevente con detector a cristalli di bornite e zincite. Essendosi determinati gli istanti dei segnali, a Dehra e nelle stazioni della spedizione in tempo sidereo locale con osservazioni di passaggi di stelle in meridiano, le differenze di tali istanti sono le differenze di longitudine fra dette stazioni e Dehra. Da Lahore furono inviati 90 segnali per ogni sera di osservazione divisi in tre gruppi, ognuno dei quali veniva ascoltato con la cuffia telefonica da una coppia di osservatori e registrato con tasti a mano sui rispettivi cronografi sui quali venivano registrate anche le osservazioni di tempo. Queste ultime vennero eseguite a Dehra con uno strumento di passaggi presso l'Osservatorio del « Trigonometrical Survey », collegato con differenza di longitudine astronomica a Greenwich; quelle della spedizione con uno strumento dei passaggi di Troughton e Simms a canocchiale diritto con 65 mm. di apertura, montato su di un treppiede di legno e ferro. Le osservazioni di tempo vennero in generale eseguite subito dopo il tramonto del sole in due gruppi simmetricamente disposti prima e dopo i segnali radiotelegrafici e i passaggi registrati sui cronografi con tasto a mano.

Gli osservatori a Dehra furono cinque: il maggiore E. A. Tandy, il dott. J. de Graaff Hunter, il capitano (ora maggiore) K. Mason, il signor E. C. J. Bond e il sig. Hanuman Prasad, i quale si scambiarono in vario modo durante il corso delle osservazioni; per la spedizione furono: Alessio, il marchese Ginori e lo scrivente per le prime cinque stazioni, Ginori, il maggiore Wood (in una stazione) e lo scrivente per le ultime tre.

Non essendo stato possibile lo scambio degli osservatori per la eliminazione delle equazioni personali che entrano nella registrazione dei passaggi

di stelle e in quelle dei segnali, le osservazioni di tempo sono state ridotte ad un osservatore medio e tutte le differenze di longitudine ad una coppia tipo di osservatori.

Nella seguente tabella sono dati i nomi delle località dove vennero eseguite le stazioni e le latitudini φ ridotte al livello del mare [1], alla posizione media del polo con i risultati provvisorî del servizio internazionale delle latitudini [2], ed i loro errori medî. Segue nella terza colonna il numero n delle sere di osservazione ed il numero N delle coppie osservate; nella quarta le differenze di longitudine $\Delta\lambda$, fra le varie stazioni e Dehra Dun, espresse in tempo col loro errore medio; e nella quinta colonna il numero delle sere di osservazione. Nell'ultima colonna si trovano le longitudini rispetto a Greenwich, espresse in arco, avendo assunto per longitudine astronomica dello strumento dei passaggi a Dehra Dun il valore [3]:

$$78^\circ\ 2'\ 49.''01 \text{ E. Gr.}$$

Stazioni	φ	n / N	$\Delta\lambda$ Ovest di Dehra Dun	n	$\Delta\lambda$ Est di Greenwich
Tolti (Baltistan)	+35° 2′ 0.″11 ± 0.″34	3 / 10	—	—	—
Wazul Hadur (Baltistan)	+35 12 22.21 ± 0.28	2 / 4	—	—	—
Scardu (Baltistan)	+35 18 18.05 ± 0.17	5 / 16	0h 9m 37.740s ± 0.024s	6	75° 38′ 22.″92
Càrghil (Baltistan)	+34 33 38.25 ± 0.51	1 / 11	7 40.617 ± 0.028	3	76 7 39.72
Lamaiuru (Ladàk)	+34 17 4.81 ± 0.23	1 / 12	5 5.006 ± 0.039	5	76 46 33.86
Leh (Ladàk)	+34 9 54.10 ± 0.19	3 / 9	1 51.668 ± 0.020	7	77 34 53.89
Depsang (Caracorùm)	+35 17 20.77 ± 0.18	2 / 14	0 18.067 ± 0.054	5	77 58 17.85
Fronte Ghiacciaio Rimu (Caracorùm)	+35 20 48.39 ± 0.23	1 / 14	—	—	—
Sughèt Carol (Turchestan)	+36 20 54.91 ± 0.16	3 / 8	0 4.858 ± 0.044	3	78 1 36.09
Jàrcand (Turchestan)	+38 24 22.22 ± 0.31	2 / 14	3 8.202 ± 0.043	4	77 15 46.02
Càshgar (Turchestan)	+39 28 19.74 ± 0.31	2 / 13	8 14.896 ± 0.015	4	75 59 5.64

[1] W. Bowie, *Determination of time, longitude, latitude and azimuth* U. S. Coast and Geodetic Survey. Special Publication n. 14, p. 130. Washington 1913.

[2] Astr. Nachr. 4749 e 4802.

[3] J. de Graaff Hunter. *The Earth's Axes and Triangulation.* Survey of India. Professional Paper n. 16. Dehra Dun 1918. Il dato che si trova a p. 165: 628 8 piedi, equivalenti a 7.″18, deve essere corretto, secondo una comunicazione dell'autore allo scrivente in: 654.0 piedi equivalenti a 7.″46.

La precisa indicazione delle località dove venne collocato lo strumento zenitale e lo strumento dei passaggi verrà data nelle pubblicazioni della spedizione, qui basti dire che a Tolti, Scardu, Càrghil, Lamaiuru le osservazioni vennero eseguite nella immediata vicinanza dei « bungalows » che sono stazioni di tappa per i viaggiatori che attraversano quelle regioni; la latitudine di Wazul Hadur si riferisce al campo della spedizione situato nella stretta valle immediatamente sotto il passo Burgi, che porta sull'altipiano Deosei; a Leh la stazione astronomica era situata presso ai « bungalows » appartenenti alla Residenza inglese, e sull'altipiano Depsang al campo base della spedizione, a 5359 metri s. l. m., presso alla carovaniera che dal Ladàk conduce nel Turchestan; alla fronte del ghiacciaio Rimu venne fatta stazione sulla riva sinistra del fiume Sciàiok in immediata vicinanza della fronte del ghiacciaio, a m. 4912 s. l. m. A Sughét Carol le osservazioni si fecero nel vecchio forte cinese sulle rive del fiume Caracàsh; a Jàrcand nella località chiamata *Barghá* a sud-est di Kone-Shar (città vecchia); a Càshgar in un antico cimitero mussulmano situato fra i consolati inglese e russo a nord di Kone-Shar.

La situazione topografica delle varie stazioni non sembra abbia avuto alcuna notevole influenza sulle condizioni di recezione radiotelegrafica, poichè i segnali si poterono ricevere sempre anche in quelle località, come per esempio a Lamaiuru e Càrghil, le quali si trovano situate in strette e profonde valli affluenti della valle dell'Indo, fra le catene dell'Himálaia e del Caracorúm. Gli « intrusi » o « scariche » sono state invece causa di maggiore perturbazione, specialmente in estate durante la stagione dei monsoni di sud-ovest. La recezione dei segnali non venne mai del tutto impedita dalle « scariche », ma la precisione delle determinazioni restò diminuita in conseguenza del minor numero di segnali registrati e delle difficolà con cui questi si dovevano ascoltare fra le « scariche » stesse.

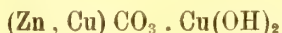
Sei delle sopra scritte stazioni si poterono da noi collegare con i vertici della triangolazione indiana e per esse verranno in seguito comunicate le deviazioni della verticale. Per le ultime tre nel Turchestan, fuori della regione coperta dalla triangolazione indiana, non esistevano finora che valori incerti delle coordinate e per le longitudini molto discordanti.

Mineralogia. — *Sulla presenza dello zinco nella malachite di Chessy* [1]. Nota di C. Perrier, presentata dal Socio E. Artini [2].

In un lavoro, pubblicato nel precedente fascicolo dei Rendiconti di questa Accademia, ho potuto dimostrare che la Rosasite, cui dal prof Lovisato era stata attribuita la formula:

$$2\,CuO\,.\,3\,CuCO_3\,.\,5\,ZnCO_3$$

era, invece, un carbonato basico di Zinco e Rame, con costituzione analoga a quella della Malachite $CuCO_3\,.\,Cu(OH)_2$, corrispondente, probabilmente, ad una formula di questo tipo:

$$(Zn\,,Cu)\,CO_3\,.\,Cu(OH)_2$$

cioè, probabilmente, un sale doppio di carbonato di zinco e di idrato di rame con una parte dello zinco, però, sostituito dal rame.

Poichè la rosasite veniva, quindi, ad aggiungersi ad un altro idrocarbonato naturale, già noto, l'auricalcite, nel quale pure una parte dello zinco è sostituito dal rame, volli vedere, data la spiccata capacità di questi due elementi di sostituirsi isomorficamente, se ed in quale misura questa sostituzione si verificasse nelle malachiti. Uno sguardo alle ormai numerose analisi di malachiti delle varie località pareva veramente rendere inutile la ricerca, perchè in nessuna di esse era mai stato trovato altro metallo all'infuori del rame, se si eccettuano un'analisi di una malachite di Phoenixville (Pensilvania) eseguita da Smith [3], che vi trovò 0,12 % di Fe_2O_3, e le due analisi eseguite da Haeye [3] sopra una malachite della miniera Reinhold Forster presso Eiserfeld, dove vi rinvenne circa lo 0,09 % di FeO.

Tuttavia, pensando che i migliorati metodi analitici avrebbero potuto mettere in evidenza quanto prima non si era potuto fare, ho preso in esame una purissima e bellissima malachite cristallizzata di Chessy, di un campione esistente in questo Museo.

Di questa località si conoscono tre analisi; una di Vauquelin [4] del 1813, un'altra di R. Phillips [4] del 1818, ed infine una terza dovuta a Berthier [4]; delle quali solo l'ultima è in buon accordo con la formula, quale risulta dagli attuali pesi atomici.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Torino diretto dal prof. F. Zambonini.

[2] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

[3] Cfr. Doelter, Handbuch d. Mineralchemie, Bd. I (1912), pp. 459 e segg.

[4] Citato secondo Doelter, loc. cit.

Il metodo analitico da me impiegato fu quello stesso già adoperato per la rosasite: l'acqua e l'anidride carbonica vennero determinate direttamente per pesata, il rame ed il piombo vennero separati elettroliticamente dalla soluzione nitrica del residuo, dopo avere eliminato per filtrazione alcuni fiocchetti di materia insolubile, e quindi dopo aver precipitato il ferro con ammoniaca si separò lo zinco come solfato zinco-ammonico e lo si pesò allo stato di pirofosfato di zinco, ottenendone, da grammi 1,1024 di malachite, ben grammi 0,0092.

I risultati analitici furono i seguenti:

		Rapporti molecolari		$CuCO_3 . Cu(OH)_2$
H_2O	8,36	1,023	1,02	8,15
CO_2	19,87	1,000	1,00	19,90
CuO	71,31	1,976	1,99	71,95
ZnO	0,45	0,012		100,00
Fe_2O_3	0,04			
PbO	tracce			
Residuo	tracce			
	100,03			

corrispondenti quindi ad una malachite tipica nella quale però una certa quantità non trascurabile, per quanto piccola, di rame, è sostituita dallo zinco.

Nessun dubbio vi poteva essere che il minerale fosse veramente malachite, perchè, oltre la provenienza ed il colore tipico, confermavano la sua natura l'esame microscopico dei frammentini ottenuti schiacciandone dei granellini fra due vetrini, frammenti che lasciavano vedere abbastanza frequenti i noti geminati secondo $\{100\}$, tabulari secondo $\{010\}$ e nei quali si osservava un angolo di estinzione di circa 23° con il seguente pleocroismo

Np = verde assai pallido
Ng = verde malachite.

Si potevano osservare, poi, mediante la linea di Becke, i seguenti indici di rifrazione

$$Np = 1,703$$
$$Ng > 1,745 .$$

Nessun dubbio, inoltre, che il prodotto formatosi fosse veramente fosfato zinco-ammonico, perchè la soluzione, da cui era stato separato il ferro ed era stata concentrata a piccolo volume, non aveva lasciato separare nulla, dopo essere stata resa fortemente ammoniacale era perfettamente incolora, mentre, se tutto il rame non fosse stato separato, avrebbe dovuto essere colorata in azzurro; ed inoltre il precipitato cristallino, ottenutosi per eli-

minazione dell'ammoniaca a bagno-maria, si mantenne perfettamente bianco dopo calcinazione di 900°.

Del resto ne controllai la natura con pochi saggi microchimici.

Il risultato ottenuto mi pare non privo di interesse, non solo perchè dimostra ormai in modo certo, che anche nelle malachiti una parte di rame può venire sostituita dallo zinco (in questo caso si avrebbe 0,65 °/₀ del composto $ZnCO_3 . Zn(OH)_2$), ma anche perchè rende sempre più probabile, data la piccola quantità di zinco presente nella malachite, che la rosasite sia veramente un sale doppio di rame e di zinco, e non una semplice miscela isomorfa dei corrispondenti composti dei due elementi.

Del resto la differenziazione della rosasite dalla malachite riesce assai netta anche al microscopio, e nel seguente prospetto ho messo a confronto i caratteri distintivi di questi due minerali quali si possono constatare, qualora si frantumino fra due vetrini dei frammenti rispettivamente di malachite e di rosasite.

Rosasite	*Malachite*
Laminucce ad estinzione sempre parallela alla direzione di allungamento con indici di rifrazione per la luce del sodio:	Laminucce parte (secondo {010}) ad estinzione inclinata di circa 23° con l'asse verticale, ed altre (secondo {001} con estinzione parallela. Nelle prime si osserva (per la luce del Na)
1,71 nella direzione di allungamento $>$ 1,745 » » ad essa normale.	$N_p = 1{,}703$ $N_g > 1{,}745$. Nelle altre ad estinzione parallela gli indici di rifrazione sono sempre $>$ 1,745.
Le laminucce mostrano quasi costantemente carattere ottico *negativo* della direzione di allungamento.	Le laminucce ad estinzione parallela, che in luce convergente lasciano vedere emergere la bisettrice di un grande angolo degli assi ottici, per essere per lo più allungate secondo x mostrano quasi sempre carattere ottico *positivo* della direzione di allungamento.
In queste lamine si ha il seguente pleocroismo: *verde azzurrino quasi incoloro* parallelamente direzione d'allungamento; *verde azzurrino* ben netto normalmente ad essa.	Nelle lamine ad estinzione parallela si ha il seguente pleocroismo: *verde malachite* $= N_g$ *giallo verdastro* $= N_m$.
Non si osservano mai geminati.	Frequentissimi i geminati secondo {100}, anche polisintetici.

Microbiologia. — *Ulteriori ricerche sull'attività proteolitica dei fermenti lattici. V: Fenomeni di mutazione fisiologica brusca* [1]. Nota di Costantino Gorini, presentata dal Socio Körner [2].

In Note precedenti [3] ho messo in luce l'influenza di varî fattori sulla attività proteolitica dei fermenti lattici; nella presente intendo dimostrare l'insorgenza di *mutazioni* di tale attività, le quali parmi si prestino altresì a nuove vedute sulla dibattuta questione delle mutazioni.

Nei trapianti settimanali in latte che vado facendo da *oltre un ventennio* sono solito osservare parecchie irregolarità nel comportamento dei fermenti lattico proteolitici. Sono irregolarità concernenti la rapidità di coagulazione, il grado di acidificazione, l'intensità di peptonizzazione ecc., le quali, in forza delle ragioni esposte nei miei lavori, sono di facile imputazione a inevitabili variazioni di tecnica, vuoi nella quantità di semente, vuoi nel calibro delle provette da cui dipende l'estensione della superficie libera della cultura e quindi l'aerobiosi, vuoi nella temperatura di incubazione, vuoi nella qualità del latte *ab origine* o in conseguenza della sterilizzazione, ecc. Trattasi però di irregolarità fluttuanti di lieve entità e, quel che più monta, mancanti di qualsiasi carattere di stabilità e nemmeno di progressione nei successivi trapianti, che possa accennare ad un principio di tramutamento foss'anche per tappe.

Qualche volta però ho assistito a fenomeni che hanno l'aspetto di vera *mutazione* nel senso classico della parola, cioè di un cambiamento brusco spontaneo e trasmissibile per ereditarietà.

Noi sappiamo che i fermenti lattico-proteolitici hanno la duplice proprietà di coagulare il latte in un primo tempo e di ridisciogliere poi gradatamente il coagulo in un secondo tempo. Orbene: culture che per parecchi anni avevano presentato il suddetto comportamento tipico, d'un tratto a un determinato trapianto hanno invece di colpo peptonificato rapidamente e completamente il latte senza previa coagulazione, a mo' dei ben noti bacilli semplicemente peptonizzanti. Il primo caso di siffatto cambiamento improvviso mi si verificò quindici anni or sono; dapprincipio sospettai di un inquinamento, ma l'esame microscopico culturale me lo fece escludere; pensai

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia dalla R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano.

[2] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

[3] Rendic. R. Acc. Lincei, ottobre 1915, novembre 1915, ottobre 1917.

poscia si trattasse di uno scarto effimero legato forse ad un'incognita particolare qualità del latte ovvero ad altra condizione non immediatamente discernibile del *modus operandi* che avesse influito disgenesicamente; ma il ripetersi del fenomeno nei successivi trapianti della cultura anomala, pur variando la qualità del latte e tutte le condizioni di tecnica (dalla dose della semente alla temperatura di incubazione), me ne dissuase. Mi accostai allora all'idea di essere in presenza di una mutazione brusca e mi limitai ad annoverare una nuova conferma della teoria del De Vries applicata al campo batteriologico.

Volli tuttavia toglier di mezzo il dubbio di mescolanze originali di razze distinte sottoponendo gli stipiti dei fermenti lattico-proteolitici a processi isolanti col metodo Burri dell'inchiostro di china a fine di disporre di culture che partissero da un'unica cellula. Contuttociò essendomi negli anni appresso sopravvenuti altri casi di siffatte mutazioni, mi proposi di approfondire le investigazioni allestendo dalla medesima cultura normale, che aveva figliato il subitaneo scarto peptonizzante, parecchi altri trapianti che misi nelle identiche condizioni del trapianto anormale; ebbene, tutti questi secondi trapianti gemelli si comportarono invece in modo regolare, mentre lo scarto perseverò a riprodursi anormale nella propria discendenza, talchè potei conservare i due tipi paralleli, considerandoli come due varietà di una sola specie: una varietà tipica coagulante-proteolitica e l'altra atipica solamente proteolitica. Siffatta constatazione valse a rivelarmi che il fenomeno della mutazione non aveva colpito *in toto* la cultura, ma si era circoscritto ad una porzione di essa; laonde mi sentii autorizzato a dedurne che le cellule di una medesima cultura possono differenziarsi fra loro a segno da determinare una mutazione brusca solamente in alcune di esse.

Un caso più recente venne a ribadirmi sempre più in questo ordine di idee. Trattasi di un caso di cangiamento in senso inverso, dirò così di una *retromutazione*: un trapianto della varietà atipica di una delle succitate specie doppie si ritrasformò di botto, dopo cinque anni, sempre per influenze inafferrabili, nella varietà tipica, persistendo tale nella discendenza; mentre altri trapianti paralleli fatti dalla medesima cultura atipica perdurarono nel loro comportamento anormale.

Cotali accertamenti mi suggerirono una interpretazione del fenomeno che si discosta da quelle addotte comunemente per spiegare le mutazioni improvvise; e poichè si tratta di *mutazioni parziali* di una cultura, non regge nemmeno la spiegazione allegata dal Preisz per riportare le mutazioni a conseguenze di condizioni disgenesiche, in cui la improvvisa comparsa di colonie con proprietà nuove non significa origine improvvisa, ma il risultato di una moltiplicazione e di una selezione elettiva di forme già esistenti in una cultura, le quali non sono dimostrabili nei trapianti in condizioni eugenesiche perchè mascherate dal fortissimo prevalere di un tipo determinato.

Nel caso presente io ravviserei invece una giustificazione sufficiente e adeguata dei mutamenti bruschi in un ragionamento come il seguente.

Il comportamento normale dei fermenti lattico-proteolitici è caratterizzato da un duplice meccanismo saccarolitico-acidificante e caseolitico-peptonizzante, per cui la caseina dapprima precipita e in seguito si solubilizza. Orbene: fra le cellule dotate di questo doppio potere è logico e fatale che, accanto a quelle le cui due facoltà sono per così dire equilibrate, ve ne siano di prevalentemente saccarolitiche e di prevalentemente caseolitiche; si può ammettere quindi che nell'ammasso di cellule costituenti la sementa vi sia di norma una specie di compensazione onde i trapianti si mantengono di regola coagulanti-peptonizzanti; ma si può ammettere altresì di incappare qualche volta in una sementa formata in grande predominio di cellule di un tipo solo, ad es. del tipo prevalentemente caseolitico e allora si spiega la comparsa repentina della varietà peptonizzante, la quale poi si trasmette per eredità nei successivi passaggi..... finchè per caso si imbatte in una sementa formata da un lotto di cellule a facoltà equilibrate e allora riappare di punto in bianco la varietà tipica.

Qui vien fatto di domandarsi se, come sorge una varietà che peptonifica senza coagulare, non possa spuntare una varietà che coagula senza peptonizzare a guisa dei fermenti lattici semplici. La risposta che desumo dalle mie osservazioni ventennali è piuttosto negativa; e ben si comprende. Nella varietà in cui la coagulazione è saltata, non è che la saccarolisi taccia del tutto; tant'è vero che il latte assume reazione acida crescente; gli è soltanto che l'azione saccarolitica è debole e tardiva rispetto alla proteolitica, cosicchè questa, prevenendo quella, spiega diffilato la propria attività sulla caseina trasformandola in paracaseina o caseone e simultaneamente solubilizzandola, prima che abbia campo di precipitare. Analogamente, nella varietà coagulante, per quanto sia energica la saccarolisi, l'attività proteolitica non è mai soppressa; può succedere solamente che essa sia procrastinata di parecchio tempo; ma in seguito, anche se la saccarolisi pronunciata desse un grado di acidificazione tale da arrestare la vita delle cellule, l'enzima proteolitico contenuto in queste abbenchè silenti o spente finisce, come pure ho dimostrato [1], col dissolvere, tosto o tardi, il coagulo.

* * *

Conclusione. — Le presenti osservazioni ventennali sopra culture sicuramente pure dimostrano:

1°) che i fermenti lattici presentano fenomeni di *mutazione* e *retromutazione brusche spontanee* e *trasmissibili*, indipendenti dalle condizioni di sviluppo, nella loro duplice attività acidificante e proteolitica;

[1] Rend. R. Acc. Lincei, settembre 1911.

2°) che questi fenomeni non colpiscono però una cultura *in toto* ma solamente frazioni di essa, di guisa che essi si prestano ad essere interpretati come semplici variazioni legate a inevitabili divergenze individuali delle cellule batteriche di una medesima specie; cosicchè dette mutazioni perderebbero il significato di anormalità, e rientrerebbero nell'orbita dei fenomeni normali, subordinati al caso fortuito di sementi costituite esclusivamente o quasi da cellule di un solo tipo.

Fisiologia. — *Contributo alla conoscenza degli enzimi.* VI: *Sul potere protettivo dell'amido e di altre sostanze sulla ptialina, in ambiente acido* [1]. Nota di D. Maestrini, presentata dal Corrispondente S. Baglioni [2].

Dalla Nota precedente [3] si rilevava che le concentrazioni di HCl, ritenute sino ad ora capaci di distruggere la ptialina [4], sono soltanto in grado, quando sia presente l'amido, di inibire temporaneamente l'azione dell'enzima. Era interessante indagare se, tra le sostanze alimentari, questa proprietà fosse soltanto dell'amido, ovvero fosse anche posseduta, ed in qual grado, dalle ordinarie sostanze proteiche e dai grassi: non meno importante era studiarne il meccanismo d'azione.

In un matraccio (A) versavo cc. 1-2 di saliva mista umana neutra, filtrata, 25 cc. di salda di amido (5 %) [5], agitavo, per qualche secondo, indi aggiungevo 25 cc. di soluzione di HCl (0,4—1,2 ‰); in un secondo matraccio (B) versavo la stessa quantità di saliva, 25 cc. di H^2O distillata neutra, agitavo, indi aggiungevo la stessa quantità di soluzione acida; in un terzo matraccio (C) versavo la stessa quantità di saliva, 25 cc. di albume di uovo (soluzione 40-50 %, in NaCl, 0,9 %), agitavo, indi aggiungevo la stessa quantità di acido (HCl, sciolto in soluzione fisiologica); in un quarto matraccio (D) la stessa quantità di saliva, 15 cc. di olio di mandorle dolci ed H^2O distillata sino al volume di 25 cc., indi la stessa quantità di acido; in un quinto matraccio (E) saliva, grasso di montone solido (4-6 gr.) ed H^2O distillata sino al volume di 25 cc. e la stessa quantità di soluzione acida; in un sesto matraccio (F) saliva, fibrina di sangue di bue, essiccata a 40° C circa (g. 2-4) ed acqua distillata sino al volume di 25 cc., agitavo, indi aggiungevo la solita quantità di soluzione acida; in un settimo matraccio (G) saliva, g. 1-2 di carbone animale ed acqua distillata sino al volume di 25 cc., agitavo, indi aggiungevo la stessa quantità di acido cloridrico.

Tutti i matracci erano tenuti a 35°-40° C. per 1-4 ore, indi i loro liquidi neutralizzati con KOH N/10, alla scorta di carta di tornasole. Dopo neutralizzazione, aggiun-

[1] Ricerche eseguite nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. S. Baglioni.

[2] Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

[3] D. Maestrini, Rendic. R. Accad. dei Lincei, Vol. XXIX, 1920.

[4] F. Kuebel, Pfluger's Arch. 1899, LXXVI, 276-305.

[5] La salda d'amido al 5 % ha un'azione protettiva maggiore che quella al 3 %, già da me altre volte usata.

gevo salda d'amido neutra al 5 % nei matracci, in cui non era stata messa in precedenza, portavo tutti allo stesso volume (cc. 100-120), con acqua distillata neutra, versavo in tutti un po' di toluolo, indi li riportavo in termostato (35-40° C.), e saggiavo il potere amilolitico di ciascuna miscela, di tanto in tanto. Ho fatto anche contemporaneamente esperienze con albume d'uovo, sciolto in acqua distillata: in tal caso nella miscela era una precipitazione più o meno abbondante di globuline.

Ho anche sperimentato separatamente sulla *ovoalbumina* e sulla *ovoglobulina*. Per dealbuminizzare, avanti la determinazione degli zuccheri riducenti, ho usato l'acido tricloracetico.

I risultati sono:

1°) la ptialina umana trova nell'amido (salda 5%) un mezzo protettivo costante ed energico contro HCl; difatti nel matraccio (A) sin dalla prima ora, dopo la neutralizzazione, si osserva un potere riducente, che va gradatamente aumentando in progresso di tempo e manca al momento della neutralizzazione;

2°) l'albume d'uovo, diluito con NaCl (0,9 %) e la fibrina di sangue di bue, non sono capaci di proteggere la ptialina, contro lo stesso acido; difatti, dopo la neutralizzazione, nelle rispettive miscele, mai appare alcun potere riducente;

3°) nella miscela con olio di mandorle dolci, dopo alcune ore dalla neutralizzazione (6-20 ore), si osserva quasi sempre un discreto potere riducente, che manca costantemente nelle prime ore;

4°) il liquido contenente il grasso di montone presenta (non costantemente) un potere amilolitico molto più lieve, e dopo un tempo maggiore dalla neutralizzazione (30-50 ore);

5°) piccole quantità di oleato di potassio (cc. 1-2), aggiunte alla miscela del matraccio (B) ne hanno eccitata l'azione amilolitica;

6°) nella miscela con albume d'uovo, diluito con acqua distillata, nelle prime ore, dopo la neutralizzazione, non si scorge alcun'azione amilolitica, ma nelle ore successive (12-14) si presenta un lieve potere riducente;

7°) anche le miscele, contenenti ovoglobulina, isolata dalla ovoalbumina, dopo tempo vario (24-80 ore), presentano un lieve potere amilolitico; mentre, entro lo stesso tempo, le miscele (B) (in cui la ptialina, prima della neutralizzazione, fu a contatto di solo acido), non mostrano alcuna azione amilolitica;

8°) la ovoalbumina, isolata dalla ovoglobulina, non possiede alcun potere protettivo contro l'acido;

9°) il carbone animale, offre alla ptialina una protezione, contro l'acido cloridrico, anche superiore a quella dell'amido

Di fronte all'amido (salda 5 %), che esercita un forte potere protettivo, abbiamo dunque da un lato due serie di sostanze alimentari, di cui l'una (fibrina di sangue di bue, albume d'uovo, sciolto in soluzione fisiologica, ed ovoalbumina) non protegge la ptialina contro l'acido cloridrico,

l'altra (olio di mandorle dolci, grasso di montone, albume d'uovo, sciolto in acqua distillata), che presenta alcuni particolari interessanti; e, dall'altro lato, una sostanza non alimentare, il carbone animale, che ha un potere protettivo superiore a quello dell'amido.

Una caratteristica comune a tutte le miscele, contenenti *la seconda serie di sostanze suddette*, è quella di presentare un'azione enzimatica molto in ritardo, rispetto a quella mostrata dalla miscela, avente amido (matraccio A). Questo fatto può avere due interpretazioni: o il potere protettivo di queste sostanze è così tenue da richiedere, dopo la neutralizzazione, un certo tempo, perchè l'azione delle minime quantita di enzima, non distrutte, possa esser messa in evidenza, con i nostri mezzi d'indagine; ovvero durante e dopo la neutralizzazione, si formano corpi speciali, capaci, entro un dato tempo, di promuovere l'amilolisi.

La prima ipotesi può spiegare il debole e tardivo potere amilolitico, che si presenta nelle miscele con ovoglobulina pura, essendo l'ovoglobulina, secondo nostre ricerche, capace di fissare piccole quantità di ptialina; con la stessa ipotesi può spiegarsi il potere amilolitico delle miscele con albume d'uovo, diluito in acqua distillata, sapendosi che in mancanza di elettroliti, le ovoglobuline si rendono libere, cioè precipitano. In questo stato esse potrebbero offrire all'enzima una lieve protezione, contro l'acido cloridrico.

La seconda ipotesi serve a spiegare sia il notevole (sebbene tardivo e non sempre costante) potere amilolitico delle miscele, contenenti olio di mandorle dolci, sia quello assai debole ed anche più tardivo ed incostante delle miscele con grasso di montone; supponendo che, durante la neutralizzazione, si formino ad es., piccole quantità di saponi (oleati e stearati di potassio) capaci, entro un determinato tempo di eccitare il potere amilolitico della saliva, abolito dall'acido.

Questa supposizione trova appoggio nel fatto che, secondo nostre ricerche, piccole quantità di oleato di potassio, eccitano il potere amilolitico della saliva umana.

È l'amido dunque, tra le sostanze esaminate, quella che più fortemente protegge la ptialina, contro l'acido cloridrico.

Intorno a questa proprietà dell'amido, si possono, come già si disse, avanzare due ipotesi: o immaginare intimi rapporti tra amido ed enzima, o tra amido ed acido. Nel secondo caso si potrebbe avere una diminuzione di acidità, nel primo si potrebbe pensare ad una vera e propria difesa.

Poichè è noto che l'ovoalbumina, in presenza di HCl, forma una combinazione chimica a caratteri abbastanza definiti, se la ptialina fosse stata favorita, nella sua resistenza, contro l'acido cloridrico, da un'eventuale combinazione cloridrica con il sostrato, avrebbe dovuto per l'appunto nell'ovoalbumina trovare il mezzo più adatto; ugualmente si sarebbe dovuto verificare nel caso della fibrina di sangue di bue: invece tanto l'ovoalbumina, quanto

la fibrina si sono mostrate assolutamente inadatte alla protezione della ptialina contro l'acido.

A lato di questi fatti abbiamo che la fibrina di sangue di bue, l'olio di mandorle dolci, ecc. non fissano neppure lievi quantità di enzima, mentre è in grandi quantità fissato dall'amido, dal carbone animale e lievemente anche dalle ovoglobuline. Sembra dunque che fissare e proteggere l'enzima dall'acido sieno, nella stessa sostanza, due proprietà parallele; e *quindi parrebbe giustificato pensare che l'amido protegga la ptialina, perchè la fissi.*

Però la ptialina è soltanto labilmente fissata dall'amido crudo e dalla salda, giacchè, mediante ripetuti lavaggi, con acqua distillata, la si può in massima parte liberare [1].

Lo stesso fatto ho notato, mescolando saliva umana con carbone animale polverizzato.

È verosimile quindi che in questa proprietà dell'amido siano in giuoco soltanto fattori fisico-chimici, che si tratti cioè di semplice adsorbimento.

Matematica. — *Transformations qui conservent la composition.* Nota di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. J'ai précédemment montré l'intérêt que présentent, pour l'étude des fonctions permutables, certaines transformations qui conservent la composition [2]. Ces transformations, que nous nommerons transformations Ω, peuvent être prises sous la forme

$$G(x,y) = \lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi\,;x,y)\, d\xi\,, \tag{1}$$

ce que nous écrirons aussi

$$G = \Omega(\lambda)\,. \tag{1'}$$

Elles font correspondre, à une fonction quelconque $\lambda(y-x)$ permutable avec l'unité, une fonction $G(x,y)$. Elles conservent la composition, c'est-à-dire que: *si* $G_1(x,y)$ *et* $G_2(x,y)$ *correspondent à* $\lambda_1(y-x)$ *et* $\lambda_2(y-x)$, $\overset{*}{G}_1 \overset{*}{G}_2$ *correspond à* $\overset{*}{\lambda}_1 \overset{*}{\lambda}_2$.

Une telle transformation fera correspondre, au groupe U des fonctions permutables avec l'unité, un groupe C de fonctions permutables entre elles.

[1] Ciò non si accorda con l'asserzione di L. Ambard a proposito dell'amilasi dell'orina, « *que l'amylase une fois fissée sur l'amidon cru y reste fissée, malgré tous les lavages* » (C. r. soc. biol., LXXXIII, 1458, 1920).

[2] Ann. Ec. Norm. Sup., 1919. Bull. Soc. Math. de France, 1919.

2. Les transformations précédentes étant déterminées, pour leurs applications (sur les quelles nous ne revenons pas), il est essentiel de résoudre la question suivante:

a) $F(x, y)$ étant une fonction donnée du premier ordre, réduite à la forme canonique, déterminer, s'il est possible, une Ω telle que $F = \Omega(1)$ [1].

3. L'expression générale du noyau $\Phi(\xi; x, y)$ des transformations Ω qui conservent la composition contient une fonction arbitraire de deux variables. Elle peut être prise sous diverses formes.

Nous avons déjà indiqué que l'on peut, sous une restriction de dérivabilité [2], poser

$$(2) \qquad \Phi(\xi; x, y) = \sum_1^\infty {}_p \int_0^\xi d\xi_p \dots \int_0^{\xi_2} d\xi_1 \, \overset{*}{G}_{\xi_1} \overset{*}{G}_{\xi_2} \dots \overset{*}{G}_{\xi_p}(x, y - \xi)$$

avec

$$(2') \qquad G_\xi(x, y) = f(x + \xi, y + \xi)$$

f étant arbitraire.

Cette forme du noyau permet la résolution immédiate du problème *a*), dans le cas où la fonction donnée $F(x, y)$ admet une dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}$ finie et continue. Il existe alors un seul des noyaux précédents tel que

$$F = \Omega(1),$$

et on l'obtient immédiatement en posant

$$(2'') \qquad f = F'' - \overset{*}{F''} \overset{*}{1} \overset{*}{F''} - \overset{*}{F''} \overset{*}{1} \overset{*}{F''} \overset{*}{1} \overset{*}{F''} - \dots$$

F'' désignant la dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}$

4. Dans le cas précédent $\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial x} \text{ finie et continue}\right)$, nous dirons la fonction $F(x, y)$ canonique *régulière*. On peut assurer que *toutes* les fonctions permutables avec elle sont données par l'expression $\Omega(\lambda)$ [3]. La forme précédente du noyau $\Phi(\xi; x, y)$ est la plus commode pour la représentation par une transformation Ω et pour l'étude du groupe des fonctions permutables avec une fonction canonique régulière.

[1] On voit immédiatement les modifications à apporter à cet énoncé lorsque $F(x, y)$ est d'ordre quelconque. La question *a*) est un cas particulier de la suivante, sur la quelle nous reviendrons: déterminer une transformation Ω telle que $F(x, y)$ appartienne au groupe C correspondant

[2] Loc. cit., Ann. Ec. Norm., pag. 41.

[3] Pour être sûr que l'on obtient ainsi *toutes* les fonctions permutables avec F il suffit de songer à l'arbitraire dont elles dépendent.

Dès que l'on cherche à passer à des cas plus généraux, il convient de voir si la formule (2) donne la forme la plus générale des noyaux $\Phi(\xi\,;x,y)$. Nous verrons que non et nous donnerons une expression tout à fait générale des noyaux Φ. Cette expression rendra intuitive la nature des transformations Ω. Dans le cas régulier, les formules obtenues semblent plus simples que les précédentes, mais on paye cette simplicité initiale au moment où l'on cherche à résoudre le problème *a*).

5. Nous emploierons une méthode indirecte. Donnons nous deux fonctions quelconques de x et de y, $m(x,y)$ et $n(x,y)$ vérifiant la relation

$$m+n+\overset{*}{m}\overset{*}{n}=0$$

l'une étant connue, l'autre en résulte:

$$n=-m+\overset{*}{m}{}^2-\overset{*}{m}{}^3+\overset{*}{m}{}^4-\cdots,$$

et l'on a, évidemment

$$(3)\qquad (\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{m})(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{n})=(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{n})(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{m})=\overset{*}{1}{}^0.$$

Envisageons la transformation

$$(4)\qquad \mathrm{G}(x,y)=(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{m})\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{n})$$

λ étant fonction de $y-x$. Elle conserve la composition, car si l'on a

$$\mathrm{G}_1=(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{m})\overset{*}{\lambda}_1(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{n})\quad,\quad \mathrm{G}_2=(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{m})\overset{*}{\lambda}_2(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{n}),$$

il en résulte, grâce à (3), $\overset{*}{\mathrm{G}}_1\overset{*}{\mathrm{G}}_2=(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{m})\overset{*}{\lambda}_1\overset{*}{\lambda}_2(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{n})$. Elle est de la forme (1), comme on le constate par un calcul simple, et l'on trouve, comme valeur correspondante du noyau

$$(5)\qquad \Phi(\xi\,;x,y)=n(x+\xi,y)+m(x,y-\xi)+\\ +\int_x^{y-\xi}m(x,\zeta)\,n(\zeta+\xi,y)\,d\zeta.$$

Nous allons voir que: *c'est là l'expression générale du noyau d'une transformation Ω conservant la composition.*

En effet nous avons déterminé précédemment [1] l'équation qui caractérise de tels noyaux. En remplaçant dans cette équation x par zéro et η par x, en posant enfin

$$\Phi(x\,;0,y)=n_0(x,y)$$

on en tire

$$\Phi(\xi\,;x,y)+\int_x^{y-\xi}n_0(x,\zeta)\,\Phi(\xi\,;\zeta,y)\,d\zeta=n_0(x+\xi,y)-n_0(x,y-\xi)$$

[1] Ann. Ec. Norm. équation (4).

d'où l'on déduit, en posant

$$m_0 = -\overset{*}{n}_0 + \overset{*}{n}_0^2 - \cdots ,$$

$$(6) \qquad \Phi(\xi\,;x\,,y) = n_0(x+\xi\,,y) + m_0(x\,,y-\xi) + \int_x^{y-\xi} m_0(x\,,\zeta)\, n_0(\zeta+\xi\,,y)\, d\zeta\,.$$

qui a justement la forme (5). Les remarques du début de ce numéro permettent d'éviter la vérification, un peu longue, qu'une telle expression satisfait l'équation caractéristique des noyaux et nous sommes certains que (5), $m(x\,,y)$ étant arbitraire, donne tous les noyaux $\Phi(\xi\,;x\,,y)$.

Il résulte aussi de ce qui précède que des fonctions m différentes peuvent conduire au même noyau Φ, c'est-à-dire à la même transformation Ω: pour obtenir, par la formule (5), *tous* ces noyaux, on peut se borner à envisager les fonctions $m_0(x\,,y)$ nulles pour $x=0$. A chacune d'elles correspondra l'un des noyaux Φ, tel que

$$\Phi(\xi\,;0\,,y) = m_0(\xi\,,y)$$

et manifestement un seul.

Il est aisé de déterminer la forme générale des fonctions m et n qui conduisent *à un même noyau* Φ: m_0 et n_0 étant un couple de telles fonctions, la transformation correspondante est

$$\Omega(\lambda) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}_0)\,\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}_0)\,.$$

Soit m et n un autre couple conduisant à la même Ω; on peut toujours déterminer μ et ν telles que

$$(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}_0)(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\mu}) \quad , \quad (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\nu})(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}_0)\,,$$

et il résulte de la formule (3) que l'on a alors: $\mu + \nu + \overset{*}{\mu}\overset{*}{\nu} = 0$. On doit avoir, quel que soit λ:

$$(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}_0)\,\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}_0) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{m}_0)(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\mu})\,\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\nu})(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{n}_0)\,,$$

d'où l'on tire aisément que ν et par conséquent μ doivent appartenir au groupe U. On obtient finalement, pour valeur générale de $n(x\,,y)$ (*conduisant à un noyau* Φ *déterminé*) l'expression

$$(7) \qquad n_0(x\,,y) + \nu(y-x) + \int_x^y \nu(\xi - x)\, n_0(\xi\,,y)\, d\xi\,,$$

$\nu(y-x)$ étant arbitraire; on a une formule analogue pour $m(x\,,y)$.

6. Examinons maintenant le problème a) du numéro 2. Etant donnée la fonction $F(x, y)$, tout revient à déterminer les fonctions n et m telles que

$$F = 1 + \overset{*}{m}\overset{*}{1} + \overset{*}{1}\overset{*}{n} + \overset{*}{m}\overset{*}{1}\overset{*}{n} . \tag{8}$$

Cette équation est de nature assez compliquée, tandis que en partant de la forme (2) du noyau, la résolution du problème a) était immédiate, en termes finis. On voit comment on perd ici, et au delà, tous les avantages de simplicité que (5) pouvait présenter sur (2).

Dans le cas où $F(x, y)$ est régulière, la résolution (en m et n) de (8) est naturellement possible: grâce à la formule (2) nous pouvons écrire immédiatement la valeur de la fonction $n(x, y)$ nulle pour $x = 0$. En nommant $n_0(x, y)$ cette fonction, il vient

$$n_0(x, y) = \Phi(x; 0, y) = \sum_1^\infty p \int_0^x d\xi_p \cdots \int_0^{\xi_2} d\xi_1 \overset{*}{G}_{\xi_1} \overset{*}{G}_{\xi_2} \cdots \overset{*}{G}_{\xi_p}(0, y - x) ,$$

en tenant compte de (2') et de (2''). La formule (7) donne alors la valeur la plus générale de n et celle de m en résulte. *Toutes les fonctions permutables avec* $F(x, y)$ *auront alors l'expression* (4).

Les transformations Ω telles que $F = \Omega(1)$ soit régulière, cest-à-dire celles qui peuvent prendre la forme (2), *sont caractérisées* par ce fait que

$$\frac{d}{dx} n(x, x + y)$$

existe et est continue (ce qui entraine la même condition avec m) [1]. Ce ne sont donc pas *les plus générales* Ω qui conservent la composition: en d'autres termes la formule (5) est un peu plus générale que (2). C'est là son véritable intérêt; nous reviendrons sur ce point dans une note prochaine.

[1] C'est, en tenant compte de (7), le résultat même du Théorème du n. 13 de mon Mémoire cité (Bull. Soc. Math. 1919). Ce théorème se trouve généralisé dans ce qui précède (n. 5), mais l'enoncé plus restreint garde son intérêt, parce qu'il caractérise le cas régulier.

G. C.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXX. (1892-1921). Fasc. 9°, Sem. 1°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 11°-12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 7.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta dell'8 maggio 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile*

Pubblicazione bimensile. N. 11.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXX.° — Fascicolo 11°

Seduta del 3 giugno 1921.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCAD. NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1921.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica terrestre. — *Sulla profondità dei ghiacciai.* Nota II del Socio CARLO SOMIGLIANA.

II.

DETERMINAZIONE DEL PROFILO.

Il problema che noi dobbiamo proporci è quello di dedurre la curva del profilo del canale glaciale, supponendo che siano noti, come dati d'osservazione, i valori della funzione u nella porzione dell'asse delle y che è compresa fra i bordi del canale. Noi supporremo che questa porzione dell'asse delle y sia limitata dai valori $y = L_0$ ed $y = L_1$.

Ora noi possiamo dimostrare che la funzione u è completamente determinata dai suoi valori u_0 sull'asse delle y fra L_0 ed L_1, valori che possiamo supporre espressi mediante una funzione $\varphi(y)$, cioè

$$u_0 = \varphi(y) \tag{7}$$

e dai valori della sua derivata normale lungo lo stesso intervallo, valori che nel nostro caso sono pure noti, in quanto sono tutti nulli per la prima delle condizioni (6). Supponiamo, per maggiore generalità, che si abbia

$$\text{per } z = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \psi(y). \tag{8}$$

Siccome la u deve essere regolare nel campo da considerarsi, essa nell'in-

torno di un punto qualunque dell'asse delle y, che possiamo senz'altro supporre sia il punto $y=0$ $z=0$, ammetterà uno sviluppo della forma solita

$$u(y\,,z)=u_0+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z+\cdots$$

Ora si può subito dimostrare che tutti i coefficienti di questo sviluppo si possono determinare mediante le (7) (8) e la equazione (5) a cui la u deve soddisfare. Da queste equazioni abbiamo infatti con semplici derivazioni

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=\varphi^{(1)}(y)\qquad\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0=\psi(y)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0=\varphi^{(2)}(y)\qquad\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\right)_0=\psi^{(1)}(y)\qquad\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0=-\varphi^{(2)}(y)-\mathrm{H}$$

ove gli apici indicano derivazioni, ed H è la costante $\varrho g \operatorname{sen}\alpha:\mu$. In modo analogo si possono calcolare i valori di tutte le altre derivate di ordine superiore, per $z=0$. Si trova

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)_0=\varphi^{(n)}(y)\qquad\left(\frac{\partial^{(m+2n)} u}{\partial y^m\,\partial z^{2n}}\right)_0=(-1)^n\,\varphi^{(m+2n)}(y)$$

$$\left(\frac{\partial^{(m+2n+1)} u}{\partial y^m\,\partial z^{2n+1}}\right)_0=(-1)^n\,\psi^{(m+2n)}(y).$$

L'unicità della funzione u che soddisfa alle condizioni stabilite è così dimostrata, poichè dallo sviluppo della funzione in un punto del campo, noi possiamo coi metodi di prolungamento delle funzioni armoniche dedurne lo sviluppo in un altro qualunque. La u differisce infatti da una funzione armonica unicamente per il termine $-\frac{1}{2}\mathrm{H}z^2$, che è nullo, insieme alla sua derivata normale, sull'asse delle y.

La funzione $\varphi(y)$ per le ipotesi fatte avrà sempre valori nulli all'estremo dell'intervallo, cioè per $y=\mathrm{L}_0$, L_1. In questi punti è nulla anche la u; perciò la curva rappresentata nel piano yz dall'equazione

$$u(y\,,z)=0$$

darà senz'altro l'equazione del profilo del canale a cagione della seconda delle equazioni (6), tutte le volte che la funzione u, in base ai dati superficiali, si potrà effettivamente costruire.

Ora questa funzione si può sempre costruire colla massima facilità mediante la funzione $\varphi(y)$ e la funzione $\Psi(y)$, quando questa non sia nulla, o non si voglia supporla tale per tener conto di qualche altro elemento.

Se $\psi(y) = 0$ basterà porre, ricordando la forma dell'integrale generale dell'equazione di Laplace con due variabili,

$$u(y, z) = \frac{1}{2}\varphi(y + iz) + \frac{1}{2}\varphi(y - iz) - \frac{1}{2}Hz^2$$

$$H = \frac{1}{\mu}\varrho g \text{ sen } \alpha \qquad i = \sqrt{-1}\,.$$

La derivata rispetto a z di questa espressione si annulla per $z = 0$.

Quando $\psi(y)$ non sia ovunque nulla basterà aggiungere alla espressione precedente la funzione

$$-\frac{i}{2}\Psi(y + iz) + \frac{i}{2}\Psi(y - iz) \quad \text{ove} \quad \Psi(y) = \int^y \psi(y)\,dy$$

che sarà pure reale, essendo, come dobbiamo supporre, $\varphi(y)$ e $\psi(y)$ reali.

L'equazione del profilo della sezione sarà quindi in generale

$$(9) \qquad \varphi(y + iz) + \varphi(y - iz) - \frac{z^2}{\mu}\varrho g \text{ sen } \alpha = 2u_f$$

indicando con u_f quella costante, sempre assai piccola che può rappresentare la velocità media di scorrimento del ghiacciaio sul fondo, e che generalmente, come già si disse, può senza errore sensibile supporsi nulla.

Se nelle equazioni precedenti che determinano u sostituiamo all'immaginario i una costante reale a, e supponiamo che la variabile z rappresenti un tempo, esse vengono a coincidere, supponendo $H = 0$, coll'equazione differenziale della corda vibrante, e cogli integrali classici di D'Alembert per questa equazione. Le funzioni $\varphi(y)$, $\psi(y)$ corrispondono allora a quelle che dànno gli spostamenti e le velocità iniziali dei punti della corda. Questa analogia dà ragione della generalità della soluzione, che abbiamo potuto costruire.

Praticamente la funzione $\varphi(y)$ non sarà altro che una espressione di interpolazione fra una serie discreta di valori per la velocità superficiale, in punti determinati dall'asse delle sezioni, nei quali sarà stata determinata la velocità mediante l'osservazione. Essa avrà ad es. la forma

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y)\,u_i$$

ove λ_i sono polinomi interi di grado n, determinati dalla formola d'interpolazione di Lagrange, $u_1, u_2, \ldots$ i valori della velocità nei punti di ascissa $y_1, y_2, \ldots, y_n$; cioè sarà

$$\lambda_i(y) = \frac{(y - y_1)\ldots(y - y_{i-1})(y - y_{i+1})\ldots(y - y_n)}{(y_i - y_2)\ldots(y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1})\ldots(y_i - y_n)}\,.$$

Si comprende perciò come aumentando il numero dei punti, nei quali si determina la velocità superficiale, si potrà raggiungere tutta l'approssimazione che si desidera nella rappresentazione della curva che rappresenta tale velocità, e quindi anche di quella che rappresenta il profilo della sezione.

In questo caso la funzione u sarà composta del termine $\frac{1}{2}Hz^2$, e di una funzione lineare di un certo numero di armoniche piane $U_1, U_2, \ldots$, di ordine pari rispetto a z, la cui forma generale, come è notissimo, è

$$U_n = \frac{1}{2}(y + iz)^n + \frac{1}{2}(y - iz)^n.$$

La soluzione così trovata del problema della determinazione del profilo della sezione è suscettibile di una generalizzazione, che può avere interesse nei casi in cui la linea libera superficiale si scosta da una linea retta. Effettivamente, se si osservano le sezioni ottenute dai rilievi, questa linea è generalmente convessa verso l'alto nella regione mediana. Volendo tener conto di questa particolarità, immaginiamo di sostituire alla retta dell'asse delle y, una circonferenza col centro in un punto qualunque, opportunamente scelto del piano yz, e prendiamo un sistema di coordinate polari ϱ, θ col polo in questo punto.

La funzione u, considerata come dipendente dalle nuove variabili, soddisferà all'equazione

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + H = 0$$

mentre sulla circonferenza superficiale dovrà essere

$$\frac{\partial u}{\partial\varrho} = 0 \quad \text{cioè per} \quad \varrho = R,$$

se R è il raggio di questa circonferenza, ed inoltre

$$u = \varphi(\theta)$$

se $\varphi(\theta)$ è la funzione che dà la velocità superficiale in questo caso. Noi possiamo costruire una funzione v di ϱ, la quale soddisfa all'equazione

$$\Delta_2 v(\varrho) + H = 0$$

ed inoltre sulla circonferenza $\varrho = R$ alle condizioni

$$v(R) = 0 \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial\varrho}\right)_R = 0.$$

Basta porre

$$-v(\varrho) = A\varrho^2 + B\lg\varrho + C$$

con

$$A = \frac{1}{4}H \qquad B = -\frac{1}{2}R^2 H \qquad C = -\frac{1}{4}HR^2 + \frac{1}{2}HR^2\lg R.$$

Questa funzione ha lo stesso ufficio della funzione $\frac{1}{2} z^2 H$ del caso precedente. Se poniamo

$$u = U(\varrho, \theta) + v(\varrho)$$

avremo per U le equazioni

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho}\right) - \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$$

ed inoltre

$$U(R, \theta) = \varphi(\theta) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)_R = 0.$$

Per considerazioni ben note avremo allora subito per questa nuova funzione l'espressione

$$U(\varrho, \theta) = \frac{1}{2} \varphi\left(\theta + i \lg \frac{\varrho}{R}\right) + \frac{1}{2} \varphi\left(\theta - i \lg \frac{\varrho}{R}\right)$$

ed avremo risoluto il problema della determinazione del profilo del fondo in modo analogo al caso precedente, quando la linea superficiale limitante superiormente la sezione del ghiacciaio sia una circonferenza, prendendo come equazione del profilo:

$$U(\varrho, \theta) + v(\varrho) = 0.$$

Questi procedimenti pel rilievo del fondo presuppongono naturalmente, per poter essere praticamente applicati, la conoscenza della costante H ossia del rapporto ϱg sen $\alpha : \mu$. Le costanti ϱ, g possono ritenersi note, l'angolo α si potrà pure dedurre con sufficiente approssimazione dai rilievi della superficie del ghiacciaio. L'elemento più incerto è il coefficiente d'attrito μ. Il sig. Weinberg (loc. cit.) ne ha tentato una determinazione diretta sperimentando sul ghiaccio del Hintereisferner ed una teorica indiretta, approfittando dei rilievi fatti sullo stesso ghiacciaio. I risultati ottenuti dànno delle medie concordanti, anzi la loro piccolissima differenza non si può attribuire che ad una accidentalità. Questi valori ad ogni modo sono

$$\mu_{teor.} = (1,67 \mp 0,95)\, 10^{13} \frac{\text{gr.}}{\text{cm. sec.}}$$

$$\mu_{sper.} = (1,74 \mp 1,10)\, 10^{13} \frac{\text{gr.}}{\text{cm. sec.}}.$$

Ci occuperemo in seguito della possibilità di calcolare il valore di μ mediante la teoria stessa che abbiamo stabilita, approfittando di alcuni casi, in cui si conosce il rilievo esatto del fondo e la velocità superficiale. È ora interessante di esaminare quale sia la forma analitica ed il significato geometrico dei risultati a cui si giunge nei casi più semplici, ammettendo cioè noti soltanto alcuni elementi della velocità superficiale. Naturalmente per un confronto colle misure di profondità, che necessariamente sono fatte verticalmente, si dovrà tener conto che la direzione delle ordinate z è inclinata di un angolo α sulla verticale.

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota VI del Corrispondente Francesco Severi.

12. Quando la curva $\bar{C}$, considerata alla fine della Nota V [1], sia una curva qualunque del sistema continuo Σ cui appartiene C, e non più una curva vicinissima, la somma $\bar{U}$ relativa a $\bar{C}$ risulterà perfettamente definita, a partire dalla somma U relativa a C, tutte le volte che, entro Σ, sia fissato il cammino ∞^1 con cui si va da C a $\bar{C}$. Invero, i cammini d'integrazione per andare da P ai punti $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ ove $\bar{C}$ sega un piano $y = \text{cost.}$, si otterranno aggiungendo ai cammini $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ quelli descritti dai punti $x_1, \dots, x_n$ di C quando C va dalla posizione iniziale a $\bar{C}$, seguendo, entro Σ, l'assegnato cammino ∞^1. Ma l'incremento costante subìto da U nel passaggio da C a $\bar{C}$ dipenderà generalmente dal cammino ∞^1 scelto entro Σ. La differenza fra due qualunque di questi incrementi sarà però un periodo di u. Sicchè possiamo dire che:

Se $C, \bar{C}$ *son due curve appartenenti su* F *al medesimo sistema continuo, le somme* $U, \bar{U}$ *dei valori assunti dall'integrale* (24) *nei punti ove* $C, \bar{C}$ *segano un piano $y = cost.$, considerate come funzioni del parametro y, differiscono per una costante additiva e per un periodo di* (24). *Quando φ sia un'aggiunta d'ordine $m - 3$, la costante additiva manca.*

Osservazione 1ª. — Se $\varphi = 0$ fosse un'aggiunta d'ordine $m - 3 + l$ $(l \geq 1)$, passante con moltiplicita l per la retta impropria dei piani $y = \text{cost.}$, si perverrebbe analogamente alla conclusione che $U - \bar{U}$ ammette in $y = \infty$ un polo d'ordine $l - 1$, mentre è olomorfa per ogni altro valore di y. Pertanto $U - \bar{U}$ *sarebbe un polinomio d'ordine* $l - 1$ in y.

Osservazione 2ª. — Se le curve $C, \bar{C}$ staccano sopra una sezione piana A, fissata nel fascio $y = \text{cost.}$, due gruppi equivalenti di punti, il valore costante, a meno dei periodi, assunto dalla differenza $U - \bar{U}$, s'annulla per ogni y, perchè ciò accade in corrispondenza a quella particolare A. Ne deriva che le $C, \bar{C}$ staccano gruppi equivalenti sopra ogni curva del fascio; e poichè trattasi di curve dello stesso ordine ed il fascio $|A|$ $(y = \text{cost.})$ è di grado > 0 e privo di curve spezzate, le $C, \bar{C}$ risultano equivalenti

[1] Questi Rendiconti, pag. 296.

(Severi, Annali di Mat., 1905). Dunque *per constatare che due curve* $C, \overline{C}$ *dello stesso sistema continuo son equivalenti, non occorre verificare che esse staccano gruppi equivalenti su tutte le curve di un fascio lineare* $|A|$, *di grado* > 0, *privo di curve spezzate, bastando per ciò ch'esse stacchino gruppi equivalenti sopra una particolare* A.

13. D'ora innanzi indicheremo con $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_q = 0$ quelle q aggiunte d'ordine $m-2$ ad F, passanti per la retta impropria r dei piani $y = \text{cost.}$, che corrispondono ai q integrali semplici di 1ª specie $I_1, \dots, I_q$ di F. Il loro sistema lineare $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_q \varphi_q = 0$ non possiede alcun valore critico, perchè i q integrali I sono indipendenti sopra ogni sezione piana $y = \text{cost.}$

Denoteremo inoltre con $\varphi_{q+1} = 0, \dots, \varphi_p = 0$ $p-q$ generiche aggiunte indipendenti d'ordine $m-3$ ad F, così che gl'integrali:

$$I_h = \int \frac{\varphi_h(x, y, z)}{f'_z} dx, (h = 1, \dots, q);$$

$$u_{q+j} = \int \frac{\varphi_{q+j}(x, y, z)}{f'_z} dx, (j = 1, \dots, p-q),$$

formeranno un sistema lineare non possedente altri valori critici che $y = \infty$ e i valori critici del sistema lineare $\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_q \varphi_q = 0$ (n. 6).

Allora le somme $U_1, \dots, U_q$ fornite dagl'integrali $I_1, \dots, I_q$ nei punti del gruppo (C, A), ove A denoti una prefissata sezione $y = \text{cost.}$, in generale varieranno, col variare di C in un sistema continuo, ed assumeranno anzi $\infty^{q'}$ gruppi di valori, se C fa parte di un sistema continuo completo costituito da $\infty^{q'}$ sistemi lineari distinti ($q' \leq q$). Invece le somme $U_{q+1}, \dots, U_p$ fornite dagl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ rimarranno sempre costanti, comunque varî C entro al proprio sistema continuo. Enuncieremo il risultato sotto la seguente forma invariantiva:

Sulla superficie F *sia* C *una curva variabile in un sistema continuo completo, costituito da* $\infty^{q'}$ *sistemi lineari* ($q' \leq q$) *ed* A *una curva irriducibile di genere* p, *atta a definire un fascio lineare di grado* > 0. *Allora le* q *somme fornite dagl'integrali semplici di* 1ª *specie di* F *nei punti del gruppo* (C, A), *al variare continuo di* C, *assumono* $\infty^{q'}$ *gruppi distinti di valori; mentre le somme fornite dai* $p-q$ *integrali abeliani di* 1ª *specie indipendenti, individuati su* A *dal proprio sistema aggiunto* $|A'|$, *restano costanti.*

Quando sia $q' < q$ (ma $q' > 0$), poichè la varietà $V_{q'}$ i cui punti rappresentano i sistemi lineari del nostro sistema continuo, è ancora, come nel caso $q' = q$, una varietà di Picard, dotata soltanto di q' integrali semplici di 1ª specie (Severi, questi Rendiconti, 1916, pag. 559), così le q somme fornite dagl'integrali semplici di 1ª specie di F, in corrispondenza alla C

del sistema, riduconsi a q' linearmente indipendenti. Vi sono cioè $q - q'$ integrali di F, che dànno somme costanti nei gruppi (C , A). In tal caso F possiede q' integrali semplici di 1ª specie riducibili, con $2q'$ periodi ridotti (ibidem, pag. 560).

14. Si presenta ora la seguente importante questione: Che cosa si può dire di due curve C_1, C_2, le quali stacchino sulla curva A, di cui sopra, due gruppi di punti (C_1, A), (C_2, A) nei quali gl'integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ dieno somme congrue rispetto ai $2p$ periodi di tali integrali?

Occorre anzitutto avvertire che, quando gl'integrali semplici di 1ª specie di F si considerano come integrali abeliani (riducibili) inerenti alla curva A, la congruenza fra le somme dei valori degl'integrali $I_1, \ldots, I_q$ nei gruppi (C_1, A), (C_2, A) può considerarsi da due punti di vista:

1) si può richieder che le somme stesse siano a due a due congruenti, assumendosi a moduli delle congruenze i $2q$ periodi primitivi (ridotti) degl'integrali $I_1, \ldots, I_q$;

2) oppure si può richiedere che quelle somme sieno congruenti ri-rispetto ai $2p$ periodi primitivi (non ridotti) degli integrali abeliani $I_1, \ldots, I_q$.

Evidentemente il secondo punto di vista è più restrittivo del primo, perchè due quantità che sieno congrue nel senso 2) lo sono anche nel senso 1); ma non, necessariamente, viceversa.

Supposto che le q coppie di somme sieno congrue nel senso 1), ho provato altrove (Rendiconti di Palermo, 1906), che, se le C_1, C_2 appartengono ad uno stesso sistema continuo, esiste un intero d tale che le due curve dC_1, dC_2 son equivalenti: $dC_1 \equiv dC_2$.

Se invece le q suddette coppie di somme son congrue nel senso 2), e le C_1, C_2 appartengono sempre ad uno stesso sistema continuo, siamo ora in grado di affermare che sarà addirittura $C_1 \equiv C_2$. Infatti, appunto perchè C_1, C_2 appartengono allo stesso sistema continuo, le somme fornite dagli integrali $u_{q+1}, \ldots, u_p$ nei gruppi (C_1, A), (C_2, A) son congrue rispetto ai $2p$ periodi primitivi di questi integrali (n. 12); e quindi, se è soddisfatta l'ipotesi 2), i due gruppi (C_1, A), (C_2, A), in virtù dell'ordinario teorema d'Abel sulle curve, son equivalenti; donde segue l'equivalenza delle C_1, C_2, in forza dell'osserv. 2ª del n. 12. Si può pertanto enunciare:

Sopra una superficie F *abbiansi due curve* C_1, C_2, *di uno stesso sistema continuo, che seghino sopra una terza curva irriducibile* A, *di genere* p, *atta a definire un fascio lineare di grado* > 0, *due gruppi di punti* (C_1, A), (C_2, A) *nei quali gl' integrali semplici di* 1ª *specie di* F, $I_1, \ldots, I_q$, *dieno somme eguali, a meno di multipli interi dei* $2q$ *periodi primitivi di* $I_1, \ldots, I_q$. *Esiste allora un intero positivo* d *tale che le curve* dC_1, dC_2 *son equivalenti. Ma se le somme stesse sono anche eguali a meno di multipli interi dei* $2p$ *periodi di* $I, \ldots I_q$, *considerati come integrali abeliani di* A, *allora le* C_1, C_2 *sono addirittura equivalenti.*

Osservazione. — Poichè d è il minimo comune multiplo dei *divisori* $d_1, \dots, d_q$ *della varietà picardiana* V_q *annessa ad* F (Severi, Rend. di Palermo, 1906), quando questa abbia i divisori eguali ad 1, risulta $d = 1$, ed allora i due modi 1) e 2) di considerare le congruenze delle solite q somme non sono in realtà diversi.

15. Innanzi di venir a parlare della questione fondamentale sollevata al principio del n. prec., convien richiamare taluni concetti, relativi ai sistemi continui di curve tracciati sulla superficie F, da me posti in precedenti lavori.

Un sistema continuo di curve algebriche C su F è sempre contenuto in un sistema algebrico $\{C\}$. Se $\{C\}$ è irriducibile, come totalità di curve, e non è contenuto in un sistema più ampio di curve dello stesso ordine, esso dicesi *completo*. Se si considerano i sistemi lineari individuati dalle C di un sistema completo, mentre accade che il generico di tali sistemi sta tutto in $\{C\}$, può darsi, per qualche particolare posizione, che il sistema $|C|$ esorbiti da $\{C\}$. Tuttavia la varietà dei sistemi lineari $|C|$ continua anche in tal caso ad esser irriducibile, prendendone come elementi i sistemi lineari. La s'indica con (C). E anche per una siffatta varietà (C) si può parlare di completezza, quando essa non sia contenuta in una varietà più ampia di sistemi lineari dello stesso ordine.

Due curve C_1, C_2 di F diconsi *algebricamente equivalenti*, e si scrive $C_1 \equiv C_2$, quando i sistemi lineari $|C_1|$, $|C_2|$ appartengono ad una medesima varietà completa (C) di sistemi lineari dello stesso ordine; oppure quando si può determinare una curva D tale che $|D + C_1|$, $|D + C_2|$ appartengano ad una medesima varietà completa $(D + C)$. Si dimostra che tale definizione equivale a ciò: che le C_1, C_2 posson considerarsi come resti di una medesima C, rispetto ad un sistema irriducibile *di curve*.

Si dirà anche in tal caso che *la curva virtuale* (Severi, Rendiconti Ist. Lombardo, 1905) $C_1 - C_2$ *è algebricamente equivalente alla curva zero:* $C_1 - C_2 \equiv 0$. Infine si dirà che più curve $C_1, \dots, C_t$ sono *algebricamente dipendenti* secondo i numeri interi $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ (dei quali alcuni positivi ed altri negativi), quando la curva virtuale $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_t C_t$ è algebricamente equivalente alla curva zero.

Ciò premesso, supponiamo che le due curve C_1, C_2 dello stesso ordine, ma delle quali non sappiamo a priori che appartengono allo stesso sistema continuo, soddisfacciano a questa condizione: che le somme $c_{q+1}, \dots, c_p$; $c'_{q+1}, \dots, c'_p$ fornite dagl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ nei punti dei gruppi (C_1, A), (C_2, A) sieno congrue rispetto ai $2p$ periodi primitivi di questi integrali; e che ciò si verifichi non soltanto per una posizione particolare di A, ma al variare di A nel proprio fascio. Consideriamo dapprima il caso generale in cui una delle curve date, p. es. C_1, sia atta a definire un sistema continuo (C_1), costituito da ∞^q sistemi lineari; e sieno $c_1, \dots, c_q$; $c'_1, \dots, c'_q$ i valori delle somme degl'integrali $I_1, \dots, I_q$ nei punti dei gruppi (C_1, A), (C_2, A).

Al variare di C_1, o meglio del sistema lineare $|C_1|$ entro (C_1), le $c_1, \dots, c_q$ assumono ∞^q gruppi di valori, incongrui, non soltanto dal punto di vista 1) del n. 14, ma anche dal punto di vista 2), perchè due gruppi di valori di $c_1, \dots, c_q$, congrui rispetto ai $2p$ periodi non ridotti degl'integrali abeliani $I_1, \dots, I_q$, non posson provenire, a cagione del teorema del n. prec., che da curve C_1 equivalenti fra loro. Vi sarà pertanto in (C_1) una curva $\overline{C}_1$ per la quale le dette somme assumeranno, a meno di multipli interi dei suddetti $2p$ periodi, i valori $c'_1, \dots, c'_q$.

Quanto alle somme degl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ nei punti del gruppo $(\overline{C}_1, A)$ esse saranno congrue a $c_{q+1}, \dots, c_p$ (n. 14) e quindi a $c'_{q+1}, \dots, c'_p$, le congruenze avendo anche qui luogo rispetto ai $2p$ periodi di $u_{q+1}, \dots, u_p$.

Ciò significa che sulla A i due gruppi $(\overline{C}_1, A)$, (C_2, A) son equivalenti fra loro e quindi che lo sono pure le curve $\overline{C}_1$, C_2, le quali staccano gruppi equivalenti sopra *ogni* curva A. Ricordando che (C_1) è individuato da uno qualunque $|C_1|$ oppure $|\overline{C}_1|$ dei suoi sistemi lineari, appunto perchè consta di ∞^q sistemi lineari distinti (Severi, questi Rend., 1916, pag. 561), ne consegue che C_2 appartiene a (C_1), cioè che $C_1 \equiv C_2$.

Consideriamo adesso il caso eccezionale in cui nè C_1, nè C_2 stanno in sistemi continui di ∞^q sistemi lineari. Assumiamo allora un sistema (D), formato da ∞^q sistemi lineari, e, fissata una curva D di questo sistema, consideriamo le curve $D + C_1$, $D + C_2$, ciascuna delle quali individua un sistema $(D + C_1)$, $(D + C_2)$, formato da ∞^q sistemi lineari distinti. Le $D + C_1$, $D + C_2$ verifican le ipotesi cui prima soddisfacevano le C_1, C_2, e si può pertanto affermare che i due sistemi $(D + C_1)$, $(D + C_2)$ coincidono e quindi, anche in tal caso, $C_1 \equiv C_2$. Riassumendo possiamo enunciare:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due curve C_1, C_2 *dello stesso ordine, tracciate sulla superficie* F, *siano algebricamente equivalenti, è che i* $p - q$ *integrali abeliani di* 1ª *specie individuati sopra una curva irriducibile* A, *di genere* p, *variabile in un fascio lineare di grado* > 0, *privo di curve spezzate, dal proprio sistema aggiunto* $|A'|$, *dieno somme congrue nei gruppi* (C_1, A), (C_2, A).

Osservazione. — I $p - q$ integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$ formano sulla curva A un sistema regolare d'integrali abeliani di 1ª specie riducibili, avente $2(p - q)$ periodi ridotti, il quale è complementare del sistema regolare di q integrali riducibili staccato su A dagl'integrali di 1ª specie di F.

Si possono perciò considerare anche qui le congruenze delle somme fornite dagl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$, nei gruppi (C_1, A), (C_2, A), dai due punti di vista indicati nel n. 14. E cioè si può porre o la condizione che le dette somme sieno congrue rispetto ai $2p$ periodi non ridotti o che lo sieno rispetto ai $2(p - q)$ periodi primitivi ridotti. Nel primo caso si cade nell'ipotesi del teorema ultimamente dimostrato; nel secondo si potrà determinare un intero λ tale che i multipli secondo λ delle somme suddette sieno congrui rispetto ai $2p$ periodi non ridotti. Ne seguirà la equivalenza algebrica delle due curve $\lambda C_1, \lambda C_2$.

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

VII.

Gruppo della Crocetta.

Raggruppo in più brevi descrizioni i cenni di varie località vicinissime fra loro, calcaree e silicee, contenenti residui di una o al più due specie di *Hexactinellide*, probabilmente una appartenente alle *Hexasterosà*, l'altra alle *Lichniscosa*, se pur la differenza dell'avere o no Lychnische non dipende dal semplice modo di conservazione. Gli uni strati e gli altri stanno nella parte media della formazione che attribuisco all'Eocene superiore, entro il sinclinale compresso e rovesciato fra l'anticlinale regolare di Granito del Sansobbia e quello localmente rovesciato e spostato del Granito di Sella Quegli strati alternano regolarmente con lenti di Serpentino, di Diabase, di Gabbro e di tufi e con sottili calcari più puri diventati parzialmente marmorei che Rovereto attribuì al Trias superiore.

In quella zona, a Montenotte Superiore, Rovereto e Parona trovarono e descrissero Radiolarie nei Diaspri ritenuti prima Permiani, poi Giuresi; questo ritrovamento indusse me a fare per quei luoghi minuziosa ricerca di altri eventuali fossili.

Palazzo Doria.

A *Lychniscosa* appartiene una specie trovata nella precedente zona, sotto Palazzo Doria, in un Calcare siliceo-quarzoso, frammentizio, simile a quello che nell'Appennino toscano chiamano Calcare screziato. Gli straterelli sono separati da veli di Sericite, raramente Clorite. Al polariscopio si scorgono appunto Calcite predominante, Opale, Quarzo, Sericite, Clorite, Apatite, Rutilo, Magnetite, Pirite, Limonite, rarissimi frammentini di Feldspato, oltre a particelle carboniose. Vene di Calcite in grossi cristalli traversano la roccia. Il reticolato dictyonale è visibile già all'esterno, come pure dopo leggera acidulazione e nelle sezioni, tanto nella parte calcitica, quanto in quella silicea.

Particelle carboniose che, come in tutti i casi precedenti, ritengo con Heckel residuo della parte organica, rivestono ordinariamente le parti quarzose del reticolo, ma in particelle isolate si trovano pure entro i cristallini del Quarzo, che perciò si potrebbe dire *affumicato*. La parte carboniosa è quasi sempre accompagnata da quella limonitica.

Sulle superfici lustrate e pulimentate il Quarzo bianco apparisce in

mezzo al Calcare più scuro come arabeschi o caratteri ebraici, ma attentamente osservato lascia trasparire l'intreccio.

Osservando all'ingrosso le sezioni più sottili non acidulate si vedono macchie circolari di Quarzo alquanto più scure in esteso ambiente calcitico, piccole macchie nere carboniose e pezze giallastre per Limonite e Clorite.

Soggettando agli acidi una superficie spianata, rimane abbondante il reticolo più grossolano convertito in moltissima parte nei soliti cristallini e fioriture già descritti di Quarzo, che liberato dai suoi rivestimenti è limpido e ialino, perciò purissimo, con inclusioni acquee e carboniose, fioriture le quali lasciano appena sospettare l'intreccio. Questo vi è perciò poco distinto e lascia trasparire al più le direzioni dei Canali acquiferi normali alla stratificazione.

In alcuni tratti, come alla Crocetta, il Quarzo apparisce invece in punti bianchi nella parte centrale delle maglie convertite in Calcite.

Quando la dissoluzione dei frammenti è completa rimangono cristallini di Quarzo ed un tenuissimo residuo carbonioso e d'idrossido di ferro che sta a lungo sospeso nel liquido.

L'intreccio si conservò meglio in alcune delle parti piritose e limonitiche ed in quelle carboniose: a volte invece la Limonite occupa la parte centrale delle maglie silicee e calcitiche. Limonite pseudomorfa o a dirittura Pirite intatta occupano talora il tubo dei Canali maggiori.

Esso intreccio, diretto in senso longitudinale, radiale e circolare, è più regolare in certi tratti, forse dalla parte esterna, ma nell'insieme è molto irregolare, prevalentemente quadrato o parallelogrammo, ma pur poligonale e triangolare per riduzione di uno dei bracci delle *Hexactiniae*. È relativamente più rado, cioè a maglie meno minute che altrove, e come negli esemplari di Campo Ligure. L'intreccio maggiore è fornito di Lychnische visibili anche a traverso il velo della Sericite la quale sembrerebbe talora avere sostituito il calcare: il canale assile è spesso visibile. Nell'interno delle maglie maggiori è talora l'intreccio microsclerico visibile specialmente dove domina la parte limonitica. Si nota qualche piastrella con maglie rotonde formate dalla espansione delle Spicole, dermale o basidictionale.

Piccole *ostia* di Epirhize in serie parallele trasversalmente allungate o leggermente oblique sulla costa degli strati stanno entro un intreccio hexactinico formato a losanga; *ostia* puntiformi, circolari probabilmente di Aporhize sono a forma di tubi con tessuto periferico radiale.

Fra i parenchimali si possono indicare *Hexactiniae* isolate, talune frammentizie forse *Pentactiniae* dermali, *Tetractiniae*, non *Scopulae* o *Clavulae*.

Fra le famiglie degli Spongiari fossili, parecchie non presentarono finora i Parenchimali fossili e sono rimaste *incertae sedis*. La nostra specie potrebbe appartenere alle *Inermia* o forse alle *Uncinataria*. Per la forma assai irregolare relativamente poco fitta dell'intreccio, e per le espansioni di varie Spicole, somiglierebbe alle *Leptophragmidae* della Creta le quali sono *Hexasterosa inermia*. Bensì per le Lychnische, per i canali contigui con

periferia radiata si ravvicinerebbe alle famiglie di *Lychniscosa*, *Lyringium* e *Ventriculites* Cretacee.

Fra gli esemplari descritti vi sarebbe affinità con quelli di San Martino, che sono più antichi; ma questi hanno le Lychnische, a quanto pare, spinose, e le Aporhize, sebbene piccole, pur di dimensioni maggiori.

Sono inclusi isolati *Amphistrongyli* monaxonici e qualche *sigma* di *Rhizomorina*. Talora compaiono pure Rhabdacloni isolati di *Megarhizidae* visibili anche sulle superfici semplicemente spianate; sono lisci, monocrepidi, con canale assile, di non piccole dimensioni, più o meno incurvati, con scarse ramificazioni non uniformi, liscie, per lo più brevi e con zygosi semplicissimi, sciolti fra loro. Le *Megarhizidae* sono solo del Giura e della Creta, non viventi.

Dal punto di vista del metamorfismo delle rocce locali è meritevole di nota la permanenza delle particelle carboniose, ritenute residuo della parte organica, perchè i metamorfismi ebbero luogo a profondità lungi dal contatto dell'aria.

Verso Rio Gea.

Al bivio sotto Palazzo Doria verso il Rio Gea nella zona degli schisti plumbei è uno schisto or quarzoso più chiaro or ferruginoso più scuro, di solito bene stratificato; ma in certi punti, soggetto a spostamenti, è diventato una specie di Galestro verdognolo con noccioletti di Quarzo. Contiene inoltre Sericite, rara Clorite, Pirite, Limonite, Rutilo, non Calcite. Contiene tracce di *Hexasterosa* frammentizia, vicina o identica a quella della Crocetta, nel Quarzo, ma specialmente nella parte ferruginosa, non nello schisto.

L'intreccio è regolare, con almeno 3 ordini di *Hexactiniae* a maglie quadrate o parallelogramme, o rotondeggianti per espansione delle Spicole alle zygosi. Le Macrosclere sono più irregolari e frammentizie senza Lychnische.

Epirhyze puntiformi contornate da giri d'intreccio a losanga, Aporhize grandi, in serie talora in mezzo ad intreccio radiale di reticolo molto sottile, oppure conformato a stella di molti raggi vuota verso i canali, con le punte dirette all'esterno.

Parallelamente alle superfici appaiono sezioni di canali cechi, talora occupati da Pirite. Oltre *Hexactiniae* isolate notansi qualche *Diactinia* e *Pentactinia*.

Potrebbe darsi che le Macrosclere mai spinose e la forma dell'intreccio raggiato intorno alle Aporhize distinguano questa *Hexasterosa* da quella della Crocetta.

Apparisce pure qualche incerta traccia di *Rhizomorina*.

Se non è per qualche piccola differenza nell'intreccio circostante alle Aporhize, ritengo si tratti della medesima *Hexasterosa* della Crocetta.

Nella compagine sono rari Rabdi di *Rhizomorinae* e Tetraxoni di *Tetractinellidae*.

Fisiologia. — *L'Anofele può propagare la malaria anche direttamente?* Nota II del Socio B. Grassi.

Del quesito, se l'Anofele può propagare la malaria direttamente, da me messo innanzi nella seduta del 2 gennaio 1921, come avevo promesso, ho tentato la soluzione con esperimenti diretti.

Finora ne ho fatti tre, che qui brevemente riassumo:

I Esperimento. — Il 10 febbraio 1921 alle ore 16 $^1/_2$ in una camera dell'Ospedale di S. Spirito riscaldata a 26°-27° C. un Anofele punse un malato non chinizzato, nel cui sangue abbondavano i parassiti della quartana per lo più ancora piccoli. Quando era presso a poco a metà del pasto, fu distaccato via e portato subito dietro l'orecchio dello studente B. F. non mai stato malarico. Si attaccò immediatamente ed ha ripreso a succhiare: rimpinzatosi, ha emessa la gocciolina rossa dall'ano e si è staccato.

II Esperimento. — Il 12 febbraio nello stesso ambiente riscaldato si è ripetuto l'esperimento, servendosi di un altro individuo, del pari non chinizzato, che presentava nel sangue piuttosto numerosi i giovani parassiti estivo-autunnali. L'esperimento è stato fatto dalle ore 17 alle ore 18. Due Anofeli, che, dopo di essersi riempiti circa a metà sul collo di questo malarico, artificialmente ne erano stati distaccati, furono applicati al collo della signora M. G. non mai stata malarica: da prima si rifiutavano di attaccarsi, ma dopo un riposo di circa 10 minuti, uno cominciò a succhiare e si riempì fino a emettere la gocciolina rossa; lo stesso fece l'altro, dopo un riposo di circa 25 minuti.

III Esperimento. — Il 14 febbraio l'esperimento si è ripetuto nelle stesse condizioni, soltanto la temperatura dell'ambiente era un po' più bassa (18° C.). Questa volta si prestò per l'esperimento il dott. G. F. non mai stato malarico; si usarono tre Anofeli: tutti e tre si attaccarono e si riattaccarono come nei precedenti esperimenti, questa volta senza alcuna difficoltà. Di questi tre Anofeli due erano magri e vuoti, il terzo magro e gonfio. I primi due una volta riempitisi fecero la gocciolina rossa prima di staccarsi dal dott. G. F.; quello gonfio prima di staccarsene, fece 3 goccioline incolori.

Gli Anofeli, di cui mi sono servito per i suddetti esperimenti, furono il giorno dopo esaminati e tutti si riscontrarono senza sporozoiti nelle ghiandole salivari.

Si può esser sicuri che in tutti e tre questi esperimenti gli Anofeli, prima di pungere la persona sana, avevano succhiato numerosi parassiti in

ambiente a temperatura abbastanza elevata. È perciò lecito di presumere che se fosse stata possibile l'inoculazione diretta, essa si sarebbe verificata; invece essa è mancata, e infatti tutti e tre gli individui sottoposti all'esperimento restarono indenni da malaria.

Io mi propongo di ritentare la prova nella stagione estiva; intanto però mi lusingo che il mio sospetto che la malaria possa propagarsi anche direttamente sia infondato.

Ringrazio il prof. A. Nazari di avere messa a mia disposizione la sua sala a S. Spirito per gli esperimenti qui sopra riferiti.

Fisiologia. — *Contributi alla fisiologia generale dei nervi e dei centri nervosi.* Memoria del Socio Aristide Stefani.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Chimica. — *Sul meccanismo di azione di certi acceleranti della vulcanizzazione della gomma elastica* [1]. Nota del Corrisp. G. Bruni e di E. Romani.

Sulla singolare azione accelerante che certe sostanze inorganiche ed organiche esercitano sulla vulcanizzazione della gomma molto si è scritto, specialmente negli ultimi due o tre anni. La prima idea fu che tale azione fosse dovuta al carattere basico delle sostanze impiegate. Infatti le sostanze inorganiche che hanno azione accelerante sono ossidi od idrossidi basici (calce, magnesia, litargirio, soda o potassa caustica). Anche le prime sostanze usate a tale scopo sono ammine o derivati di ammine. Anzi dalla Casa Bayer fu brevettato l'impiego di tutte le basi aventi una costante di dissociazione superiore a 1×10^{-8} [2].

Fu però in seguito provato che la energia delle basi non ha nessuna influenza sulla loro azione accelerante ed anzi che anche sostanze di carattere non basico possono funzionare come acceleranti. Così il sig. Peachey ha dimostrato che i nitrosoderivati aromatici sono acceleranti energici [3], anche quando non contengono radicali basici (nitrosofenolo, nitrosobenzolo) [4].

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di ricerche chimiche e chimico-fisiche della Società Italiana Pirelli, diretto dal prof. G. Bruni.

(2) D. R. P. 280.198 (1914); Brit. Pat. 12.661 (1914).

(3) Journ. Soc. Chem. Ind. *26*, 321, 424, 950 (1917); Brit. Pat. 101.819 (1917).

(4) Brit. Pat. 146 734 (1920).

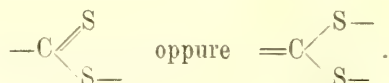
A questi corpi si debbono aggiungere gli alchilxantogenati di zinco che sono fra i più potenti acceleranti, come fu notato da Ostromisslenski [1], la cui osservazione sembra essere rimasta sconosciuta a tutti od almeno non è citata in nessuna pubblicazione posteriore.

Riassumendo gli acceleranti finora conosciuti possono essere divisi in tre categorie:

1) sostanze basiche inorganiche od organiche;

2) nitrosoderivati aromatici;

3) sostanze solforate derivanti dalla tiourea o contenenti gli aggruppamenti

$$-C\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup S}{\diagdown S-} \qquad \text{oppure} \qquad =C\genfrac{}{}{0pt}{}{\diagup S-}{\diagdown S-} \; .$$

In questa ultima categoria rientrano i ditiocarbammati sostituiti. I ditiocarbammati di basi organiche, specialmente secondarie, come dimetilammina e piperidina, furono brevettati dalla Casa Bayer [2], e da essa introdotti in commercio. Nel brevetto Bayer però questi composti si considerano solo come una combinazione per introdurre nella miscela una base liquida e volatile sotto una forma solida e non volatile, come è detto nel testo del brevetto medesimo; si ritiene quindi che essi nella vulcanizzazione liberino la base e che sia questa che agisce.

Che questo modo di concepire la loro funzione sia errato fu dimostrato da noi colla scoperta che l'attività di tali acceleranti è di gran lunga aumentata se ai ditiocarbammati delle basi amminiche si sostituiscono i ditiocarbammati di certi metalli e specialmente di zinco. Che in tali composti la parte attiva della molecola non sia quella basica, ma quella solforata, risulta fra altro dalla perfetta analogia di costituzione fra questi sali e i xantogenati di zinco trovati da Ostromisslenski:

$$\left[C\begin{matrix} \diagup NR_2 \\ = S \\ \diagdown S- \end{matrix} \right]_2 Zn \qquad\qquad \left[C\begin{matrix} \diagup OR \\ = S \\ \diagdown S- \end{matrix} \right]_2 Zn \, .$$

Fu perciò da uno di noi (Bruni) brevettato l'uso degli alchilditiocarbammati metallici come acceleranti [3].

Come acceleranti di maggiore o minore potenza possono poi funzionare derivati di sostituzione della tiourea, p. es. la monofenil- e la difeniltiourea od altri. Anche la loro azione è però grandemente aumentata dalla presenza di ossido di zinco.

(1) Giorn. Soc. Fis. Chim. Russa (1917).

(2) D. R. P. 266.619 [illegible] 269.512 (1913); Brit. Pat. 11.615 (1913).

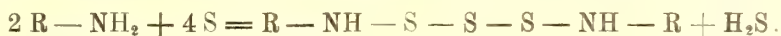
(3) Brev. Ital., nn. [illegible] e [illegible].364 (15 e 19 marzo 1919).

Resta ora da vedere quale sia il comportamento di tali composti nella mescolanza di gomma e zolfo durante la vulcanizzazione. Che essi siano dei catalizzatori nel senso stretto della parola, come è stato supposto da taluni, deve a nostro parere ritenersi escluso, essendo certo, per quanto diremo dopo, che essi subiscono modificazioni chimiche e non escono inalterati dal processo.

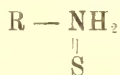
Il sig. A. Dubosc ha esposto una sua teoria (1), secondo la quale l'agente principale della accelerazione sarebbe l'acido solfocianico che si formerebbe da tutti questi composti. Questa ipotesi non può venir ammessa in linea generale, per ciò che diremo dopo ed anzitutto perchè anche composti non azotati come gli xantogenati sono acceleranti potenti; ma vedremo che derivati dell'acido isosolfocianico (senfoli) esercitano realmente una funzione preponderante in alcuni casi assai importanti.

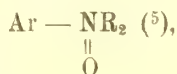
La supposizione più frequentemente emessa, e che a prima vista sembra più plausibile, è che gli acceleranti siano sostanze capaci di formare polisolfuri collo zolfo aggiunto per la vulcanizzazione e che questi polisolfuri possano cedere lo zolfo ed alternativamente riprenderlo e così via. Questa ipotesi fu avanzata in forme diverse da Ostromisslenski (2), Kratz, Flower e Coolidge (3), e da Scott e Bedford (4).

Ostromisslenski suppone che le ammine formino collo zolfo dei trisolfuri o tioozonuri secondo l'equazione:

$$2\,R-NH_2+4\,S=R-NH-S-S-S-NH-R+H_2S\,.$$

Questa formazione è puramente ipotetica, non essendo dimostrata nè la formazione dell'idrogeno solforato, nè quella dei tioozonuri.

Kratz, Flower e Coolidge attribuiscono l'azione delle ammine alla formazione di composti:

$$\begin{array}{c} R-NH_2 \\ \| \\ S \end{array}$$

che potrebbero cedere lo zolfo alla gomma e ricostituirsi alternativamente. Anche tali composti sono puramente ipotetici. Gli unici composti che avrebbero qualche analogia con questi sarebbero gli ossidi delle ammine terziarie grasso-aromatiche

$$\begin{array}{c} Ar-NR_2 \\ \| \\ O \end{array} \ (^5),$$

(1) The India-Rubber World, *59*, 248 (1919).
(2) Giorn. Soc. Fis. Chim. Russa, *47*, 1892 (1915).
(3) Journ. Ind. Eng. Chem., *12*, 317 (1920).
(4) Journ. Ind. Eng. Chem. *12*, 31 (1920); The Rubber Age, 10 marzo 1921.
(5) È vero che, come mi fa osservare il prof. Angeli, alcune reazioni della fenil-

Assai più plausibile è la supposizione di Scott e Bedford, secondo i quali le ammine darebbero dei polisolfuri di ammonii sostituiti del tipo solito, i quali potrebbero alternativamente distruggersi e ricomporsi. La parte più importante dell'ultimo lavoro di Scott e Bedford consiste nella distinzione da essi fatta degli acceleranti in due categorie corrispondenti a quelle indicate da noi sopra in 1) e 3). Essi cioè distinguono:

« 1) acceleranti-polisolfuri del gruppo H_2S. A questi appartengono le basi che formano polisolfuri simili al solfuro giallo d'ammonio;

« 2) acceleranti-polisolfuri del gruppo $\equiv C - S - H$, come le tiouree, ditiocarbammati, tiourami, mercaptani o i disolfuri che si possono formare da essi per ossidazione o reazione con zolfo ».

Tale distinzione è perfettamente conforme ai fatti. È solo nella seconda categoria che si trovano gli acceleranti di massima potenza che potremo chiamare *ultraacceleranti*, capaci p. es. di dare vulcanizzazioni a temperatura ordinaria. Ad essi sono da aggiungere gli alchilxantogenati ed altri corpi di cui parleremo in seguito.

Fra i corpi di questo tipo Scott e Bedford citano i tiourami ed i loro disolfuri. In una Nota precedente [1] è stato dimostrato che uno di noi aveva scoperto le proprietà acceleranti di questi corpi in modo affatto indipendente dai chimici americani.

Le osservazioni e considerazioni esposte in quella Nota sono anzi assai più complete del brevissimo accenno di Scott e Bedford e soprattutto mettono in rilievo un fatto fondamentale, rimasto loro ignoto, o da essi trascurato, e cioè che i disolfuri degli alchil- o aril-tiourami non solo accelerano la vulcanizzazione, ma sono capaci di vulcanizzare senza zolfo estraneo, ciò che non fanno nè le tiouree, nè i ditiocarbammati, nè i xantogenati.

Finora la formazione di tali disolfuri era stata *ammessa* per spiegare la vulcanizzazione. Qui si dà per la prima volta la dimostrazione diretta e sperimentale che questi disolfuri sono effettivamente capaci di vulcanizzare la gomma cedendo il loro zolfo. Essi sono *autoacceleranti*.

Rammentiamo che i disolfuri di tiourami sostituiti si formano dai ditiocarbammati per ossidazione; p. es. dai ditiocarbammati di ammine per azione di iodio o di cloro con liberazione dell'ammina salificata sotto forma di iodidrato o di cloridrato [2]. Ma essi possono formarsi altresì per ossidazione dei ditio-

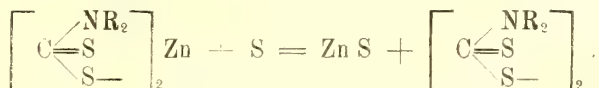
---

idrossilammina conducono ad ammettere che essa si comporti nella forma tautomera come l'ossido di anilina, ma è certo che le ammine primarie e secondarie hanno minore tendenza delle terziarie a dare derivati di questo genere, mentre appunto fra esse si trovano gli acceleranti più energici. G. B.

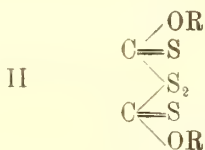
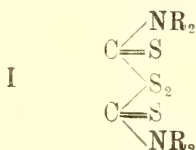
[1] E. Romani, questi Rendiconti, pag. 283.

[2] Grodzki, Ber. *14*, 2756 (1881); ved. Braun, Ber. *35*, 817 (1902), *36*, 2259 (1903).

carbammati metallici o per azione su di essi di zolfo libero:

$$\left[C \begin{array}{l} \diagup NR_2 \\ = S \\ \diagdown S - \end{array} \right]_2 Zn + S = Zn\,S + \left[C \begin{array}{l} \diagup NR_2 \\ = S \\ \diagdown S - \end{array} \right]_2 .$$

Questo è appunto il modo nel quale si comportano nella mescolanza gomma zolfo gli alchil-e aril-ditiocarbammati di zinco e la ragione per la quale essi accelerano la vulcanizzazione in modo così eminente.

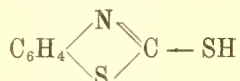
Anche gli alchilxantogenati di zinco possono per le medesime ragioni agire come ultraacceleranti, poichè anch'essi per ossidazione dànno facilmente dei disolfuri (I) perfettamente analogi a quelli dei tiourami (II), i cosidetti dixantogeni (¹):

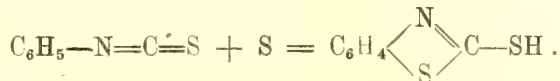
$$\text{I} \quad \begin{array}{l} \quad\diagup NR_2 \\ C = S \\ \quad\diagdown \\ \qquad S_2 \\ \quad\diagup \\ C = S \\ \quad\diagdown NR_2 \end{array} \qquad\qquad \text{II} \quad \begin{array}{l} \quad\diagup OR \\ C = S \\ \quad\diagdown \\ \qquad S_2 \\ \quad\diagup \\ C = S \\ \quad\diagdown OR \end{array}$$

Da ciò risulta il perfetto parallelismo nell'azione delle due serie di composti.

Il comportamento dei xantogenati è interessante perchè anzitutto dimostra che l'azoto non è affatto necessario, e nemmeno sostanziale, nel processo di accelerazione, come invece gli autori prima citati hanno ritenuto, e conferma quanto si è detto prima circa la non necessità del carattere basico degli acceleranti.

Noi abbiamo poi dimostrato in modo preciso che anche l'azione degli acceleranti derivati della tiourea, o che con zolfo possono dar luogo a tiouree sostituite, è basato su un meccanismo perfettamente analogo.

Come uno di noi (Romani) dimostrerà più diffusamente in un lavoro di prossima pubblicazione, riscaldando zolfo con monofenil- e con difeniltiourea in tubi chiusi a 260° si ottiene il mercaptobenzotiazolo

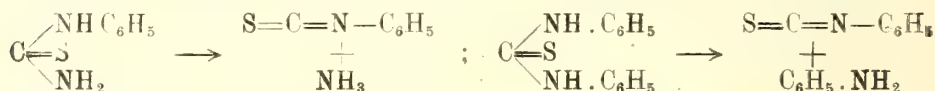
$$C_6H_4 \begin{array}{c} \diagup N \diagdown \\ \\ \diagdown S \diagup \end{array} C - SH$$

ottenuto per la prima volta da A. W. Hofmann (²). Questa sostanza era poi stata preparata da Jacobson e Frankenbaker (³), facendo agire in tubi chiusi lo zolfo sul fenilsenfolo:

$$C_6H_5 - N = C = S + S = C_6H_4 \begin{array}{c} \diagup N \diagdown \\ \\ \diagdown S \diagup \end{array} C - SH .$$

(¹) Dessins, Ann. chim. (3), *20*, 498 (1847); Debus, Lieb. Ann., *72*, 4 (1849); Schall, Chem. Centr., 1896, I, 588.

(²) Ber. *24*, 1400 (1891).

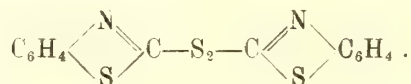
(³) Ber. *20*, 1789 (1887).

Evidentemente le reazioni da noi realizzate hanno luogo appunto perchè in un primo tempo si forma come prodotto intermediario il fenilsenfolo:

$$C{\overset{\diagup NH\,C_6H_5}{\underset{\diagdown NH_2}{=S}}} \longrightarrow \begin{array}{c} S{=}C{=}N{-}C_6H_5 \\ + \\ NH_3 \end{array} \quad ; \quad C{\overset{\diagup NH\,.\,C_6H_5}{\underset{\diagdown NH\,.\,C_6H_5}{=S}}} \longrightarrow \begin{array}{c} S{=}C{=}N{-}C_6H_5 \\ + \\ C_6H_5\,.\,NH_2 \end{array}$$

e il senfolo reagisce poi collo zolfo formando il mercaptotiazolo.

Questa sostanza, che è un solido cristallino leggermente colorato in giallo fondente a 179°, non ha da sola un potere accelerante marcato, ma in presenza di ossido di zinco è invece un ultraaccelerante di potenza paragonabile ai xantogenati e ditiocarbammati di zinco.

Ora è ben noto che per ossidazione del mercaptobenzotiazolo (Hofmann, Jacobson e Frankenbaker) si ottiene il relativo disolfuro:

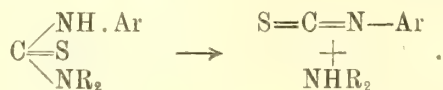
$$C_6H_4{\overset{\diagup N \diagdown}{\underset{\diagdown S \diagup}{\quad}}}C{-}S_2{-}C{\overset{\diagup N \diagdown}{\underset{\diagdown S \diagup}{\quad}}}C_6H_4\,.$$

Il disolfuro appena formato agisce a sua volta come tutti gli altri corpi del genere prima menzionati.

Noi abbiamo anche operato partendo dalla p.tolil-, dalla -naftil- e dalla pp.fenilen-tiourea ed abbiamo ottenuto per azione dello zolfo i mercaptotiazoli corrispondenti, di cui il primo e l'ultimo erano sconosciuti; essi sono dotati di analogo potere accelerante, per quanto un po' inferiore.

Questi composti si ottengono anche per riscaldamento dello zolfo con sostanze azotate aromatiche di costituzione svariate, attraverso a reazioni più o meno complicate. Per es. Rassow e Dohle [1] hanno ottenuto il mercaptobenzotiazolo, assieme a molte altre sostanze per riscaldamento della dimetilanilina con zolfo. Noi alla nostra volta abbiamo trovato che esso si forma con buon rendimento per azione dello zolfo sulla metilenanilina (anidroformaldeidanilina). È certo quindi che anche il potere accelerante di questa sostanza è dovuto alla medesima successione di reazioni.

L'azione accelerante di questi mercaptotiazoli, che hanno proprietà acide spiccate, interviene solo in presenza di ossidi metallici ed è dovuta, come nel caso degli xantogenati e ditiocarbammati, ai relativi sali, p. es. a quelli di zinco. È interessante che in questo caso, contrariamente a quanto accade per gli xantogenati e ditiocarbammati, anche i sali di altri metalli, come cadmio, piombo e mercurio, sono assai attivi.

Anche le tiouree trisostituite possono dar luogo a formazione di senfoli e quindi agiscono come acceleranti nello stesso modo. Per esempio:

$$C{\overset{\diagup NH\,.\,Ar}{\underset{\diagdown NR_2}{=S}}} \longrightarrow \begin{array}{c} S{=}C{=}N{-}Ar \\ + \\ NHR_2 \end{array}\,.$$

[1] Journ. f. prakt. ch. (2), 93, 183 (1916).

Invece le tiouree tetrasostituite, che non possono dare questa reazione, sono del tutto inattive, come noi abbiamo dimostrato sperimentalmente.

Il fatto che le proprietà acceleranti di certe sostanze azotate aromatiche non siano dovute ad un'azione primaria della sostanza stessa, ma a quelle di un prodotto intermedio formato per reazione fra la medesima e lo zolfo aggiunto per la vulcanizzazione è stato intravveduto da diversi sperimentatori. Così Peachey ha brevettato [1] l'impiego di una sostanza, o di un miscuglio che si ottiene fondendo la p.nitrosodimetilanilina con zolfo.

Più tardi la Goodyear Tire and Rubber C°. ha brevettato l'uso di sostanze o miscele che si ottengono fondendo con zolfo diverse sostanze azotate aromatiche come metilenanilina. feniltiouree, trifenilguanidina e simili [2]. Nel testo del brevetto è detto appunto che anche quando dette sostanze vengono aggiunte inalterate alla mescolanza gomma-zolfo, esse non agiscono come tali, ma debbono prima reagire con zolfo per formare corpi che sono i veri acceleranti.

Nessuno di questi sperimentatori ha però isolato e descritto prodotti ben definiti da queste reazioni, e nemmeno spiega di qual natura essi dovrebbero essere. Ora è chiaro che tutte queste sostanze dànno luogo con zolfo, attraverso a reazioni più o meno complicate, analoghe a quelle di Rassow e Dohle, prima ad una tiourea sostituita, la quale dà poi le trasformazioni da noi descritte.

Un altro punto su cui gli autori precedenti non sono chiari è sull'azione dell'ossido di zinco sulla vulcanizzazione. Per quanto sia noto a tutti che un'azione energica degli acceleranti organici si ha solo in presenza di certi ossidi metallici, e principalmente di ossido di zinco, non si dà a questo fatto la dovuta importanza. Secondo Scott e Bedford la funzione dell'ossido di zinco consisterebbe semplicemente nel facilitare la scissione dei polisolfuri in zolfo colloidale ed ammine.

Da quanto noi abbiamo sopra detto, risulta invece che si tratta in prima linea della formazione dei sali di zinco degli acidi solforati descritti, i quali per azione dello zolfo libero perdono lo zinco sotto forma di solfuro e dànno luogo ai disolfuri organici che sono i veri acceleranti. La superiorità dell'ossido di zinco sugli altri ossidi metallici consiste evidentemente nelle diverse condizioni di stabilità e scomposizione dei relativi sali e solfuri.

Noi abbiamo così potuto riunire per i primi in uno schema comprensivo, razionale e sperimentalmente dimostrato l'azione accelerante di varie categorie importanti di sostanze solforate e non solforate organiche. Le sostanze attive sono: dixantogeni, disolfuri di tiourami, disolfuri di tiazoli. Tutte queste sostanze sono state isolate allo stato di purezza e la loro effi-

(1) Brit. Pat., 113.570 (1917).
(2) Brit. Pat. 130.857 (1919).

cacia è stata direttamente provata. Non intendiamo naturalmente di escludere che oltre a queste altri tipi di disolfuri attivi possano esistere.

Scott e Bedford ricordano che secondo J. Bloch [1] i persolfuri d'idrogeno possono vulcanizzare a freddo le soluzioni di gomma. Noi dobbiamo però dire che abbiamo tentato ripetutamente di riprodurre questa reazione in diverse condizioni, ma non vi siamo riusciti.

Dallo schema da noi tracciato resta fuori l'azione accelerante dei nitrosoderivati aromatici. Per la nitrosodimetilanilina ed omologhi si può ammettere la formazione del benzotiazolo, analogamente a quanto hanno osservato Rassow e Dohle per la dimetilanilina, ma nulla di simile può dirsi per composti come il nitrosobenzolo ed il nitrosofenolo, per i quali bisogna probabilmente ricorrere all'azione dei nitrosogruppi sui doppi legami, scoperta da A. Angeli [2] appunto a proposito dell'azione del nitrosobenzolo sulla gomma. Questa pubblicazione sembra esser rimasta sconosciuta a Peachey.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les fonctions permutables.* Nota di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra [3].

1. Les transformations Ω de notre Note précédente [4] jouissent des propriétés suivantes:

1°. Elles font correspondre, à toute fonction $\lambda(y-x)$, une fonction $G(x,y)$.

2°. Elles sont linéaires en λ (distributives et continues).

3°. Elles conservent la composition.

J'ai déjà indiqué que l'on peut remplacer la condition 3° par la suivante: si $F(x,y)$ est la transformée de 1, $\overset{*}{F}{}^n$ est la transformée de $\overset{*}{1}{}^n$ (n entier) [5].

Nous reviendrons sur les transformations jouissant de ces propriétés; bornons nous à indiquer ici qu'il ne peut en exister plus d'une telle que, par exemple, $\Omega(1)$ ait une valeur assignée F. Dans ce cas, en effet, $\overset{*}{1}{}^n$ aura pour transformée F^n (d'après 3°); la valeur de la transformée de λ en ré-

(1) D. R. P.

(2) Questi Rendiconti.

(3) Presentata nella seduta del 16 gennaio 1921.

(4) Rend. R. Acc. Lincei, fasc. 10, pag. 318. Lorsque nous aurons à citer cette Note dans la suite, nous la désignerons par [A].

(5) Bull. Soc. Math. de France, 1919.

sulte immédiatement si λ est un polynome, puis si λ est continue quelconque (d'après 2°) (¹).

Parmi les transformations jouissant de ces propriétés, on doit citer, à côté de celles déjà examinées, celles qu'a définies M. Volterra et qui lui servent dans la réduction d'une fonction à la forme canonique (²).

Signalons aussi une généralisation: on peut dans 1°, remplacer l'ensemble des fonctions λ permutables avec l'unité par un autre groupe de fonctions permutables; en d'autres termes envisager des transformations ayant les propriétés 2° et 3° et faisant passer d'un groupe de fonctions permutables à un autre. Le passage à ce cas plus général est particulièrement simple pour les transformations mises sous la forme (4) de ma Note [A].

2. Reprenons une Ω du type considéré dans [A]. Elle peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{G}(x\,,y) = (\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{m})\,\overset{*}{\lambda}\,(\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{n}), \tag{1}$$

m et n étant deux noyaux associés de Volterra, c'est-à-dire vérifiant

$$(\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{m})(\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{n}) = (\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{n})(\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{m}) = \overset{*}{1}{}^{o}. \tag{2}$$

Cette transformation fait correspondre, au groupe U du cycle fermé, un groupe C de fonctions permutables constituant, comme on le voit sans peine, l'ensemble de *toutes* les fonctions permutables avec une quelconque d'entre elles. La transformation peut être dite régulière si $\Omega(1)$ est une fonction régulière (³).

Parmi les transformations précédentes, il convient de signaler celles, que nous nommerons ω, qui transforment le groupe U en lui-même; elles sont toutes régulières (⁴).

Il est clair que en général, deux transformations (1) différentes peuvent conduire au même groupe C: pour obtenir, à partir de l'une d'elles, toutes les Ω qui conduisent au groupe C, il suffit d'y effectuer, sur λ, toutes

(¹) La condition d'existence d'une transformation de ce genre [jouissant des propriétés 1° à 3° et telle que $\Omega(1) = \mathrm{F}$] peut être mise sous la forme suivante: si le polynome $a_0 \overset{*}{1} + a_1 \overset{*}{1}{}^2 + \cdots + a_n \overset{*}{1}{}^n$ est inférieur en module à ε, le polynome de composition $a_0 \overset{*}{\mathrm{F}} + a_1 \overset{*}{\mathrm{F}}{}^2 + \cdots + a_n \overset{*}{\mathrm{F}}{}^n$, qui doit lui correspondre dans la transformation, est inférieur à $\mathrm{K}\varepsilon$.

(²) Cf. Volterra, *Sulla teoria delle potenze, dei logaritmi, delle funzioni di composizione* (Atti Lincei, 1916, n. 7).

(³) F''_{xy} existe. Ce cas à déjà été caractérisé ([A], n.^{os} 3, 4, 6).

(⁴) En effet, dans ce cas, le noyau $\Phi(\xi\,; x\,, y)$ ⟨cf. [A], équation (1)⟩ ne doit dépendre que de ξ et $y - x$; l'équation qui exprime qu'il conserve la composition se simplifie alors, on vérifie que la formule (2) de [A] (où l'on prend f fonction de la seule variable $y - x$) en donne la solution générale.

les ω. Ces diverses transformations sont en même temps régulières ou non; dans le premier cas, le groupe C sera dit régulier.

3. Envisageons maintenant une transformation

$$G(x, y) = (\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{M})\,\overset{*}{\lambda}\,(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{N}), \tag{1'}$$

M et N (données) n'étant plus assujetties à vérifier l'équation

$$(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{M})(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{N}) = (\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{N})(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{M}) = \overset{*}{1}{}^o. \tag{2'}$$

Cette transformation ne conserve plus la composition, mais les $G(x, y)$ forment un groupe de fonctions permutables si

$$(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{N})(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{M})$$

appartient au groupe U, en d'autres termes si

$$N + M + \overset{*}{N}\overset{*}{M} = h(y - x) \tag{3}$$

(h arbitraire). Les types (1) et (1') se ramènent alors aisément l'un à l'autre.

La condition (3) entraine pour M et N des équations intégro-différentielles faciles à former ([1]). Nommons Δ l'opération $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$; on vérifie que

$$\Delta(\overset{*}{M}\overset{*}{N}) = \overset{*}{\overline{\Delta M}}\,\overset{*}{N} + \overset{*}{M}\,\overset{*}{\overline{\Delta N}} \tag{4}$$

de sorte que (3) équivaut à

$$\Delta N + \Delta M + \overset{*}{\overline{\Delta N}}\,\overset{*}{M} + \overset{*}{N}\,\overset{*}{\overline{\Delta M}} = 0$$

ou

$$\overset{*}{\overline{\Delta N}}(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{M}) = -(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{N})\,\overset{*}{\overline{\Delta M}}.$$

D'où, en nommant

$$(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{N})\,\overset{*}{f}\,(\overset{*}{1}{}^o + \overset{*}{M})$$

la valeur commune de ces rapports, résulte, en M et N, les relations intégro-différentielles

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)N = \quad f + \overset{*}{N}\overset{*}{f} \tag{α}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)M = -f - \overset{*}{f}\overset{*}{M}. \tag{β}$$

4. Admettons maintenant que f soit donnée. Soit M_0 et N_0 deux solutions de (α) et (β) telles que (2') soit vérifiée ([2]). Il résulte de (3) que la

([1]) Nous nous plaçons, pour le faire, dans le cas régulier; au cas général sera consacrée une Note suivante.

([2]) On peut choisir l'une d'elles, M_0 par exemple, solution quelconque de (β); N_0 en résulte par la formule $N_0 = -M_0 + \overset{*}{M}{}_0^2 - \overset{*}{M}{}_0^3 + \cdots$.

solution générale de (α) sera telle que

$$(\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{N}) = (\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{h})(\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{N}_0);$$

d'où

$$N = h + N_0 + \overset{*}{h}\overset{*}{N}_0 .$$

h étant fonction arbitraire de $y - x$. De même la solution générale de (β) sera

$$k + M_0 + \overset{*}{M}_0 \overset{*}{k} \qquad [k(y-x) \text{ arbitraire}].$$

On vérifiera que l'équation (α) coïncide avec l'équation intégro-différentielle que l'on peut déduire, pour n, de l'équation (8) de ma Note [A].

De ce fait et des expressions précédentes pour M et N, résulte bien aisément que, si l'on détermine f par la relation (2″) de [A], la formule (1′) [où M et N sont solutions quelconques de (α) et (β)] représente toutes les fonctions permutables avec $F(x, y)$.

Un mot sur la résolution des équations (α) et (β): elles sont de types traités par M. Volterra [1]. Nous indiquerons ici comment leur solution introduit la transcendante $\Phi(\xi; x, y)$ donnée par la formule (2) de [A]: on peut prendre, par exemple,

$$N(x, y) = \Phi(x; o, y) \qquad M(x, y) = \Phi(b - y, x, b) \text{ [2]}.$$

5. Toutes les fonctions permutables avec $F(x, y)$, données par la formule

$$G = (\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{M})\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{1}{}^{o} + \overset{*}{N})$$

sont alors telles que

$$\Delta G = \overline{\overset{*}{\Delta M}}\,\overset{*}{\lambda} + \overset{*}{\lambda}\,\overline{\overset{*}{\Delta N}} + \overline{\overset{*}{\Delta M}}\,\overset{*}{\lambda}\,\overset{*}{N} + \overset{*}{M}\,\overset{*}{\lambda}\,\overline{\overset{*}{\Delta N}}$$

ou, d'après (α) et (β)

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) G = \overset{*}{G}\overset{*}{f} - \overset{*}{f}\overset{*}{G} \text{ [3]}.$$

[1] Cf. par exemple, *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 163.

[2] Cette fonction $\Phi(\xi; x, y)$ est fort avantageuse à considérer. pour la simplicité de sa définition et ses nombreuses propriétés. Signalons ici, à côté des relations (4), (6′) et (7) du Mémoire déjà cité (Ann. Ec. Norm.) la relation analogue

$$\Psi_0(\tau; x, y) = f(x-\tau, y-\tau) + \int_x^y f(x-\tau, \zeta-\tau)\,\Psi_0(\tau; \zeta, y)\,d\zeta$$

pour Ψ_0 qui lui est simplement reliée [Ibid. n. 6]. Cette relation conduit à (β) pour $y =$ constante: (6′) conduit à (α) pour $x =$ constante; d'où les formules du texte.

[3] Ou encore

$$\overset{*}{F}{}^{-1}\overset{*}{G} = \overset{*}{G}\overset{*}{F}{}^{-1}.$$

C'est l'équation qui est à la base de la méthode de recherche des fonctions permutables de M. Volterra: il l'établit pour toute fonction du groupe de forme $G = \overset{*}{F}\overset{*}{G}' = \overset{*}{G}'\overset{*}{F}$; il en résulte qu'elle doit être générale, comme nous venons de le vérifier. Elle caractérise les fonctions du groupe.

Une remarque pour terminer. Nous avons vu que, à chaque f correspond une transformation ⟨dont le noyau est donné par la formule (2) de [A]⟩ conservant la composition et faisant passer, de U, à un groupe C de fonctions permutables. L'équation (γ) rend évident le fait, facile à vérifier directement, que le groupe C ne change point si l'on ajoute à f une fonction quelconque du groupe (et inversement) (1).

Cristallografia. — *Sulla forma cristallina della Trimetilfloretina* $C_6H_2O_3(CH_3)_3 . CO . CH(CH_3) . C_6H_4OH$ (2). Nota di Maria De Angelis (3), presentata dal Socio Artini.

La sostanza, preparata per la prima volta e descritta da Ciamician e Silber (4), mi fu affidata per lo studio dal prof. Körner.

P. fus. = 152°.

Sistema monoclino, classe prismatica:

$$a:b:c = 0.4505:1:0.3410$$
$$\beta = 71^\circ.13'$$

Forme osservate:

$\{010\}, \{001\}, \{110\}, \{210\}, \{\bar{2}01\}, \{\bar{1}11\}, \{\bar{2}11\}, \{\bar{2}12\}$.

I cristalli ottenuti da miscela di etere ed alcool etilico presentano ordinariamente la semplice combinazione delle forme: $\{010\}, \{001\}, \{110\}, \{\bar{1}11\}$, alle quali qualche volta si aggiungono piccole faccette di $\{20\bar{1}\}$ (fig 1). Più ricchi sono ordinariamente i cristalli che si hanno da soluzioni in etere acetico: questi presentano di solito, come i precedenti, abito grossolanamente tabulare secondo $\{010\}$ (fig. 2) e per lo più sono formati dalla combinazione di tutte le forme osservate, meno la $\{\bar{2}11\}$ la quale fu trovata con due faccettine piccolissime in un unico cristallo.

Abbastanza frequenti sono i geminati nei quali l'uno dei due individui ricopre l'altro per rotazione di 180° intorno all'asse x. Alcuni di questi

(1) Cf. aussi la fin du n. 2.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale di Milano.

(3) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(4) G. Ciamician u. P. Silber, *Ueber die Constitution des Maclurins und Phloretins*. Berichte der Deutschen Chem. Ges. 28, p. 1393 (1895).

sono veri geminati di contatto secondo }001{, e potrebbero perfettamente esser definiti quali geminati secondo questa forma (fig. 3); sono quelli che si ottengono a preferenza dalle soluzioni etereo-alcooliche. Dalle soluzioni in etere acetico si hanno invece più spesso dei gruppi di due individui nei quali il piano di contatto è la }010{ (fig. 4).

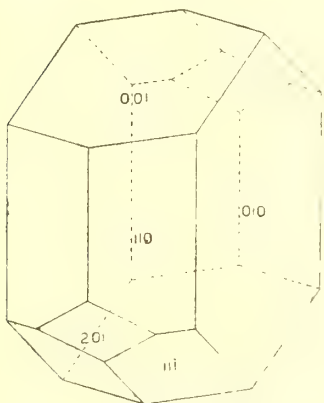
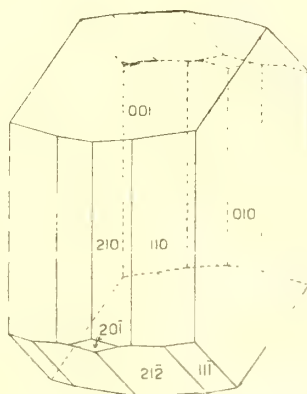



Fig. 1. Fig. 2.

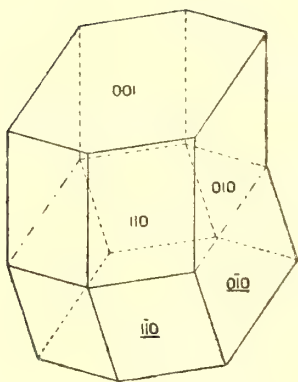
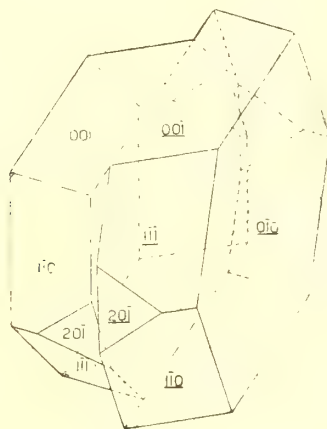



Fig. 3. Fig. 4.

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	N.	Limiti	Medie	
$(110).(010)$	38	66°19′ — 67°44′	66°54′	*
$(\bar{1}10).(\bar{1}11)$	13	60.25 — 61.35	61. 8	*
$(\bar{1}11).(001)$	16	45.51 — 46.20	46. 6	*
$(110).(1\bar{1}0)$	17	45.19 — 47. 3	46. 5	46°12′
$(110).(210)$	7	10. 6 — 11. 9	10.37	11. 4
$(110).(2\bar{1}0)$	4	35.19 — 35.34	35.24	35. 8
$(210).(2\bar{1}0)$	3	24.11 — 24.22	24.15	24. 5
$(\bar{2}01).(001)$	7	70. 5 — 70.53	70.25	70.19
$(110).(001)$	25	71.39 — 73.24	72.28	72.46
$(210).(001)$	8	71. 5 — 71.43	71.33	71.38
$(\bar{1}10).(\bar{2}01)$	6	43. 6 — 44.20	43.40	43.56
$(\bar{2}10).(\bar{2}01)$	2	40.11 — 40.13	40.12	40. 2
$(\bar{1}11).(010)$	12	72.21 — 73. 1	72.42	72.47
$(\bar{1}11).(110)$	1	—	104.28	104.30 ½
$(\bar{1}11).(\bar{2}01)$	5	31.24 — 32. 5	31.41	31.34
$(\bar{1}11).(\bar{1}\bar{1}1)$	5	34.12 — 34.46	34.30	34.26
$(\bar{2}12).(001)$	10	44. 8 — 44.45	44.21	44.10
$(\bar{2}12).(\bar{2}10)$	3	63.57 — 64.10	64. 4	64.12
$(\bar{2}12).(010)$	7	80.33 — 81.18	80.57	81.11 ½
$(\bar{2}12).(\bar{2}01)$	6	27.57 — 28.20	28.10	28.10
$(\bar{2}12).(\bar{1}10)$	2	63.32 — 64.00	63.46	63.56
$(\bar{2}12).(\bar{1}11)$	3	8.14 — 8.18	8.16	8.24 ½
$(\bar{2}12).(\bar{2}\bar{1}2)$	3	17.15 — 18.00	17.37	17.37
$(\bar{2}11).(010)$	2	77.57 — 78. 1	77.59	78. 1 ½
$(\bar{2}11).(\bar{2}01)$	2	11.54 — 12. 1	11.57 ½	11.58 ½
$(20\bar{1}).(\underline{20\bar{1}})$	1	—	38.34	39.21 ½
$(110).(\underline{1\bar{1}0})$	2	34. 9 — 35.36	34.52 ½	34.28
$(21\bar{2}).(\underline{2\bar{1}\bar{2}})$	1	—	91.14	91.41
$(1\bar{1}0).(\underline{1\bar{1}0})$	1	—	60. 8	58.54
$(1\bar{1}\bar{1}).(\underline{1\bar{1}\bar{1}})$	1	—	97.54	97.52

Sfaldatura facile e perfetta secondo }010{.

Colore giallo citrino.

I piani degli A. O. sono normali a }010{; le bisettrici acute, negative, sono contenute nel piano di simmetria; quella per la luce gialla fa un angolo di 23° con l'asse x, nell'angolo β acuto.

Doppia rifrazione fortissima. Dispersione degli A. O. abbastanza forte: $\rho < v$.

Sopra una lamina tagliata normalmente alla bisettrice acuta ho misurato:

$$2\,E_a = 63°.27'\ (\mathrm{Na}).$$

La stessa lamina nella soluzione di Thoulet mi ha dato:

$$2\,H_a = 35°.36'\ (\mathrm{Na}).$$

In una lamina di sfaldatura secondo }010{ ho ottenuto, nello stesso liquido (l'angolo $2\,H_0$ è molto grande, e gli assi non emergono nell'olio):

$$2\,H_0 = 131°.35'\ (\mathrm{Na}).$$

Da questi dati si calcola:

$$2\,V_a = 37°.3\,{}^1/_2{}'\ (\mathrm{Na}).$$

P. sp. = 1.306
P. M. = 316.16
V. = 242.08

χ = 5.3395
ψ = 11.8511
ω = 4.0410

Biologia. — *Ricerche biochimiche sul preparato centrale di rospo* (1). Nota di E. SERENI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI (2).

I varî preparati dell'asse cerebro-spinale di Rana e di Bufo, ideati dal Baglioni (3), sono stati già utilizzati per varî sperimenti sulla fisiologia generale dei centri nervosi da diversi autori. Molti sono però i problemi ai quali il loro studio può portare qualche contributo, e fra questi non ultimi quelli relativi al metabolismo dei detti centri.

Ho eseguito queste ricerche sul preparato di Bufo, come il più completo. Ottenutolo con una tecnica identica a quella consigliata dal Baglioni,

(1) Queste ricerche sono state eseguite nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Roma, sotto la guida del prof. Baglioni, che qui vivamente ringrazio.

(2) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(3) Baglioni, Handbuch der biochemischen Arbeitsmethoden di E. Abderhalden, pp. 358-384. Zeitschrift f. allgmeine Physiologie, IV Bd. 1904, pp. 384-437.

lo deponevo in un cristallizzatore, su poca ovatta bagnata con soluzione fisiologica e con qualche goccia di H_2O_2. Dopo 15 minuti, durante il quale tempo erano di solito ricomparsi i riflessi, in un primo momento sospesi, lavavo l'asse cerebro-spinale in soluzione fisiologica e quindi lo ponevo in un apparecchio simile a quello usato dal Baglioni [1], previamente riempito di circa 350 cm³. del liquido, costituito da soluzione 0,8 % di NaCl bollita. Molta cura ponevo a che restassero immersi nel liquido solo i centri nervosi. Per l'ossigenazione del liquido, a differenza del Baglioni, che usava ossigeno, adoperai acqua ossigenata.

Nell'apparecchio il preparato era lasciato finchè se ne potevano ottenere movimenti riflessi; quindi l'asse cerebro-spinale era fissato per essere sottoposto all'esame istologico, mentre il liquido era analizzato chimicamente da varî punti di vista.

Delle alterazioni ritrovate nelle cellule dei midolli usati per le esperienze, è detto altrove. Qui riferirò brevemente i risultati di ordine fisiologico.

La durata della sopravvivenza fu assai varia; si aggirò di solito intorno alle 20 ore, a temperatura ambiente di stanza; come massimo notai in un caso $64^h 30'$.

L'uso dell'H_2O_2 per l'ossigenazione del liquido, finora tentato solo dal Baglioni, mi diede ottimi risultati. La quantità media adoperata per ogni preparato fu di 3 cm³. della soluzione della F.U. (al 3,6 %): non fu possibile stabilire più esattamente la quantità necessaria.

Nel liquido, dopo la permanenza del preparato, potei in tutti i casi constatare la presenza di CO_2 (con la prova di Pettenkofer all'acido rosolico e con quelle alla fenolftaleina): e questo può avvalorare l'ipotesi del Baglioni che suppone che il CO_2 abbia un ruolo importante nel rendere il liquido inadatto alla sopravvivenza dei centri.

Nelle prime ricerche mi riuscì di dimostrare nel liquido della albumina (con la prova di Heller e con l'acido tricloroacetico); essa apparve poi in quantità sempre minore fino a scomparire nelle ultime analisi: sicchè credo che la sua presenza non abbia alcuna importanza e debba riportarsi ad impurità, dovute all'imperfetto lavaggio, che la tecnica perfezionandosi via via, è riuscita infine ad eliminare.

Sempre potei dimostrare (col metodo di Soerensen modificato dal Settimi) la presenza di aminoacidi in quantità media pari a gr. 0,0200 per 100 cm³. di liquido e gr. 0,0685 in totale. Instituite alcune ricerche di controllo, nelle quali nell'apparecchio ponevo l'asse cerebro-spinale previamente ucciso in varia guisa (con pressioni, esposizione all'aria senza acqua ossigenata), le quantità medie di aminoacidi ritrovate furono di gr. 0,0122 per 100 cm³. e 0,0347 in totale; i quali risultati stanno a dimostrare una attiva aminogenesi, più intensa quasi del doppio nei preparati viventi.

Se questi furono i valori medî, i singoli risultati di ogni serie si pre-

[1] Baglioni, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XIII, 1904, pp. 739-748.

sentarono assai variabili; da gr. 0,0098 a gr. 0,0280 i valori percentuali e da gr. 0,0378 a gr. 0,0980 i valori totali per la prima serie; da gr. 0,0087 a gr. 0,0154 i valori percentuali e da gr. 0,0114 a gr. 0,0539 i valori totali nelle ricerche di controllo. Questa grande variabilità, più che a fenomeni biologici, credo si debba riportare a fenomeni fisici di temperatura e di diffusione. I valori tendono infatti progressivamente a salire coll'avanzare della stagione, e quindi della temperatura; e d'altra parte, facilitando in un qualsiasi modo la diffusione, le quantità di aminoacidi dimostrabili aumentano rapidamente. Questo avviene, per esempio, per i preparati viventi agitandoli nel liquido, per quelli morti, spappolandoli; in ambedue i casi l'aumento è notevolissimo.

Dopo l'ebollizione, il liquido dimostrò sempre reazione intensamente alcalina e all'acido rosolico ed alla fenolftaleina. Nei liquidi bolliti gli aminoacidi apparvero costantemente diminuiti.

Dei risultati interessanti in merito alle conclusioni che se ne possono trarre mi diede la stricnina. Applicata sul rigonfiamento lombare del midollo appena isolato, non parve produrre alcun aumento della quantità degli aminoacidi; mentre mi sembrò esercitasse una lieve azione nel prolungare la vita del preparato, che fu in media, in questi casi, di 21^h, cioè di un'ora circa superiore alla media generale.

Applicata invece, sempre sul rigonfiamento lombare, ma solo quando la eccitabilità riflessa stava per scomparire, la stricnina mostrò una ben diversa efficacia. Essa fu in queste condizioni capace di prolungare di assai la vita del preparato; e di esaltarne la eccitabilità sicchè, mentre prima della sua applicazione, non si potevano più provocare che lievissimi movimenti delle dita, monolaterali, dopo, ridiventavano possibili delle contrazioni complete di tutto l'arto, bilaterali. Talvolta, esaurito l'effetto di una prima applicazione di stricnina, il preparato si mostrò capace di sentire gli effetti di una seconda.

È da notarsi che con queste applicazioni tardive, non ottenni mai i tetani caratteristici (che si presentavano invece regolarmente ed intensissimi nelle applicazioni precoci), ma solo contrazioni singole, dopo ciascuna delle quali si aveva un lungo periodo di ineccitabilità.

Questo modo di azione della stricnina, collegato alla presenza di aminoacidi nel liquido da una parte, dall'altra alla dimostrazione data dal Lussana [1], che alcuni aminoacidi esercitano sui centri nervosi un'azione depressiva che la stricnina neutralizza, mi sembra possa condurre ad ammettere che la morte, o meglio l'ineccitabilità del preparato del Baglioni sia in parte dovuta all'accumulo (facilitato dall'assenza del circolo), degli aminoacidi prodotti durante il metabolismo.

In correlazione con questo modo di vedere si possono spiegare varî fenomeni presentati dal preparato del Baglioni e da quelli affini.

[1] Lussana, Archivio di Fisiologia, X, 1912, pag. 345.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Foà fa omaggio del vol. VII del *Trattato di anatomia patologica per medici e studenti* da lui diretto, e che contiene il suo studio sull'*Apparato respiratorio.*

Il Presidente Volterra presenta il prof. Zeilon dell'Università di Upsala, che tenne nei locali dell'Accademia il giorno 2 corr. per il Seminario matematico una dotta conferenza; e il prof. Zeilon offre alcune sue pubblicazioni.

AFFARI DIVERSI

Il Socio Grassi informa la Classe del seguente discorso pronunciato dal Presidente d'Ovidio nella seduta della Classe di scienze morali, storiche e filologiche dell'8 maggio scorso.

« Si compie in questi giorni il quarantesimo anno da che il commendator Ernesto Mancini, auspice Quintino Sella, assunse nella nostra Accademia l'ufficio che oggi diciamo di Cancelliere. Quanti l'abbiam visto all'opera e abbiam potuto estimare l'intelligenza, l'abilità, lo zelo, l'amore, il garbo, la delicatezza squisita con che egli ha esercitato esso ufficio, non possiam tenerci dal manifestargliene oggi il nostro profondo compiacimento. E molti più saremmo se i tanti nostri predecessori che la morte ha rapiti potessero rifarsi vivi ed attestare le benemerenze di lui e l'affetto loro e la fiducia piena che in lui riposero. Se non corressero tempi davvero feroci per tutte le Accademie, e per la nostra in ispecie, se la nazione e il suo Governo non trascorressero un'ora tanto agitata, noi vorremmo ben altrimenti che con parole significare al professor Mancini la riconoscenza dell'Accademia; ma all'animo suo cortese non saranno indifferenti le parole sincere e cordiali, tra le quali ve n'è una d'augurio assai vivo, augurio non meno in pro di lui che in pro dell'Accademia, che per lunghi anni egli possa ancora rimanere nel nobile ufficio a cui ha dedicata tanta parte della sua vita intemerata ».

Su proposta del Socio on. Luzzatti, questo indirizzo venne firmato da tutti i Soci presenti.

Il Vicepresidente Volterra aggiunge cortesi parole di congratulazione e di augurio, e prega i Soci che non l'avessero ancor fatto, di firmare l'indirizzo.

CONCORSI A PREMI

A termini di quanto dispone lo Statuto ed il Regolamento, la Classe, riunitasi in Comitato segreto, procede alla elezione della Commissione che dovrà giudicare il concorso al premio Reale del 1921 per l'*Astronomia*. Risultano eletti a maggioranza di voti, i Soci: Cerulli, Levi-Civita, Di Legge, Somigliana e Corbino.

G. C.

AFFARI DIVERSI

CONCORSI A PREMI

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

(*Segue in terza pagina*).

E. Mancini *Cancelliere dell'Accademia, responsabile*

Pubblicazione bimensile. N. 12.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXVIII.

1921

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Volume XXX.º — Fascicolo 12º
e Indice del volume.

Seduta del 19 giugno 1921.

1º Semestre.

ROMA

TIP. DELLA R. ACCAD. NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1921

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note di Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 5 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, non possono superare le 3 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 giugno 1921.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni abeliane. IV: Applicazioni alle serie algebriche di gruppi sopra una curva.* Nota del Socio G. Castelnuovo.

12. Data sopra una curva C di genere p (¹) una serie algebrica γ_n^r di ∞^r gruppi di n punti, dei quali gruppi supporremo che mai due siano equivalenti ($r \leqq p$), conviene in varie questioni sostituire alla serie (con Torelli e Rosati) una nuova serie γ_p^r della stessa dimensione e di ordine p, in corrispondenza birazionale con quella. La γ_p^r dicesi *equivalente* alla γ_n^r se le somme dei valori di ciascun integrale abeliano di prima specie in due gruppi corrispondenti delle due serie coincidono (a meno di periodi) o differiscono di una costante; dicesi invece *residua* se la somma dei detti valori in tutti gli $n+p$ punti di due gruppi corrispondenti rimane costante al variare dei gruppi stessi. In linguaggio geometrico, nel primo caso la differenza, nel secondo caso la somma di due gruppi corrispondenti di γ_n^r e γ_p^r varia in una serie lineare. Questa serie, se γ_n^r e γ_p^r sono residue, è una g_{n+p}^n che può supporsi non speciale. Segue che l'indice della γ_n^r, cioè il numero dei gruppi contenenti r punti assegnati, uguaglia il numero dei gruppi della γ_n^r contenuti in una serie lineare g_{n-r+p}^{n-r} (residua di quegli r punti rispetto alla g_{n+p}^n).

(¹) Ved. le Note precedenti I, II e III in questi Rendiconti, vol. XXX, 1° sem. 1921, pp. 50, 99, 195.

13. Le considerazioni seguenti si applicano ad una serie γ_n^1 i cui gruppi corrispondano birazionalmente ai punti della curva sostegno C. Questa restrizione, che potrebbe togliersi senza difficoltà, è posta per rendere più breve e chiaro il ragionamento.

Tra il punto ζ che descrive la curva C e i punti $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n$ che costituiscono il gruppo corrispondente della γ_n^1 passano (secondo Hurwitz) le p relazioni seguenti, ove $j_1, \ldots, j_p$ indicano gli integrali normali di prima specie relativi alla solita tabella di periodi [III, (30)]:

$$j_h(\zeta'_1) + \ldots + j_h(\zeta'_n) = \varrho_{h1} j_1(\zeta) + \ldots + \varrho_{hp} j_p(\zeta) + \varrho_h . \tag{45}$$

Le ϱ_h e ϱ_{hl} sono costanti, quest'ultime legate ai periodi σ degli integrali j da $2p^2$ relazioni a coefficienti interi g:

$$\left\{ \begin{aligned} \varrho_{hl} &= g_{lh} + g_{l\,p+1}\sigma_{h1} + \cdots + g_{l\,2p}\sigma_{hp} , \\ \sum_{i=1}^{p} \varrho_{hi}\sigma_{il} &= g_{p+l\,h} + g_{p+l\,p+1}\sigma_{h1} + \cdots + g_{p+l\,2p}\sigma_{hp} , \end{aligned} \right. \qquad (h, l = 1, 2, \ldots p) . \tag{46}$$

Avremo occasione tra poco di considerare, insieme alla γ_n^1 data, le serie multiple $\gamma_{2n}^2, \gamma_{3n}^3, \ldots$ che si ottengono riunendo a coppie, a terne ... i gruppi della γ_n^1, serie che supporremo prive o liberate da gruppi equivalenti. E ad esse potremo sostituire le $\gamma_p^1, \gamma_p^2, \gamma_p^3 \ldots$ equivalenti. La prima di queste può definirsi mediante le (45) ove a primo membro, in luogo di n, si scriva p; se, nella stessa ipotesi, al posto di $j_i(\zeta)$ a secondo membro si sostituiscono le somme dei valori che j_i assume in due, tre, ... punti di C, il gruppo $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_p$ varierà in γ_p^2 o $\gamma_p^3, \ldots$ In breve, se per un dato gruppo di p punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$, scriviamo

$$u_i = j_i(\zeta_1) + \ldots + j_i(\zeta_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{29}$$

e indichiamo con u'_i le analoghe somme relative ad un secondo gruppo $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_p$, possiamo dire che le p relazioni

$$u'_h = \varrho_{h1} u_1 + \varrho_{h2} u_2 + \ldots + \varrho_{hp} u_p + \varrho_h \tag{47}$$

definiscono la γ_p^1, o la γ_p^2, o la $\gamma_p^3, \ldots$ secondo che dei punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ teniamo fissi $p-1$, o $p-2$, o $p-3, \ldots$, lasciando variare i rimanenti.

Le (47), ove si cambino i segni a tutte le ϱ_{hl}, rappresentano invece, nelle stesse ipotesi, le serie $\gamma_p^1, \gamma_p^2, \gamma_p^3, \ldots$, *residue* della γ_n^1 e dei suoi multipli.

La corrispondenza algebrica (45), che muta ogni punto ζ in un gruppo $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_n$ della γ_n^1, ammette una corrispondenza inversa che muta ogni punto ζ' in un certo gruppo $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$, ove ν è l'indice della γ_n^1. Varranno, al solito, relazioni del tipo

$$j_h(\zeta_1) + \ldots + j_h(\zeta_\nu) = \bar\varrho_{h1} j_1(\zeta') + \ldots + \bar\varrho_{hp} j_p(\zeta') + \bar\varrho_h , \tag{48}$$

nelle quali le costanti $\bar{\varrho}_{hl}$ sono definite (secondo Hurwitz) da relazioni analoghe alle (46), in cui però gli interi g siano sostituiti da nuovi interi $\bar{g}$ legati ai precedenti dalle uguaglianze

$$(49)\qquad \begin{cases} \bar{g}_{hl} = g_{lh}\,, & \bar{g}_{p+h\,,\,p+l} = g_{p+l\,,\,p+h} \\ \bar{g}_{h\,,\,p+l} = -\,g_{l\,,\,p+h}\,, & \bar{g}_{p+h\,,\,l} = -\,g_{p+l\,,\,h} \end{cases} \qquad (h\,,l = 1\,,2\,,\ldots p)\,.$$

Il prodotto della corrispondenza diretta per la inversa è una corrispondenza simmetrica $(\nu n\,,\nu n)$ che muta ogni punto η di C nei νn punti η' costituenti i ν gruppi della γ_n^1 che contengono η, tra i quali punti comparisce anche η contato ν volte.

Per questa nuova corrispondenza valgono equazioni del tipo

$$(50)\qquad j_h(\eta'_1) + \ldots + j_h(\eta'_{\nu n}) = \pi_{h1}\, j_1(\eta) + \ldots + \pi_{hp}\, j_p(\eta) + \pi_h\,,$$

ove

$$\pi_{hl} = \sum_{i=1}^{p} \bar{\varrho}_{hi}\, \varrho_{il}\,.$$

Si ha dunque

$$(51)\qquad \| \pi_{hl} \| = \| \bar{\varrho}_{hl} \| \cdot \| \varrho_{hl} \|\,,$$

eseguendo il prodotto secondo la nota regola del calcolo delle matrici.

Se formiamo, come al n. 10, la equazione caratteristica (34) o (35) delle π_{hl}, troviamo, come coefficienti, certi numeri interi positivi $i_1\,, i_2\,, \ldots\,, i_p$ che forniscono altrettanti caratteri invarianti (per trasformazioni birazionali) della γ_n^1 data o della γ_p^1 equivalente. Ci proponiamo di stabilirne i significati geometrici.

14. Riprendiamo a tal fine la varietà di Jacobi V_p relativa alla curva C (III, n. 9), varietà descritta da un punto dello spazio S_{p+1}, le cui coordinate cartesiane siano funzioni abeliane dei p parametri u_i dati dalle (29). La corrispondenza algebrica (45) esistente sulla curva C determina una corrispondenza razionale (47) entro la V_p, per effetto della quale ogni punto u si muta in *un* punto u', mentre ad ogni punto u' corrispondono

$$\delta = \| g_{rs} \| = \| \bar{\varrho}_{hl} \| \cdot \| \varrho_{hl} \| = \| \pi_{hl} \|$$

punti u.

Se il punto u' descrive in V_p una varietà Θ del primo ordine, rappresentata dall'annullarsi di una funzione ϑ riemanniana, i δ punti u corrispondenti descrivono una varietà intermediaria Φ che ha gli interi caratteristici

$$m_{rs} = \sum_{i=1}^{p} (g_{ri}\, g_{s\,p+i} - g_{r\,p+i}\, g_{si})$$

ed è collegata, nel senso spiegato al n. 10, alla corrispondenza simmetrica (50). Perciò gli invarianti $i_1\,, i_2\,, \ldots\,, i_p$ nominati al n. 13 sono pure invarianti della Φ ed hanno, per questa, i significati geometrici esposti ai nn. 10 e 11.

Se invece facciamo muovere il punto u lungo una varietà V_r, a r dimensioni, immersa in V_p, il punto u' che gli corrisponde per le (51) descriverà una varietà V'_r che, in generale, sarà una trasformata birazionale della V_r. Se questa si riduce alla V_1 che rappresenta i gruppi G_p della curva C aventi $p-1$ punti fissi, la V'_1 rappresenterà i G_p di una γ^1_p equivalente alla γ^1_n data. In generale se V_r è la immagine dei G_p con $p-r$ punti fissi, sarà V'_r la immagine di una γ^r_p equivalente alla serie γ^r_{rn}, multipla (n. 13) della γ^1_n data.

L'indice ν_r di questa γ^r_p è il numero delle intersezioni della V'_r, sua immagine, con una V_{p-r}, immagine dei G_p aventi r punti fissi; in simboli

$$\nu_r = [V'_r V_{p-r}] .$$

Ora fu già dimostrato [III, (39)] che questo numero è uguale al numero delle intersezioni di V'_r con r varietà Θ generiche del 1° ordine, diviso per $r!$:

$$\nu_r = \frac{1}{r!} [V'_r \Theta^r] .$$

D'altra parte il numero indicato nella nuova parentesi quadra si calcola subito se si applica alla varietà V'_r e alle varietà Θ la trasformazione $(1, \delta)$ definita dalle (47). La V'_r si trasforma nella V_r (in corrispondenza biunivoca con essa), presa insieme con un'altra varietà a r dimensioni che non interessa; le Θ si trasformano nelle varietà intermediarie Φ sopra nominate. Abbiamo dunque, applicando la (39) e la (36) della Nota III,

$$[V'_r \Theta^r] = [V_r \Phi^r] = \frac{1}{(p-r)!} [\Theta^{p-r} \Phi^r] = r! \, i_r$$

e infine

$$\nu_r = i_r .$$

Si conclude che l'invariante i_r della serie data γ^1_n uguaglia l'indice della γ^p_r equivalente alla γ^r_{rn} multipla della γ^1_n.

Alla γ^r_p *equivalente* si può sostituire la γ^r_p *residua*, giacchè nella rappresentazione analitica si passa dall'una all'altra serie mutando segno ai coefficienti ϱ_{hl} delle (47); con ciò cambiano segno anche i coefficienti $\bar{\varrho}_{hl}$ delle (48), ma non muta il determinante (51) dal quale solo dipendono gli invarianti i_h. Se si ricorda ora il n. 12, si conclude:

Data una serie γ^1_n sopra una curva di genere p, si formino le serie γ^2_{2n}, γ^3_{3n}, ... riunendo i gruppi di quella a coppie, a terne, ... Il numero dei gruppi della γ^r_{rn} che appartengono ad una serie lineare $g^{r(n-1)}_{r(n-1)+p}$ generica è dato dall' invariante i_r della γ^1_n.

L'interesse del carattere geometrico in esame, per $r = 1$, fu da me segnalato per tutt'altra via fin dal 1906. Più tardi (1913) il Comessatti [1] ha preso in considerazione gli analoghi caratteri per $r = 2, 3, \ldots, p$ ed ha dimostrato alcune proprietà di questi numeri. La notevole interpretazione analitica stabilita dall'ultimo teorema fa vedere che essi forniscono effettivamente i caratteri più importanti di una serie algebrica, e che in funzione di questi converrà ormai esprimere tutti gli altri caratteri della serie.

15. Sarebbe facile, partendo dalla definizione analitica degli invarianti i_r, ritrovare le proprietà date dal Comessatti per via diversa. Preferisco esporre qui un'altra interpretazione analitica degli invarianti.

Sappiamo già che la serie γ_p^r, residua della γ_{rn}^r, è descritta dal gruppo $\eta_1, \ldots, \eta_p$ definito da

$$j_h(\eta_1) + \cdots + j_h(\eta_p) = - \sum_{\alpha=1}^{r} [\varrho_{h1} j_1(\zeta_\alpha) + \cdots + \varrho_{hp} j_p(\zeta_\alpha)] + \varrho_h ,$$

al variare degli r punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$. L'indice della γ_p^r, ossia il numero dei gruppi contenenti r punti fissi $\eta_1, \ldots, \eta_r$, è il numero delle soluzioni delle p equazioni (o congruenze) scritte, ove si considerino incogniti i punti $\zeta_1, \ldots, \zeta_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_p$. Dunque:

Si formino le p equazioni a p incognite

$$\sum_{\alpha=1}^{r} [\varrho_{h1} j_1(\zeta_\alpha) + \cdots + \varrho_{hp} j_p(\zeta_\alpha)] + j_h(\eta_{r+1}) + \cdots + j_h(\eta_p) = \text{cost.} \tag{52}$$

Perchè il sistema ammetta un numero finito di soluzioni è necessario che, mentre ζ_α descrive un ciclo sulla superficie di Riemann, il primo membro della (52) *aumenti di un periodo; devono perciò verificarsi le* (46); *restano allora determinati gli interi g_{hl} e, mediante questi, gli invarianti i_r* (n. 13). *In tale ipotesi il sistema* (52) *ammette i_r sistemi di soluzioni $\zeta_1, \ldots, \zeta_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_p$, ove non si badi all'ordine delle ζ, nè all'ordine delle η.*

Il risultato classico relativo al problema di inversione di Jacobi si ritrova se $\varrho_{hh} = 1$, $\varrho_{hk} = 0$ $(h \neq k)$. Era pur noto (Humbert, Scorza) il caso $r = p$, ove $i_p = \| \pi_{hl} \|$.

[1] *Sulle serie algebriche...*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 36.

Fisica terrestre. — *Sulla profondità dei ghiacciai.* Nota III del Socio CARLO SOMIGLIANA.

III.

PROFILI DI 2° ORDINE.

Consideriamo il caso in cui la velocità è massima nel punto medio della sezione, e sia v_0 il suo valore determinato dall'osservazione. Supposto noto questo solo elemento, presa l'origine nel punto medio stesso, l'espressione v della velocità superficiale, indicando con L la semilarghezza, sarà

$$v = \varphi(y) = v_0\left(1 - \frac{y^2}{L^2}\right)$$

e secondo la nostra teoria l'espressione di u sarà della forma (supposto $u_f = 0$)

$$u = v_0 - \frac{v_0}{L^2}(y^2 - z^2) - \frac{1}{2} H z^2$$

che ponendo

$$v_0 = \frac{1}{2} H k^2 \qquad \frac{1}{2} H - \frac{v_0}{L^2} = \frac{1}{2}\frac{H k^2}{M^2}$$

diviene

$$u = \frac{1}{2} H k^2\left(1 - \frac{y^2}{L^2} - \frac{z^2}{M^2}\right) \tag{10}$$

ove le costanti k ed M sono legate dalla relazione

$$\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} = \frac{1}{k^2}. \tag{11}$$

Il profilo è quindi dato dalla semiellisse di equazione

$$\frac{y^2}{L^2} + \frac{z^2}{M^2} = 1. \tag{12}$$

Siccome H è una costante conosciuta

$$H = \frac{1}{\mu} \varrho g \operatorname{sen} \alpha$$

la costante k sarà conosciuta mediante il valore della velocità superficiale massima v_0, e la M che dà la profondità massima sarà determinata dalla relazione (11). Nella quale quindi dovrà essere

$$\frac{H}{2 v_0} - \frac{1}{L^2} = \frac{\varrho g \operatorname{sen} \alpha}{2 \mu v_0} - \frac{1}{L^2} > 0. \tag{13}$$

Qualora questa diseguaglianza non fosse soddisfatta il profilo ellittico non sarebbe possibile, la (12) rappresenterebbe un'iperbole, inammissibile pel nostro problema.

Questa soluzione del problema del movimento di un ghiacciaio è la sola, che sia già stata considerata. Di essa si è servito il sig. Weinberg per la determinazione teorica del coefficiente d'attrito, nel lavoro citato. Dalle formole precedenti si ha infatti

$$\mu = \frac{\varrho g \operatorname{sen} \alpha}{2 v_0} \frac{L^2 M^2}{L^2 + M^2} \tag{14}$$

formola che può servire a determinare μ, quando siano note v_0 ed M, cioè la velocità massima superficiale e la profondità massima. Reciprocamente quando siano note μ e v_0 abbiamo per la profondità massima

$$M = \frac{L \sqrt{2 \mu v_0}}{\sqrt{\varrho g \operatorname{sen} \alpha L^2 - 2 v_0 \mu}} . \tag{15}$$

Per la velocità superficiale media si trova subito

$$v_m = \frac{1}{L} \int_0^L v \, dy = \frac{2}{3} v_0$$

e per la profondità media

$$z_m = \frac{1}{L} \int_0^L z \, dy = \frac{\pi}{4} M = \frac{L \sqrt{3 \mu v_m}}{\sqrt{\varrho g \operatorname{sen} \alpha L^2 - 3 v_m \mu}} \frac{\pi}{4} .$$

Si ha quindi fra la velocità media e la profondità media una relazione della forma

$$v_m = \frac{a z_m^2}{b + c z_m^2} \tag{16}$$

ove a, b, c sono costanti, i cui valori risultano dalla formola precedente:

$$a = \varrho g \operatorname{sen} \alpha L^2 \qquad b = 3 \mu L^2 \frac{16}{\pi^2} \qquad c = 3 \mu .$$

Le relazioni fra velocità superficiale media e profondità media sono state studiate, in base a dati d'osservazione, da Blümcke A., Hess H. (1) e rappresentate mediante una curva che ha l'andamento di quella rappresentata dalla equazione (16), cioè una curva che col crescere della profondità si avvicina assintoticamente alla retta

$$v = \frac{a}{c} = \frac{1}{3} \frac{\varrho g \operatorname{sen} \alpha}{\mu} \frac{16}{\pi^2} L^2 .$$

(1) Blümcke u. Hess, *Untersuchungen am Hintereisferner.* Wissenschaftliche Ergänzungshefte zur Zeitschrift des D. u. Oe. Alpenvereins. München, 1899, pag. 64.

IV.

Profili di 3° ordine.

Il calcolo del paragrafo precedente non è applicabile, nemmeno in via di approssimazione, quando il massimo della velocità superficiale non cada nel centro della sezione. Anche la curva del profilo non potrà in questo caso essere simmetrica. Può essere utile allora una curva cubica. Potremo porre l'origine ad un estremo della sezione, e la velocità superficiale sarà rappresentata da una funzione di 3° ordine

$$v = \varphi(y) = A_1 y + A_2 y^2 + A_1 y^3$$

a radici reali, che potremo quindi porre senz'altro sotto la forma

$$v = \frac{1}{2} H k y \left(1 - \frac{y}{L}\right) \left(1 - \frac{y}{M}\right) \tag{17}$$

dove con L indichiamo la larghezza del ghiacciaio con M una costante positiva, che potremo sempre supporre maggiore di L, poichè le radici dell'equazione $\varphi(y) = 0$ essendo $0, L, M$, e dovendo M essere esterna all'intervallo $(0, L)$, potremo sempre supporre che la direzione positiva dell'asse y sia quella da 0 ad M. La k è pure una costante che determineremo in seguito, al pari di M. Abbiamo quindi *due costanti* di cui disporre, in base ai dati d'osservazione, nella espressione della velocità superficiale.

Ciò posto, dalle considerazioni generali precedenti risulta subito per l'espressione della velocità u la formola seguente, ove N è una nuova costante,

$$u = \frac{1}{2} H k \left\{ y - \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{M}\right) y^2 - \frac{z^2}{N} + \frac{1}{LM} (y^3 - 6 y z^2) \right\} \tag{18}$$

colla condizione

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{1}{k} \tag{19}$$

poichè deve essere soddisfatta l'equazione

$$\Delta_2 u = - H .$$

Il profilo è rappresentato in questo caso da una cubica e l'equazione $u = 0$ ci dà allora subito per la profondità z in un punto qualsiasi y della sezione, la formola assai semplice

$$z^2 = N \frac{y (y - L) (y - M)}{6 N y + LM} . \tag{20}$$

Conviene ora esaminare come possano essere determinate le costanti che compaiono nelle formole precedenti mediante i dati delle osservazioni.

La cubica, rappresentata dalla (17), ci dà la *curva della velocità superficiale* la quale è composta di un unico ramo, attraversa l'asse delle y nei punti $y = 0$, L, M e ci dà un arco posto dalla parte delle v positive, che è quello che corrisponde ai dati osservati. Per l'angolo ω della tangente coll'asse y abbiamo

$$\operatorname{tg} \omega_y = \frac{dv}{dy} = \frac{1}{2} \mathrm{H} k \left(1 - 2\left(\frac{1}{\mathrm{L}} + \frac{1}{\mathrm{M}}\right) y + \frac{3y^2}{\mathrm{LM}}\right)$$

quindi nei due punti estremi della sezione

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{1}{2} \mathrm{H} k \qquad \operatorname{tg} \omega_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} \mathrm{H} k \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}} - 1\right).$$

Siccome i due angoli ω_0, ω_{L} possono essere direttamente misurati sulla curva

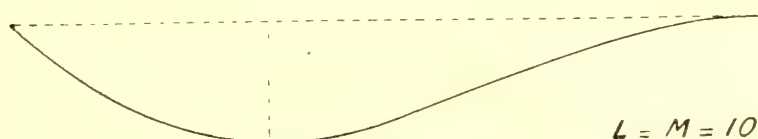



FIG. 3 (Curva della velocità).

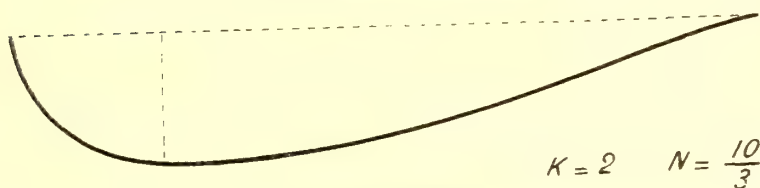



FIG. 4 (Profilo).

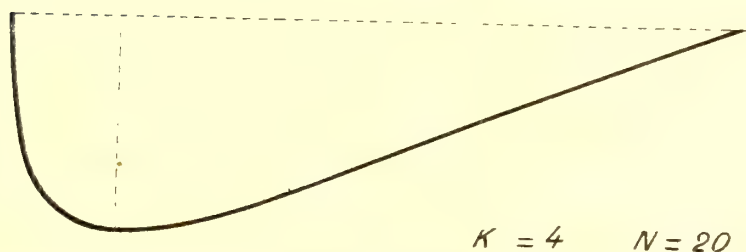



FIG. 5 (Profilo).

della velocità superficiale, così, quando ne sia ammissibile una rappresentazione colla cubica, le due relazioni precedenti dànno i valori di k e di M. La (19) determinerà N e tutto allora sarà noto nella formola (20) che dà il profilo del fondo.

Per $\mathrm{M} = \mathrm{L}$ si ha $\omega_{\mathrm{L}} = 0$, cioè la curva-velocità è tangente all'asse della sezione. È questa una particolarità che si osserva in qualcuna delle curve rilevate e le formole in questo caso possono determinare le proprietà del profilo, a cui corrisponde questa particolarità (v. fig. 3).

Ma la determinazione delle costanti può farsi anche, e sarà più utile dal punto di vista pratico, mediante la posizione del massimo della velocità superficiale, ed il valore di questo massimo di velocità.

Poniamo $y = \alpha L$; il valore di α corrispondente al massimo di v è dato dall'equazione

$$3\alpha^2 \frac{L}{M} - 2\left(1 + \frac{L}{M}\right)\alpha + 1 = 0$$

da cui

$$\frac{M}{L} = \frac{3\alpha^2 - 2\alpha}{2\alpha - 1} = \psi(\alpha). \tag{21}$$

Questa formola dà M quando sia nota la posizione del massimo, cioè α. Ora si ha la seguente corrispondenza di valori

α	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	∞
$\psi(\alpha)$	0	1	∞	0	1	∞
M	0	L	∞	0	L	∞

Siccome M deve essere uguale o maggiore di L, così α dovrà essere compreso fra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{2}$. Per $\alpha = \frac{1}{3}$ si ha $M = L$, e la curva-velocità è tangente alla linea della sezione nell'estremo $y = L$.

Per $\alpha = \frac{1}{2}$ si ritorna al caso del profilo ellittico già considerato.

Se indichiamo con v_M il valore massimo della velocità superficiale dalla (17) risulta per la (21)

$$v_M = \frac{1}{2} H k \frac{(1 - \alpha)^2}{2 - 3\alpha} \alpha L. \tag{22}$$

Questa relazione, quando siano misurati α e v_M, ci darà k; M sarà determinato dalla (21) ed N dalla (19). Possiamo quindi concludere:

Quando nella curva-velocità superficiale si ha un massimo che non è nel punto di mezzo della sezione, e dista da un estremo non meno di un terzo della lunghezza della sezione, sarà possibile una rappresentazione della velocità stessa mediante un arco di una curva di 3° ordine, ed il profilo corrispondente sarà dato pure da una curva di 3° ordine, rappresentata dalla equazione (20).

Matematica. — *Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota VII del Corrisp. FRANCESCO SEVERI.

16. Il teorema con cui si chiude la Nota VI ([1]) offre un criterio di equivalenza algebrica di due curve C_1, C_2. Ho già dato in passato (Math. Annalen, 1906) due altri criterî per la dipendenza algebrica di curve tracciate sopra una superficie; e cioè:

1) *Un criterio geometrico*: La condizione necessaria e sufficiente affinchè le due curve C_1, C_2, dello stesso ordine, tracciate sulla superficie F, sieno algebricamente dipendenti, per modo che risulti:

$$\lambda C_1 \equiv \lambda C_2 \text{ (per } \lambda \text{ intero conveniente)},$$

è che sieno soddisfatte le condizioni aritmetiche:

$$[C_1, C_1] = [C_1, C_2] = [C_2, C_2];$$

ove $[C_1, C_1]$, $[C_2, C_2]$ sono i gradi virtuali di C_1, C_2 e $[C_1, C_2]$ il numero dei punti ad esse comuni.

2) *Un criterio trascendente*: La condizione necessaria e sufficiente per l'equivalenza algebrica delle C_1, C_2, aventi lo stesso ordine, è che esista su F un integrale semplice di 3ª specie, il quale possegga le sole curve logaritmiche C_1, C_2.

Il criterio 2) costituisce il ponte di passaggio fra la mia teoria della base per la totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica F ed il teorema fondamentale di Picard concernente il minimo numero di curve di F, che possono assegnarsi ad arbitrio come curve logaritmiche d'un integrale semplice di 3ª specie.

Orbene, *il criterio trascendente del n. 15 costituisce il ponte di passaggio fra la teoria della base e la nozione di curve primitive introdotta da Poincaré.* È ciò che ci proponiamo di mostrare nel numero successivo.

17. Su F sieno tracciate t curve algebriche $C_1, C_2, \dots, C_t$. Sieno $s_{1i}, s_{2i}, \dots, s_{ti}$ le somme fornite dall'integrale u_{q+i} $(i = 1, \dots, p-q)$ rispettivamente nei gruppi $(C_1, A), (C_2, A), \dots, (C_t, A)$. Cerchiamo sotto quali condizioni è possibile determinare t numeri interi $\mu_1, \dots, \mu_t$ (positivi, negativi o nulli, ma non tutti nulli), tali che per ogni curva A del fascio $|A|$,

([1]) Questi Rendiconti, pag. 328.

considerato nel n. 15, sussistano le relazioni:

$$\mu_1 s_{1i} + \cdots + \mu_t s_{ti} \equiv 0 \text{ (modd. } 2p \text{ periodi non ridotti)} \quad (i = 1, 2, \dots, p - q). \tag{25}$$

Circolando attorno ad un valor singolare $y = b$ la somma s_{ji} aumenta di $\lambda_{ji}\,\omega_i(y)$, ove λ_{ji} è un conveniente intero ed $\omega_i(y)$ è il periodo di u_{q+i} al ciclo nullo τ avvolgente i due punti critici ξ_1, ξ_2, che tendono al punto di contatto del pian tangente $y = b$, col tendere di y a b (n. 10, Oss. 2ª). Sicchè, se è possibile di scegliere gl'interi $\mu_1, \dots, \mu_t$ non tutti nulli, in guisa tale che sia:

$$\lambda_{1i}\,\mu_1 + \cdots + \lambda_{ti}\,\mu_t = 0 \qquad (i = 1, \dots, p - q),$$

l'espressione $\sum_j \mu_j s_{ji}$ si conserva olomorfa attorno ad $y = b$.

Analoghi gruppi di equazioni di condizione per $\mu_1, \dots, \mu_t$ si avranno in corrispondenza agli altri valori singolari di y, qualora si voglia che l'espressione $\sum_j \mu_j s_{ji}$ si conservi olomorfa dovunque, cioè ch'essa riducasi ad una costante. Ora, se t è maggiore del numero $N(p - q)$ delle equazioni di condizione che si vengono così a scrivere — ove N è la classe della superficie F — si potranno di certo determinare valori interi non tutti nulli delle μ soddisfacenti al complesso di quelle equazioni; e così per tali valori delle μ saranno soddisfatte le relazioni:

$$\mu_1 s_{1i} + \cdots + \mu_t s_{ti} \equiv c_i,$$

ove le c_i sono costanti. Ma per $y = \infty$ le somme s_{ji} sono identicamente nulle (n. 6), dunque è $c_i = 0$; e quindi per quei valori non tutti nulli degl'interi μ sono soddisfatte le (25).

Le s_{ji} $(i = 1, \dots, p - q)$ sono $p - q$ funzioni normali di Poincaré (n. 10, Oss. 3ª), relative alla curva C_j: e precisamente quelle che provengono dagl'integrali $u_{q+1}, \dots, u_p$.

Le funzioni normali r_{jh} $(h = 1, \dots, q)$ che provengono dagl'integrali $I_1, \dots, I_q$, son costanti, definite a meno di multipli interi dei $2q$ periodi ridotti.

Il ragionamento svolto ci dice che, data F, esiste un intero $\varrho \geq 1$, tale che su F si possono tracciare ϱ curve $C_1, \dots, C_\varrho$, le quali forniscano, rispetto agl'integrali u_{q+i}, somme s_{ji} $(j = 1, \dots, \varrho)$ linearmente indipendenti, nel senso che non sussista fra esse alcuna relazione del tipo $\sum_j \mu_j s_{ji} \equiv 0$, per valori *interi non tutti nulli* delle μ; ma che data un'altra curva qualsiasi C di F e indicate con s_i le somme fornite da C mediante gl'integrali u_{q+i} $(i = 1, \dots, p - q)$, sussistano, per valori interi delle $\mu_1, \dots, \mu_\varrho$, le relazioni:

$$\mu s_i \equiv \mu_1 s_{1i} + \cdots + \mu_\varrho s_{\varrho i} \qquad (i = 1, \dots, p - q), \tag{26}$$

con $\mu \neq 0$. Si ottiene così il teorema:

Si posson fissare sopra una data superficie F ϱ *curve* $C_1, \ldots, C_\varrho$ (*curve primitive*), *ove* ϱ *è un carattere dipendente solo da* F, *tali che le funzioni normali di Poincaré relative ad una curva* C *qualsiasi di* F *e corrispondenti agl'integrali* $u_{q+1}, \ldots, u_p$, *i quali provengono dal sistema aggiunto al sistema delle sezioni piane di* F, *si esprimono mediante combinazioni lineari a coefficienti numerici razionali delle analoghe funzioni normali spettanti a* $C_1, \ldots, C_\varrho$. *Le altre funzioni normali inerenti a* C *e corrispondenti agl'integrali semplici di 1ª specie* $I_1, \ldots, I_q$, *che appartengono ad* F, *riduconsi a costanti.*

Questo è sostanzialmente il risultato di Poincaré. Il criterio del n. 15 ci dice che le curve $C_1, \ldots, C_\varrho$ per cui non valgono relazioni del tipo (25) ($t = \varrho$) per valori non tutti nulli delle μ, son curve algebricamente indipendenti, e che ogni curva C di F, in quanto per essa valgano le relazioni (26), con $\mu \neq 0$, è algebricamente dipendente da $C_1, \ldots, C_\varrho$. Si ha così di nuovo il teorema fondamentale della teoria della base:

Su F *posson tracciarsi* ϱ *curve algebricamente indipendenti, tali che ogni altra curva di* F *sia algebricamente dipendente da quelle.*

Fisica terrestre. — *Gradiente termico e accelerazione verticale nell'atmosfera.* Nota del Socio Luigi de Marchi.

Nella precedente Nota ho accennato alla necessità di tener conto, nel calcolo del gradiente adiabatico, invece che dell'equazione dell'equilibrio idrostatico, di quella del moto verticale

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma - \alpha\gamma f(w) + \frac{\gamma}{g}\frac{dw}{dt}$$

colla quale l'espressione del gradiente termico verticale sarebbe (prescindendo dagli scambi d'energia coll'esterno)

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{A}{c_p}\left[1 + \frac{1}{g}\frac{dw}{dt} - kf(w)\right]. \tag{1}$$

La funzione d'attrito $f(w)$ è ignota; ammettendola, come in altri casi della meccanica, una funzione quadratica della velocità, il termine d'attrito diminuirebbe in ogni caso il gradiente. Invece il termine d'accelerazione lo aumenterebbe in caso di moto ascendente accelerato o discendente ritardato, lo diminuirebbe nei due casi contrarî.

Dato il piccolo valore del coefficiente d'attrito, e il valore generalmente molto piccolo dell'accelerazione verticale rispetto alla g, questi termini di correzione sono comunemente ritenuti trascurabili. È a notare tuttavia che

le misure di velocità verticale, ottenute con lancio di palloni piloti, non permettono una valutazione sicura dell'accelerazione *attuale* in tutti i punti della verticale, ma dànno soltanto valori approssimati dell'accelerazione *media* su tratti di 100, 150 e più metri. Il più breve intervallo fra due osservazioni successive al teodolite è infatti il minuto primo e la velocità ascensionale del palloncino è sempre fra 100 e 200 metri al minuto. Inoltre le misure sono di regola compiute con tempo sereno e aria tranquilla, senza intensi movimenti verticali. Fra le misure a mia disposizione [1] trovo un solo caso di lancio di pallone con tempo burrascoso (*boïg*) ed è quello di Hergesell del 7 giugno 1913, che diede i seguenti dati medi:

Altezze m.	Velocità ascensionale $^{m}/_{mi}$	Velocità verticale dell'aria $^{m}/_{sec}$
0-864	198	+ 1.72 ascendente
864-956	48	— 0.75 discendente
956-1192	236	+ 2.38 ascendente

Essendo la velocità di partenza dal suolo, ove $w = 0$, di 93 $^{m}/_{mi}$, nel primo strato la velocità assunse valori certo molto maggiori di 200, subendo quindi nel passaggio al secondo un rallentamento pure di oltre 200 (oltre 3 $^{m}/_{sec}$) che può essersi anche verificato per salto in un brevissimo tratto e in un intervallo di pochi secondi. Lo stesso dicasi, a maggior ragione, per il passaggio dal secondo al terzo strato, dove la variazione di velocità media può essere stata di 300 $^{m}/_{mi}$ (5 $^{m}/_{sec}$). Che nell'atmosfera si verifichino salti di velocità verticale, come si verificano per la velocità orizzontale, per la temperatura e per l'umidità, non si può mettere in dubbio, perchè risponde anzitutto al carattere più o meno turbolento dei moti dell'aria. Inoltre una rapida corrente ascendente viene a rallentarsi in alto per l'inerzia degli strati sovrastanti in cui si genera per compressione un gradiente barico efficace $\left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma\right)$ discendente. Questo rallentamento può avvenire in modo brusco, come lo dimostra l'espandersi del *pino vulcanico* [2]. Ad esso deve corrispondere una diminuzione del gradiente termico, che potrà essere o brusca, determinando uno strato di salto, o lenta, segnando un passaggio più graduale dalle condizioni inferiori dell'aria ascendente a quelle superiori dell'aria ferma. Ciò potrebbe in particolare spiegare i varî tipi di passaggio dalla troposfera alla stratosfera: la brusca inversione di tempera-

[1] Le misure più rigorose e complete di velocità verticale sono quelle fatte con due teodoliti da Gamba e Viterbi a Pavia (Annali Uff. Centr. Meteor. XXXVI, parte 1ª, 1914) e quelle di Hergesell con un teodolite solo a micrometro e con base graduata pendente dal pallone (Beiträge zur Phys. d. freien Atmosph., vol. VI, 1914, pag. 187).

[2] Wegener A., *Thermodynamik der Atmosphäre.* Leipzig, 1911, pag. 140 seg.-pag. 213.

tura o lo strato a gradiente minore, che si interpone fra l'alta troposfera a forte gradiente e la stratosfera a gradiente nullo ([1]).

Una accelerazione ascendente si determina quando si condensi *improvvisamente* una certa quantità di vapore ([2]) a una certa altezza, come deve verificarsi nel caso di aria soprasatura. Allora per lo sviluppo improvviso di calore si verifica una rapida espansione dello strato condensante con improvviso aumento di tensione interna, che però rapidamente si mette in equilibrio colla pressione esterna p. Siamo come nel caso di una esplosione, nel quale il lavoro esterno dell'unità di peso è $p(v_2 - v_1)$, essendo v_1 il volume specifico iniziale e v_2 il volume finale. Indicando con T_1, T_2 le relative temperature assolute, l'equazione del primo principio è

$$c_v(T_2 - T_1) + Ap(v_2 - v_1) = rq$$

ove q è il peso di vapore condensato nell'unità di peso d'aria, r è il calore di vaporizzazione dell'acqua, c_v il calore specifico a volume costante.

L'aria subisce prima una rapida dilatazione per improvviso aumento della tensione interna, e poi una parziale contrazione per mettersi in equilibrio colla pressione esterna; come risultato finale essa si è dilatata a pressione costante e si potrà scrivere

$$v_2 - v_1 = \alpha v_1 (T_2 - T_1) \quad \text{ossia} \quad T_2 - T_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\alpha \gamma_2}$$

dove γ_1, γ_2 sono i pesi specifici iniziale e finale, $\alpha = {}^1/_{273}$. L'equazione precedente si può quindi scrivere, ponendo $p = R\gamma_1 T_1$,

$$\left(\frac{c_v}{\alpha} + ART_1\right)(\gamma_1 - \gamma_2) = \gamma_2 rq\,.$$

Ma $\gamma_1 - \gamma_2$ non è che la forza ascensionale che l'unità di volume assume per la dilatazione, e che le imprimerà l'accelerazione (essendo $\frac{\gamma_2}{g}$ la massa dell'unità di volume nell'aria dilatata):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{grq}{273\,(c_v + A\,R\alpha\,T_1)}$$

o, approssimativamente, dato che la temperatura si scosti non molti gradi dallo 0°, com'è nelle nubi basse e medie,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{grq}{273 \cdot c_p}\,. \tag{2}$$

([1]) Schmauss A., *Die Substratosphäre* (Beiträge zur Phys. d. freien Atmosp., VI, pag. 153, 1914).

([2]) Nel caso di condensazione progressiva in una corrente d'aria satura si ottiene la formola nota del gradiente in aria satura coi termini di correzione accennati sopra e nella Nota precedente.

Poichè non si può stabilire fino a quale grado di soprasaturazione possa giungere il vapore in una corrente ascendente, non possiamo, per la valutazione di q, che fondarci su apprezzamenti indiretti [1]. Un indizio ci è dato dall'intensità delle piogge temporalesche, che in alcuni casi raggiungono parecchi millimetri e in casi eccezionali parecchi centimetri d'altezza in pochi minuti. Una pioggia di mezzo centimetro rappresenta 5000 gr. per mq. e, supponendo che la nube temporalesca abbia lo spessore di un chilometro, essa rappresenterebbe una condensazione di 5 gr. per metro cubo, ossia, alla pressione di 600 mm., circa 5 gr. per Kg., oltre la massa d'acqua che rimane sospesa nella nube, in goccioline più minute. Possiamo quindi ammettere che il valore di q possa essere, anche in casi non eccezionali, di parecchi grammi. Ponendo $q = 0{,}005$, $r = 607$, $c = 0{,}238$, la condensaziono totale di 5 gr. produrrebbe un'accelerazione verticale ascendente di 0,53 $^{m}/_{sec}$; per valori minori o maggiori di q essa diminuisce o cresce proporzionalmente.

Con tale accelerazione l'unità di volume d'aria si solleverebbe a condensazione compiuta, e continuerebbe ad innalzarsi, con accelerazione sempre minore finchè trova lo strato superiore dove $\gamma = \gamma_2$, oltre il quale continuerebbe ad innalzarsi con moto ritardato. Ponendo

$$\gamma_2 = \gamma_1 \, 10^{-\frac{h}{18400}}$$

ove h è il dislivello fra lo strato a peso specifico γ_2 e quello a γ_1, si ha approssimativamente

$$h = 18400 \operatorname{Log} \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 18400 \operatorname{Log} \left(1 + \frac{\alpha r q}{c_p}\right) = 18400 \cdot \mathrm{M} \frac{\alpha r q}{c_p}$$

dove M è il modulo dei logaritmi (0,43429). Per $q = 0.005$ si avrebbe $h = 375$ circa. Poichè nei grandi temporali la pioggia data dal nembo temporalesco è anche due o più volte quella da noi supposta di mezzo centimetro e lo spessore del nembo, nella sua parte inferiore più densa, è minore di un chilometro, la q può ammettersi anche doppia, tripla etc. di

[1] Bisogna tener conto del fatto che la condensazione in una massa d'aria satura o soprasatura è limitata dal calore da essa sviluppato. Si leggano in proposito le belle Memorie 3ª e 4ª di von Bezold sulla Termodinamica dell'atmosfera (Sitzungsberichte Akad. Berlin, 1890, 1892; Abhandlungen, Braunschweig 1906) dove è data una costruzione grafica per il calcolo della q in corrispondenza a varî gradi di soprasaturazione. A 600 mm. di pressione (circa 2000 m. d'altezza) una massa d'aria a 0° contenente 8, 9, 10, 11 gr. di vapore per chilogrammo ne condenserebbe rispettivamente solo 1,5; 2; 2,5; 3 circa. Rimane tuttavia a dimostrare la possibilità che il vapore si mantenga soprasaturo nell'aria ricca di pulviscolo: il Bezold (Abhandl. pp. 191-192) ne dà qualche indizio. Bisogna anche osservare che l'interposizione di nubi può, arrestando la radiazione solare, determinare improvvisi abbassamenti di temperatura e quindi rapide condensazioni anche senza soprasaturazione.

quella supposta e il dislivello h superare anche sensibilmente il chilometro. L'aria impiega parecchi minuti a percorrerlo, nei quali può assumere velocità verticali anche di parecchie decine di metri al secondo. Ciò nell'ipotesi che il movimento possa svolgersi senza impedimenti: in realtà esso provocherà moti vorticosi coll'aria ambiente. Così si spiegano e la rapida spinta dei cumuli verso l'alto, e i moti turbolenti che in essi si generano, e le velocità verticali sopra gli 8 $^{m}/_{sec}$ necessarie per mantenere in sospensione le gocce più grosse, e per spezzarle generando, secondo la teoria di Simpson, la separazione delle elettricità e gli alti potenziali elettrici.

Le accelerazioni così generate non possono avere effetto sensibile sul gradiente termico verticale; non così il ritardo successivo che deve avvenire in modo molto rapido, spesso brusco, per l'inerzia degli strati sovrastanti. Già prima che arrivi la colonna ascendente questi, non cedendo abbastanza presto, sono compressi e spinti verso l'alto oltre il limite di condensazione del vapore che contengono, come dimostra la formazione delle *cappe* al di sopra e a qualche distanza dalla testa del cumulo [1]. Questa compressione degli strati superiori deve generare un gradiente verticale discendente, che rallenta il moto ascensionale sottostante, il quale però è talvolta così energico che riesce ad attraversare la cappa e a sollevarsi centinaja e migliaja di metri sopra di essa. I netti lineamenti superiori dei cumuli che spesso hanno forma turrita, a piattaforma [2], dimostrerebbero però un brusco arresto del moto ascendente, al quale corrisponde un'accelerazione negativa che può essere di parecchi metri al secondo. Essa determinerebbe, in base alla (1), una brusca diminuzione del gradiente termico verticale, e forse anche una inversione di temperatura quale si verifica spesso al di sopra delle nubi.

[1] Wegener, *Thermodynamik der Atmosphäre*, pp. 213, 217 seg.; Crestani, *Le Cappe* (Bollett. bimens. della Soc. Meteor. ital., 1918).

[2] Ibid., pag. 208, tavv. VII, VIII.

Paleontologia. — *Silicospongie fossili della Liguria occidentale.* Nota del Socio C. De Stefani.

VIII.

Crocetta.

Probabilmente la stessa specie di *Lychniscosa* (se non diversa per presenza di spine) ho trovato in un luogo adiacente della stessa zona, alla Crocetta entro un grosso pezzo ceruleo macchiato di bianco, più calcareo della roccia precedente (Calcite, Opale, raro Quarzo, Sericite, cubetti di Limonite pseudomorfa), costituito da frantumi diversi.

Intreccio con andamento irregolare diretto in tutti i sensi: maglie con dimensioni alquanto diverse, prevalentemente quadrate, ma talora triangolari ed esagone; qualche volta quando furono convertite in calcite, il Quarzo ne occupa le cavità centrali.

Le maggiori Spicole, delle quali vedesi talora il canale interno, forse debolmente spinose, carattere che mancherebbe a Palazzo Doria, sono fornite di Lychnische, e queste espandendosi nei punti d'incrocio, lasciano in alcune maglie appena un foro circolare. Sottili *Epirhize* trasversali cinte da tessuto a losanga in serie un po' distorte intramezzate a quinconce da Aporhize circolari con reticolo periferico raggiato. Nella compagine parenchimale e dermale sono *Diactiniae*, *Pentactiniae*. Evvi qualche rara *Triaene* di Silicospongia *Tetractinellide*.

Ad una *Hexasterosa* diversa dalla *Lychniscosa* precedentemente descritta appartengono altri esemplari trovati nella stessa località della Crocetta. Ivi presi varî frammenti di un calcare molto siliceo, grigio scuro per materie carboniose, contenente varî cubetti di Limonite pseudomorfa, con sporgenze e vene di Silice grigio chiara a volte alquanto ferruginosa. Si direbbe costituito in molta parte di una Hexactinellide dictyonale convertita in parte in Calcite. L'intreccio si vede bene alla superficie esposta alle intemperie o leggermente acidulata; meno bene nelle sezioni sottili ed in queste con poca luce, quasi punto per trasparenza. Solo qualche piccola parte dell'intreccio notasi entro la Calcite: nelle sporgenze silicee è più grossolano e più confuso. Applicata ad un vetrino porta oggetti la superficie di un frammento parallelo alla stratificazione, e sottoposta all'acido la superficie libera, questa si scioglie abbondantemente, lasciando una fioritura, si direbbe una serie di

colonne verticali costituite da microscopici prismi piramidali di Quarzo concresciuti in mezzo al Calcare, irregolarmente aggruppati intorno ad un asse, aderenti fra loro alla base, paragonabile alle efflorescenze di ghiaccio uscenti l'inverno dalla superficie di una marna o di una argilla. Si prenderebbero a prima vista per residui di una *Lithistida.* Si tratta di una trasformazione cristallina del tessuto primitivo di silice colloide, le cui tracce in tal caso rimangono in gran parte scancellate: altra volta il tessuto fu convertito in calcite; il Quarzo riempie gli spazî vuoti e risponde, dirò così, alla parte negativa dell'intreccio. In tal caso sulle superfici acidulate, nei tratti più calcarei, regolari serie di microscopici puntini bianchi rispondono al centro delle microscopiche maglie, che allorquando il Calcare è completamente disciolto, scompaiono: così pure a volte vedesi la forma di grandi *Hexactiniae* isolate, forse di *Lyssacina*, trasformata in calcare, rimasta vuota in mezzo alla fioritura quarzosa.

Quando la dissoluzione dei frammenti è completa, essi si sfanno interamente lasciando un abbondante residuo di cristallini quarzosi con minutissimo pulviscolo limonitico e carbonioso.

All'esterno l'intreccio apparisce abbastanza regolare, rettangolare; non ho osservato Lychnische, nè spinosità. Raramente si vede qualche canale assile. L'intreccio microplerico interno è minutissimo e meno ben conservato perchè le Spicole più minute sono le prime a scomparire.

Talora le *Hexactiniae* agl'incroci si amplificano formando sottili espansioni che fanno rotonde le maglie.

Appaiono qua e là qualche *Hexactinia* isolata, *Pentactinia*, non che *Diactinia.*

In costa agli strati e nelle sezioni interne rispondenti, vedonsi Ostia di *Epirhize* inalanti, ovali, allungate secondo gli strati, allineate in serie alterne abbastanza regolari. Sono cinte dall'intreccio disposto in 6 o 7 giri, concentricamente a losanga, ben visibile in certi tratti, quasi a mo' di *Nummuliti.* Vi si accompagnano *ostia* minutissime come la capocchia d'un piccolo spillo.

Sulle superfici normali alla stratificazione vedonsi più nettamente, in quinconce con le *Epirhize*, *Postica* di *Aporhize* esalanti, circolari od appena ellittiche con piccolo anello d'intreccio radiante all'intorno, raramente ramificato; perciò diverso da quello che circonda le *Epirhize*: esso proviene dalla superficie esterna e può notevolmente restringere o anche superare le aperture delle predette *Postica.*

Non avendo osservato Lychnische sarebbe una *Hexasterophora* della Tribù *Hexasterosa*, Subtribù *Inermia.* Non manca di qualche affinità con le *Craticularia* che sono *Hexast. incertae sedis*; ma trattandosi di esemplari così mal conservati come i nostri le determinazioni sono necessariamente incerte. Qualora si trattasse di una *Lychniscosa*, per le *Epirhize* trasversalmente ovali la paragonerei ad una *Sporadoscinia* Schrammen: per

la forma delle *Epirhize* e delle *Aporhize*, non però per l'intreccio circostante a queste ultime che è più radiale e più regolare, e per l'intreccio generale che è pur più regolare, la comparerei anche col *Ventriculites radiatus* Mantell nel quale furono unite parecchie specie di tutta la Creta superiore.

Gli Spongiari della Biscazza che sono quasi coetanei a quelli di San Martino più antichi hanno affinità ma sono *Lychniscosa*: inoltre i primi hanno intreccio più irregolare ed i secondi hanno Epirhize ed Aporhize di dimensioni minori.

Inclusi alla presente specie oltre a qualche *Oxyhexactinia* probabilmente appartenente ad una *Hexasterophora Lyssacina*, vi sono qualche Spicola di *Monactinellidae*, qualche *Tetraxane* di *Tetractinellidae* e rari Rabdi di *Rhizomarinae* e *Megarhizidae*.

Del resto attesa l'incompletezza dei caratteri osservati e l'imperfetta conservazione le *Lychniscosa* e l'apparente *Hexasterosa* di questi luoghi potrebbero appartenere ad unica specie.

Casa Bisognaschi.

Poco lontano dalla Crocetta, presso casa Bisognaschi sulla rotabile del Naso di Gatto, entro la schisto lucente è un calcare rossastro, prevalentemente siliceo (Calcite, Quarzo con inclusioni liquide, Sericite, rara Clorite, Ematite, Limonite, raro Rutilo, microliti di Apatite, pulviscolo carbonioso), bene stratificato con tracce di una *Hexasterosa* apparentemente identica a quella della Crocetta. Intreccio dictyonale a piccole maglie quadrate di vario ordine. Macrosclere di rado ben visibili, senza Lychnische, con minutissimo intreccio di Microsclere raramente integre, meglio visibile nelle parti limonitiche ed entro il Quarzo, anche a traverso la Clorite a larghe lamine, meno visibile entro la Calcite. Canaletti di Aporhize circolari con intreccio periferico radiale.

Nelle sezioni e nel residuo della soluzione silicea *Hexactiniae* isolate, *Diactiniae* ed un *Uncino* residuo di qualche *Uncinataria*, se non forse proprio della specie.

Qualche grande *Oxyhexactinia* isolata appartiene ad una *Hexasterophora Lyssacina*.

Sotto Casa Doria.

Sempre poco lontano dalla Crocetta, al bivio delle strade sotto Casa Doria sono Schisti lucenti, di colore plumbeo, senza calcare (Opale, Quarzo, Sericite, Pirite, Limonite, Rutilo, materia carboniosa) con piccole lenti chiare, puramente silicee costituite da una *Hexasterosa* con intreccîo hexactinico dictyonale liscio senza spine, senza Lychnische, a maglie quadrate, parallelogramme, talora triangolari, ed in varî casi rotondeggianti per espansione

dei nodi d'intersezione delle *Hexactiniae* maggiori e minori nelle parti probabilmente dermali o gastrali. Questo intreccio apparisce più irregolare intorno ai canali acquiferi: nel rimanente è abbastanza regolare.

Per entro alle sezioni sottili lo si vede meglio, secondo il solito, specialmente quello più minuto, nelle parti limonitiche, essendo le Spicole trasformate in Pirite, quindi in Limonite.

A volte la Limonite, come il Quarzo e la Sericite occupano le parti centrali delle maglie costituite da Silice colloide, la qual cosa si vede bene al Polariscopio a Nicols incrociati. Solite piccole Epirhize con reticolo circostante a losanghe schiacciate trasversali, in serie alternanti a quinconce con Aporhize circolari, talora in mezzo ad intreccio formato da minutissime maglie con forellini circolari come alla costa di S. Alberto.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla « piccola variazione » di una curva piana algebrica reale.* Nota di Luigi Brusotti, presentata dal Corrisp. L. Berzolari [1].

1. Sia C^n una *curva piana algebrica reale* (d'ordine n) che non abbia altre singolarità all'infuori di punti doppî ordinarî. Fra tali punti doppî quelli reali saranno nodali od isolati.

La parte reale di C^n sarà una *curva grafica* Γ, composta in generale di circuiti e di punti isolati. I punti doppî nodali saranno o doppî per un circuito o comuni a due circuiti distinti.

È noto allora [2] che cosa si intenda per « *piccola variazione* » *topologica* di Γ, nel senso più largo qui usato, nel senso cioè che essa conservi eventualmente alcuni dei punti doppî, sciogliendo soltanto i rimanenti.

Non risulta peraltro se una « piccola variazione » topologica di Γ topologicamente individuata possa sempre tradursi in una « *piccola variazione* » *algebrica* di C^n, cioè se la trasformata Γ_1 di Γ sia sempre topologicamente identificabile colla parte reale di una curva algebrica reale C_1^n d'ordine n, la quale giaccia in un sistema algebrico reale (per esempio in un fascio reale) contenente la C^n, e nell'intorno reale di questa.

Il quesito fu già da me posto e risolto affermativamente in un caso particolare, quando cioè la C^n si spezzi in componenti prive di punti doppî

(1) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

(2) Brusotti, *Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata* [Annali di Matematica, serie 3ª, tomo 22 (1913), pp. 117-169]; *Sui fasci di curve grafiche* [Succ. Bruni, Pavia, 1919, pp. 1-204].

reali ed i punti doppî reali di C^n vengano tutti sciolti dalla « piccola variazione » topologica assegnata, riuscendo anzi in questo caso la « piccola variazione » algebrica effettuabile in un fascio del quale venne pure indicata la costruzione ([1]).

Qui fondandomi sopra un metodo di rappresentazione iperspaziale, che mi sembra non privo di interesse per la sua semplicità, giungo a rispondere, sempre in senso affermativo, al quesito più generale, risolvendo così esaurientemente una questione che si può ritenere fondamentale nello studio della « piccola variazione ».

2. Premetto alcune osservazioni di carattere puramente algebrico e indipendenti da considerazioni di realità.

Si rappresentino le curve piane di ordine n coi punti di uno spazio lineare S_r ad $r = \frac{1}{2} n(n+3)$ dimensioni. I punti-immagine di curve dotate di punto doppio sono i punti di una ipersuperficie V d'ordine $3(n-1)^2$.

Un punto P semplice per V sarà immagine di una curva dotata di un sol punto doppio ordinario M.

Si ricordi che, in un fascio di curve piane d'ordine n, una curva avente punto doppio ordinario in un punto-base semplice è da contarsi due volte fra le $3(n-1)^2$ curve del fascio dotate di punto doppio. Ne segue che l'iperpiano tangente a V in P è l'immagine del sistema lineare ∞^{r-1} delle curve piane d'ordine n passanti semplicemente per M ([2]).

3. Più in generale se una curva piana C^n d'ordine n possiede d punti doppî ordinarî $M_1, M_2, \ldots, M_d$, il suo punto-immagine P sarà d-plo per V. Anzi esso sarà d-iperplanare, essendo gli iperpiani tangenti in P alle d falde le immagini dei d sistemi lineari ∞^{r-1} delle curve piane d'ordine n passanti rispettivamente per $M_1, M_2, \ldots, M_d$.

Si osservi ora che *il sistema delle curve d'ordine n aggiunte a C^n è regolare* ([3]), ossia che il passaggio semplice di una curva piana di ordine n

([1]) *Sulla generazione* ecc. (cit.), § 9, § 10.

([2]) Ne segue pure, ma qui non occorre, che un iperpiano tangente a V la tocca lungo un S_{r-3}, immagine del sistema lineare ∞^{r-3} di curve piane d'ordine n passanti doppiamente per uno stesso punto M.

([3]) Proprietà nota per C^n irriducibile; cfr. Bertini, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* [Annali di Matematica, serie 2ª, tomo 22 (1894), pp. 1-40]; n. 17. Basterà dunque provare che se l'affermazione vale per C^n spezzata in h componenti irriducibili, essa vale per C^n spezzata in $h+1$. Sia $f \equiv f_1 f_2 = 0$ l'equazione di C^n, essendo $f_1 = 0$ (d'ordine n_1) spezzata in h di dette componenti ed $f_2 = 0$ (d'ordine n_2) la rimanente. Per il teorema di Noether $Af + B\varphi$ nel caso semplice, il sistema delle aggiunte d'ordine n a C^n è:

$$A_2 f_1 + A_1 f_2 = 0 \tag{1}$$

ove $A_i = 0$ varii comunque nel sistema delle aggiunte d'ordine n_i ad $f_i = 0$. Ma (1) è

per i d punti doppî di C^n equivale a d condizioni lineari indipendenti. Ciò per la rappresentazione iperspaziale si traduce nel fatto che *i d iperpiani tangenti in* P *alle d falde di* V *hanno in comune un* S_{r-d} *e non uno spazio di maggior dimensione.* Ne segue che d' iperpiani comunque scelti fra essi hanno in comune un $S_{r-d'}$ e non uno spazio di maggior dimensione.

4. Suppongo che, nella rappresentazione in S_r, curve reali abbiano punti-immagine reali.

Osservo che la parte reale di V consterà allora di una varietà Ω (ad $r-1$ dimensioni reali) costituita dai punti-immagine delle curve reali dotate di punto doppio reale e di una varietà doppia isolata (ad $r-2$ dimensioni reali) costituita dai punti-immagine delle curve reali dotate di coppia di punti doppî immaginario-coniugati. Da questa varietà doppia isolata che non ha alcun riferimento coll'aspetto delle curve piane si potrà nel seguito prescindere.

Ciò posto, sia C^n reale e dotata di $\delta > 0$ punti doppî reali $M_1, M_2, \ldots, M_\delta$. Il suo punto-immagine sarà un punto P nel quale s'incrociano δ falde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\delta$ di Ω. I δ iperpiani $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\delta$ tangenti in P ad Ω lungo le falde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\delta$ hanno in comune (n. 3) un $S_{r-\delta}$ e non uno spazio di maggior dimensione.

5. Si applichi alla parte reale Γ di C^n una « piccola variazione » topologica *che sciolga tutti i δ punti doppî*. Nell'intorno di uno M_i di questi, la « piccola variazione » potrà avere l'uno o l'altro di due opposti comportamenti [comportamenti *complementari* (¹)]. Invero, se M_i è nodale, ordinati ciclicamente intorno ad esso i quattro elementi di Γ che ne escono, potrà la « piccola variazione » raccordare il primo elemento col secondo (ed il terzo col quarto), oppure raccordare il primo col quarto (ed il secondo col terzo); se poi M_i è isolato, esso potrà nella « piccola variazione » produrre un circuito, oppure svanire senza traccia. E si hanno così 2^δ tipi topologicamente distinti di « piccola variazione ».

Se si applica a C^n una « piccola variazione » algebrica, alla scelta fra i due aspetti complementari della relativa « piccola variazione » topologica nell'intorno di M_i corrisponde in S_r il fatto che il punto P_1 immagine della trasformata C_1^n si può prendere nell'intorno reale di P dall'una o dall'altra banda della falda μ_i.

Ora nell'intorno reale di P le δ falde μ_i si comportano topologicamente come i δ iperpiani tangenti τ_i, e, poichè questi si tagliano precisamente in

---

pure il sistema lineare al quale *appartengono* i sistemi $A_2 f_1 = 0$, $A_1 f_2 = 0$, i quali hanno in comune la sola $f = 0$. Calcolando sotto questo aspetto la dimensione di (1) e tenendo presente l'ipotesi pel caso di h componenti irriducibili, si deduce facilmente che (1) è regolare, come appunto si voleva.

(¹) *Sulla generazione* ecc. (cit.), § 2; *Sui fasci di curve grafiche* (cit.), § 4.

un $S_{r-\delta}$, le falde stesse dànno luogo ad una ripartizione dell'intorno in 2^δ distinte regioni, ciascuna delle quali risponde ad una delle 2^δ scelte che si possono fare sulla posizione di P_1 in rapporto alle μ_i (1).

Si assegni perciò comunque la « piccola variazione » di Γ fra le 2^δ topologicamente distinte. Sarà sempre individuabile nell'intorno reale di P una delle 2^δ regioni in modo tale che, condotto in essa (com'è lecito) con estremo in P un segmento di retta, ad ogni spostamento del punto-immagine a partire da P su quel segmento corrisponda una « piccola variazione » di C^n effettuabile in un fascio e topologicamente equivalente alla « piccola variazione » topologica assegnata.

Concludendo: *Se la « piccola variazione » topologica di Γ scioglie tutti i δ punti doppî, essa può tradursi in una « piccola variazione » algebrica di C^n effettuabile entro un fascio (reale).*

6. Si applichi ora alla parte reale Γ di C^n una « piccola variazione » che sciolga $\alpha < \delta$ punti doppî assegnati $M_1, M_2, \ldots, M_\alpha$ e mantenga i rimanenti β $(\alpha + \beta = \delta)$ lasciandoli fissi o mutandoli in punti doppî prossimi. Si avranno 2^α tipi topologicamente distinti.

Una « piccola variazione » algebrica di C^n topologicamente identica alla « piccola variazione » topologica assegnata dovrà rappresentarsi in S_r con uno spostamento del punto-immagine a partire da P sulla varietà ω (ad $r - \beta$ dimensioni reali) intersezione delle β falde μ_h $(h = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, \alpha + \beta)$, spostamento in cui il punto si muova tenendosi dalla banda opportuna rispetto a ciascuna delle α falde μ_k $(k = 1, 2, \ldots, \alpha)$.

Uno spostamento su ω può avvenire sotto questo aspetto appunto in 2^α diverse maniere. Invero sulla ω le α falde μ_k operano in modo topologicamente identico a quello con cui operano gli α iperpiani τ_k sullo spazio σ (ad $r - \beta$ dimensioni) intersezione dei β iperpiani τ_h. Ora gli α iperpiani τ_k tagliano σ secondo altrettanti spazî ad $r - \beta - 1$ dimensioni aventi in comune precisamente un $S_{r-\delta}$ ed, essendo $r - \delta = (r - \beta) - \alpha$, determinano in σ nell'intorno reale di P precisamente 2^α regioni.

Coll'intervento di un *segmento di curva algebrica* uscente da P e giacente su ω nella opportuna regione, sarà agevole riprendere il procedimento del n. 5, concludendo che *ogni « piccola variazione » topologica di Γ si può tradurre in una « piccola variazione » algebrica di C^n.*

È così raggiunto lo scopo principale della presente Nota.

7. Se però la « piccola variazione » algebrica si vuole effettuare *entro*

(1) Se, anzichè alle falde μ_i, si fa riferimento agli iperpiani τ_i, le 2^δ regioni corrispondono alle 2^δ scelte per i segni delle prime δ coordinate cartesiane di un punto, quando P (supposto proprio) si assuma come origine e i primi δ iperpiani coordinati si faccian coincidere cogli iperpiani τ_i.

un fascio [che suppongo *privo di parti fisse* (1)], per un noto teorema di Bertini (2) dovranno mantenersi fissi i β punti doppî M_h ($h = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + \beta$).

Con θ_h ($h = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + \beta$) si indichi lo spazio ad $r - 3$ dimensioni immagine in S_r del sistema delle curve piane di ordine n aventi punto doppio in M_h e con θ, quando esista, lo spazio a $t > 0$ dimensioni, intersezione degli spazî θ_h. Nell'ipotesi fatta, alla « piccola variazione » dovrà corrispondere uno spostamento del punto-immagine sopra un segmento di retta uscente da P e giacente in θ.

Ora perchè ciò sia possibile *comunque si fissi la « piccola variazione » topologica*, basta ed occorre che *gli iperpiani* τ_k ($k = 1, 2, \dots, \alpha$) *taglino* θ *in altrettanti spazî a* $t - 1$ *dimensioni aventi in comune precisamente un* $S_{t-\alpha}$, ossia che *le curve piane d'ordine n passanti doppiamente per i* β *punti* M_h *costituiscano un sistema lineare* ∞^t *entro il quale quelle passanti semplicemente per gli* α *punti* M_k *formino un sistema lineare precisamente* $\infty^{t-\alpha}$.

La condizione è dunque puramente algebrica.

Agronomia. — *La solubilità della Leucite nel terreno agrario.* Nota del prof. G. DE ANGELIS D'OSSAT, presentata dal Socio R. PIROTTA (3).

I fratelli Rogers (1848), per primi, affermarono la solubilità della leucite nell'acqua. Posteriormente parecchi dimostrarono che la leucite nel terreno agrario mette a disposizione delle piante la potassa che contiene; fra costoro debbonsi, per ora, ricordare Clarke (1895-1900), Giglioli (1899), Steiger (1900), Paternò (1900), Ampola (1903), Monaco (1903-1912), Caruso (1905), Casoria (1906), Ampola e De Grazia (1906), De Grazia e Camiola (1906), Angeloni, Bernardini (1908), de Angelis d'Ossat (1910) ed ultimamente Bandini, Nazari, Cecchetti, Felcini, Bonomi, Alvisi (1917), e specialmente Giannobi ecc. La scomposizione della leucite è facilitata da parecchi agenti, i quali sono quasi sempre presenti nel terreno agrario, come:

(1) In generale il fascio non potrà avere parti fisse. Se però la C^n è riducibile e tutti i punti doppî di C^n che siano semplici o doppî per una sua componente sono fra i β da conservarsi, tale componente potrà anche mantenersi fissa. In tal caso le considerazioni che seguono si intenderanno riferite alla parte mobile.

(2) Bertini, *Sui sistemi lineari* [Rendiconti del R. Istituto lombardo, serie 2a, vol. 15 (1882), pp. 24-28]; oppure *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* [Spoerri, Pisa, 1907, pag. 227].

(3) Presentata nella seduta del 6 febbraio 1921.

l'azione decomponente delle radici, la presenza dei sali di NH^4 e di Na, l'intervento dei microrganismi, l'CO^2 ecc. [1].

Ai geologi però già da gran tempo era nota la facile alterazione delle rocce leucitiche e della stessa leucite per azione dei soli atmosferici e senza il concorso diretto delle piante e del terreno agrario. I petrografi poi conoscono chiaramente tutte le diverse forme paragenetiche che partono dalla leucite e citano infatti questo minerale fra quelli che più facilmente si alterano e che generano pseudomorfosi (caolino, analcime, sanidino, plagioclasi, nefelina, leucite-ammonio).

La questione della solubilità nell'acqua della leucite si ricollega a quella dei feldspati e dei silicati in genere e quindi la relativa bibliografia si allarga enormemente. Tenendomi il più possibile nei limiti ristretti sull'argomento che presentemente si tratta, oltre ai citati autori, menziono i seguenti: Missoux (1856), Birnbaum (1862-63), Dehérain (1863), Ullik (1871), Laisné (1886), Aitken (1887), Nilsson (1889), Muller (1890), Passerini (1894), Sestini (1899), Schloesing (1900-02), Petermann (1900), Alvisi (1903-17), De Polo (1904), Dumont (1904), Prianschsukow (1905-12), Manuelli (1908), Ciuffolini (1909), Ulpiani (1910), Craveri (1910), Schneiderholm (1912), Bunger (1912), Ross (1912), André (1913), De Boladeres (1914), Soave (1915), De Twill (1919), Ames e Boltz (1920), ecc.

*
* *

La scuola pedologica americana, capitanata da Whitney e Cameron, sostiene che i costituenti mineralogici del terreno si sciolgono puramente e semplicemente nell'acqua, senza che i minerali subiscano alterazione alcuna e permanendo quindi integrale la natura dei minerali residuali. Le reazioni, con le relative sostituzioni, avverrebbero solo per la parte sciolta nell'acqua. A questo stesso parere sembra che accedano — dopo molte ricerche microscopiche, pazienti ed accurate, sui minerali dei terreni agrari della Francia — il Delage e Lagatu (1904).

Il Cayeux (1905) invece afferma che nel terreno agrario si trovano i minerali con gradazioni diverse di alterazione e che quindi questi di regola dànno direttamente luogo a decomposizioni e sostituzioni, senza sciogliersi prima nell'acqua.

I fenomeni idrolitici spiegano i fatti che giustamente sorpresero i pedologi americani e francesi e gettano un ponte fra le due opposte concezioni. L'idrolisi dei minerali e quella della leucite ha permesso a Lepierre (1895) e ad altri tracciare per la leucite le fasi teoriche che si succedono durante il fenomeno coll'azione degli altri agenti.

[1] Il Ferrero L. O. (1892) fu il primo che pensò all'utilizzazione agraria delle rocce leucitiche italiane.

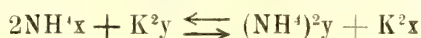
Dall'altra parte non mancano osservazioni positive che assicurano l'alterazione dei minerali anche senza l'intervento dell'acqua, la quale non è sempre sufficiente da sola a provocare la scomposizione dei minerali. Non v'ha ragione che le forze paragenetiche che affaticano i minerali debbansi arrestare proprio nel ben complicato laboratorio chimico che costituisce il terreno agrario, nel quale invece riconosciamo la presenza di molte cause favorevoli e di maggiore efficacia per la scomposizione dei minerali. Tra queste ultime non posso tacere l'azione di superficie, la quale nelle terre deve raggiungere un valore sicuramente considerevole e l'azione della fase gassosa.

* * *

Nel caso speciale della leucite posso affermare, in base a parecchie esperienze e ripetuti esami microscopici sopra terre dell'altipiano del Lazio, che il minerale ben presto si altera e si trasforma dando origine agli svariati prodotti delle vicende subite; mentre che nelle rocce sotterranee, sia laviche sia piroclastiche, rimane allo stato fresco quasi generalmente. Nelle terre invece molto dilavate i cristalli isolati di leucite od i frammenti, pur rimanendo inalterati, diminuiscono di volume, come dimostra l'avvenuto arrotondamento degli spigoli e degli angoli solidi, senza l'intervento di azione abrasiva meccanica.

Ho inoltre ripetuto le esperienze dei Rogers, del Clarke, dello Steiger e del Bernardini sulle leuciti laziali, ottenendo sempre risultati positivi sia con la carta di tornasole sia con la soluzione di fenolftaleina. L'entità dell'effetto si è mostrata proporzionale al tempo impiegato ed alla superficie presentata dal minerale.

Le soluzioni idriche, ottenute per idrolisi, riescono così poco concentrate da non essere sufficienti all'alimentazione delle piante, come può dimostrarsi con appositi calcoli. Però non mancano cause che rompono l'equilibrio nella soluzione e queste sono molteplici nel terreno agrario, come: il potere adsorbente, lo sviluppo continuo e notevole di CO^2, l'azione speciale delle radici, la presenza dei sali di NH^4, l'alimentazione selettiva per ioni delle piante ecc. Per le citate ragioni sempre nuove quantità di sostanza minerale passa attraverso la soluzione, la quale pur rimanendo invariabilmente in grado tenue, tuttavia può sopperire alla specifica e completa appetenza delle piante. Specificando ricordo le relazioni reversibili che intercedono fra la leucite (residuo $Al^2 Si^4 O^2 = y$) ed i radicali acidi dei sali di $NH^4 = x$ e cioè:

$$2NH^4x + K^2y \rightleftarrows (NH^4)^2y + K^2x$$

donde la leucite-ammonio di Clarke e Steiger (1900) e del Bernardini (1908) dalla formola $(NH^4)^2 Al^2 Si^4 O^{12}$.

Con apposite esperienze, ho liberato parecchia potassa dalla leucite,

trattando questa allo stato puro e la leucitite, ridotte in polvere, con stallatico ed orina, al fine di intensificare e di abbreviare nel tempo il noto processo sull'ortose di Lawrence. I risultati da me ottenuti collimano con quelli che ebbero coloro che sperimentarono nelle condizioni analoghe, come De Grazia e Camiola, Passerini, Aloisi e Giannobi, ecc. Nel caso pratico dovrà preferirsi la leucite pura all'uso delle lave leucitiche, poichè queste, contenendo quasi sempre discreta quantità di ferro allo stato ferroso, possono aumentare di troppo il potere adsorbente del terreno e diminuire soverchiamente la concentrazione delle soluzioni percolanti e quindi la stessa fertilità.

Con un'altra esperienza, durata sei mesi, ho cercato di ponderare il valore idrolitico sulla leucite pura del Lazio. Di questo minerale ho scelto frammenti calibrati, vitrei, esenti da visibili inclusioni e li ho messi in acqua distillata. Questa è stata rinnovata quasi ogni mese sino al quantitativo di un litro e mezzo.

Il materiale leucitico pesava gr. 96,853 e quindi teoricamente conteneva gr. 20,82 di K^2O: la sua superficie calcolata è risultata pari a dc^2 31,485. Alla fine dell'esperienza il materiale ha perduto il 0,124 % del peso primitivo.

Di notevole interesse è stata la constatazione della formazione della parte dissociata non solubile sotto forma di *gelo* e non di *solo*; infatti l'acqua ha subito chiarificato dopo i rimescolamenti della massa. Secondo van Bemmelen e Cornu gli agenti atmosferici generano sulle rocce i *geli*, mentre secondo il Gedroiz ed Ulpiani si producono *soli*.

L'ultimo risultato ottenuto non può confrontarsi con quelli delle mie esperienze del 1910, pubblicati in questi Rendiconti, a causa della disparità delle condizioni; ma rimane però dimostrato e misurato il potere idrolitico della leucite.

Allo scopo di formarmi un concetto concreto sulla solubilità della leucite in rispetto alla vegetazione, ho trattato il minerale con uno fra i più adatti solventi, cioè con una soluzione idrica di acido citrico al 2 %.

I frammenti di leucite furono previamente riconosciuti vitrei e senza inclusioni e se ne misurarono i relativi diametri: la leucite pesava gr. 69,345 e la sua superficie risultò di dc^2. 4,3859. Dopo sei mesi, con soluzione acida di cc 800, ho ottenuto una diminuzione in peso — previa decantazione dalla parte insoluta — di 0,677 %: cui corrispondono gr. 0,145 di K^2O.

La leucite in questa esperienza, come in tutte le altre, non ha mostrato di aver subìto la minima alterazione superficiale.

*
* *

I fatti esposti spiegano i favorevoli risultati ottenuti con le concimazioni leucitiche, le quali, apportando un elemento indispensabile e sufficientemente solubile nelle terre che ne sono sprovviste, aumentano, con forte

vantaggio economico, i prodotti delle piante potassofile erbacee, fra le quali particolarmente sensibili si mostrano le leguminose. Anche le arboree, come gli ulivi, per mezzo del sovescio hanno risentito il vantaggio nello stesso primo anno di trattamento. Ultimamente alcuni intelligenti ed accurati agricoltori hanno istituito esperienze su larga scala con leucite ridotta in polvere sottilissima, ottenendo generalmente risultati favorevoli, i quali non tarderanno gli sperimentatori a rendere di pubblica ragione.

Tutto ciò insinua in noi italiani la speranza di poter mettere in valore, in un prossimo avvenire, le enormi quantità di potassa, calcolate dal Washington in 9 miliardi di tonnellate, delle nostre rocce vulcaniche.

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 maggio 1921.

Anastasia G. E. — Le forme elementari della composizione dei vegetali o l'origine della specie (Filogenesi delle *Nicotianae*, delle *Primulaceae* e delle *Violae*) (Estr. dal « Bullett. tecnico », n. IV). Scafati, 1920. 8°. pp. 1-43.

Bozzolo C. — In memoria di Camillo Bozzolo. Torino, 1921. 8°, pp. 1-52.

Bozzolo C. — In memoria di Camillo Bozzolo (Scritti medici dei discepoli). Torino, 1921. 8°, pp. I-XXXVIII, 1-225.

Eulerus. — Leonhardi Euleri opera omnia. Series I, voll. II, III, XIII, XVII, XVIII. Lipsiae, 1916-1920. 4°. pp. I-XXXIV, 1-611; I-XXXVII, 1-543; I-XVII, 1-508; I-VII, 1-457; I-XI, 1-475.

Huygens C. — Oeuvres complètes publiées par la Société Hollandaise des Sciences, tome XIII. fasc. I, II; tome XIV. La Havre, 1916-1920. 4°, pp. I-CLXVII, 1-904; 1-556.

Lockyer S. — Further observations of the spectrum of Nova Cygni III, 1920 (Repr. from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », vol. LXXXI, pp. 173-179). Edinburgh. 1921. 8°.

Pincherle S. — Sobre la iteracion analitica (Extr. da la « Revista matemática hispano-americana »). Madrid, 1921. 8°, pp. 1-24.

Scorza G. — Note e Memorie di matematica, vol. I, fasc. I. Catania, 1921. 8°, pp. 1-64.

Silvestri F. — Descrizione di alcuni *Staphylinidae* (Coleoptera) termitofili delle regioni orientali e australiana (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'Agricoltura in Portici », vol. XV). Portici, 1921. 8°, pp. 1-23.

Presentate nella seduta del 3 giugno 1921.

Battaglia M. — Histologische Veränderungen in den Organen aus experimenteller Trypanosomiasis verändeter Tière (Abdruck aus dem « Centralblatt f. Bakteriologie Parasitenkunden. Infektionskrankheiten ». Bd. 86, pp. 393-395). Neapel, 1920. 8°.

Bourgeois. — Notice sur le général Bassot (1841-1916) (Extr. de l'« Annuaire du Bureau des longitudes »). Paris, 1921. 8°, pp. 1-16.

Colizza C. — Sopra una malattia poco nota del Giaggiolo prodotta da Septoria Iridis Massal (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIII, pp. 494-501). Modena 1920. 8°.

Curral J. I. — Nuevos teoremas que resuelven el problema de Hurwitz (Extr. da la « Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid », tomo XVIII). Madrid, 1921 8°, pp 1-22.

Eddington A. S. — Espace, temps et gravitation. La théorie de la relativité généralisée dans ses grandes lignes; exposé rationel suivi d'une étude mathématique de la théorie. Ouvrage

traduit de l'Anglais par J. Rossignol élève à l'école normale supérieure, avec une introduction de P. Langevin professeur au Collège de France. Paris, Librairie scientifique Hermann, 1921. 8°, pp. I-XII, 1-262. Partie théorique, pp. I-IV, 1-145.

Fantoli G. — Commemorazione di Giuseppe Colombo (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LIV, pp. 111-115). Milano. 1921. 8°.

Frintz H. — The Vegetation of the Siberian-Mongolian Frontiers. Trondhyem, 1921. 4°, pp. 1-457.

Guglielmo G. — Intorno ad alcuni giudizi ed alcune dimostrazioni termodinamiche del prof. Guido Grassi e di altri. Cagliari, 1921. 8°, pp, 1-58.

Leone S. — La lotta contro il « Tracoma » nella provincia di Siracusa. Siracusa, 1921. 8°, pp. 1-16.

Lustig A. — Studi ed osservazioni sulla Pellagra (Estr. da « Lo Sperimentale », anno LXXV). Firenze, 1921. 8°, pp. 1-96.

Passerini N. — Esperienze sulla resistenza dell'Anguillula dell'aceto a differenti agenti (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIV, pp. 14-64). Modena, 1921. 8°.

Pereira de Sousa F. L. — O terremoto do 1° de novembro de 1755 em Portugal e um estudo demografico, vol I. Lisboa, 1919. 4°, pp. 1-277.

Pession G. — Sulla misura della capacità degli aerei R. T. Un caso particolare della misura dell'altezza di radiazione o altezza efficace degli aerei R. T. (Estr. dal Giorn. « l'Elettrotecnica »). Varese, 1921. 4°, pp. 1-8.

Peyronel B. — La forma ascofora dell'Oidio della quercia a Roma (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIV). Modena, 1921. 8°, pp. 1-10.

Peyronel B. — La forma ascofora della Rhacodiella castaneae, agente del nerume delle castagne (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XXIX, pp. 324-327). Roma, 1920. 8°.

Raddi A. — Breve cenno sommario sul terremoto della Lunigiana del 7 settembre (Estr. dal « Politecnico »). Milano, 1921. 8°, pp. 1-15.

ra. V. — Sopra l'azione del Tomes fulvus (Scop.) Fries sul mandorlo (Estr. da le « Stazioni sperimentali agrarie italiane », vol. LIV, pp. 114-118). Modena, 1921. 8°.

Salvadori R. — Atomi e nuclei atomici (Estr. dal « Giornale di chimica industriale ed applicata ». Milano, 1921. 4°, pp. 1-7.

Santarelli E. — Contribuzione alla flora alveale del Serchio (Estr. dagli « Atti della Società Toscana di Scienze naturali », vol. XXXIV). Pisa, 1921. 8°, pp. 1-45.

Traverso G. B. — Commemorazione del prof. Giuseppe Cuboni (Estr. dagli « Atti della Società agronomica italiana », fasc. II). Roma, 1921. 8°. pp. 1-36.

Traverso G. B. — Commemorazione del prof. Pier Andrea Saccardo (Estr. dal Nuovo « Giornale botanico italiano », vol. XXVII, pp. 39-74). Sancasciano val di Pesa, 1920. 8°.

Vallauri G. — Misure di radiazione sugli aerei R. T. (Estr. dal Giornale « l'Elettrotecnica »). Varese, 1921. 4°, pp. 1-12.

Zeilon N. — Sur les équations aux dérivées partielles à quatre dimensions et le broblème optique des milieux biréfringents. I-II partie (Nova acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis, vol. V, nn. 3, 4). Upsala. 1921. 4°, pp. 1-128; 1-55.

INDICE DEL VOLUME XXX, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1921 — 1° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

D

F

G

I

L

T

V

W

INDICE PER MATERIE

E

F

G

I

M

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXX. (1892-1921). Fasc. 11°, Sem. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXIX. (1862-1920). Fasc. 11°-12°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. XIII, fasc. 5°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. XVI. Fasc. 7.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni annata e per tutta l'Italia è di L. 108; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. Maglione & C. Strini (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 giugno 1921.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini, *Cancelliere dell'Accademia, responsabile*